Analiza normativnih i deskriptivnih osnovnih ideja funkcije i njezinih primjena

Josipa Matotek [1, 2]
[1] *Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku,* Hrvatska
[2] *Prirodoslovno-mtematički fakultet, Sveučilište u Splitu*, Hrvatska
Doktorski studij
Istraživanje u edukaciji u području prirodnih i tehničkih znanosti – usmjerenje Matematika
josipa.matotek@gfos.hr , jmatotek@pmfst.hr

Sažetak* – Tehnološki napredak se temelji na razvoju znanosti, posebice matematike koja je osnova tehničkih, ali u današnje vrijeme često i nekih društvenih znanosti. Početak definiranja koncepta funkcije obilježava i početak takve moderne matematik. Međutim, ovaj matematički koncept nije jednostavan i često stvara poteškoće učenicima pa i studentima. Za formiranje nekog matematičkog koncepta pa tako i koncepta funkcije, veliku ulogu ima prethodno znanje, ali i primjeri njegove primjene u određenim situacijama/kontekstima. Vrlo je važno međusobno povezati različite mentalni prikazi nekog matematičkog koncepta jer je to osnova za stvaranje naprednih pojmova. Pa je tako konceptualno razumijevanje funkcije bitno za razumijevanje koncepata limesa, derivacija i integrala... Često u tom procesu stvaranja konceptualne mentalne slike funkcije nastaju određene poteškoće ili čak zablude. Cilj ovoga rada je predstaviti rezultate istraživanja o teškoćama i zabludama koje se pojavljuju pri učenju koncepta funkcije. Također će biti predstavljena i didaktička kategorija Grundvorstellungen, tj. osnovne ideje koju na različite načine možemo iskoristiti u proučavanju navedenog problema.

***Ključne riječi* - edukacijska matematika, koncept funkcije, osnovne ideje, mentalni prikaz**

I. UVOD

Koncept funkcije temelj je moderne matematike. Osim na studiju matematike, koncept funkcije izučava se u matematičkim kolegijima na prijediplomskim studijima tehničkih i prirodnih znanosti, što pokazuje njegovu neizmjernu važnost, i uključenost i u nematematičke discipline. Na njega se naslanjaju pojmovi poput limesa, derivacija funkcije i integrala. Navedeni pojmovi temelj su matematičke analize i izučavaju se u većini sveučilišnih kolegija matematike, stoga je dobro razumijevanje koncepta funkcije važno za svakog studenta matematike, prirodnih i tehničkih znanosti [1]. Matematička analiza, zajedno s njenim temeljnim pojmom funkcije, je postala osnova za primjenu u različitim područjima doprinoseći razvoju različitih znanosti, osobito fizike. Također je utjecala i na stvaranje novih istraživačkih područja, poput ekonomije i psihologije. Ove promjene dodatno su poboljšale ulogu koju su matematika i znanost imale u društvu u prošlosti, a pogotovo danas [2]. Međutim, postoji opravdana zabrinutost za matematičko znanje budućih studenta. Naime, nalazi studija u matematičkoj edukaciji ukazuju da su mnogi takvi studenti svladali određene matematičke vještine, ali bez konceptualnog razumijevanja [3].

Kurikulum nastavnog predmeta Matematike Republike Hrvatske sadrži pet domena, a jedna od njih je *Algebra i funkcije* koja u svom nazivu sadrži pojam funkcije, što nam dodatno govori o važnosti ovog matematičkog koncepta [4]. Od učenika se očekuje da: „Prepoznavanjem pravilnosti i opisivanjem ovisnosti dviju veličina jezikom algebre učenici definiraju funkcije koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. Modeliraju situacije opisujući ih algebarski, analiziraju i rješavaju matematičke probleme i probleme iz stvarnoga života koji uključuju pravilnosti ili funkcijske ovisnosti“ [4]. Na kraju srednjoškolskog obrazovanja, učenici gimnazijskih programa su obavezni pristupiti Državnoj maturi. A po vlastitom izboru maturi pristupaju učenici koji su završili četverogodišnje strukovne srednje škole jer je položena matura uvjet za upis na visoka učilišta u Republici Hrvatskoj. Ispit iz Matematike, na Državnoj maturi, može se pisati na osnovnoj ili višoj razini. Međutim, bez obzira na odabranu razinu udio područja ispitivanja domene *Algebra i funkcije* je visok, na osnovnoj razini on iznosi 40%, a na višoj razini 50% od ukupnog broja bodova [5].

Zbog upravo opisane važnosti koje funkcije zauzimaju u današnjem obrazovanju, interes ovoga rada je koncept funkcije i njegovi mentalni prikazi (pojedinačne slike ili eksplanatorni modeli) koje imaju učenici/studenti. Problem nastaje kada se te stvorene slike ne poklapaju s adekvatnom interpretacijom, što pokazuju analize dosadašnjih istraživanja. Taj problem nije rijetkost, čak dapače, neki učenici u procesu formiranja slike koncepta stvaraju određene zablude [6].

Udžbenik matematike je jedno od temeljnih pomagala koje koriste nastavnici pri pripremi nastave matematike, ali i učenici pri učenju i rješavanju domaćih zadaća. “Rezultati pokazuju da su udžbenici stabilan resurs kroz vrijeme, iako su doživjeli neke promjene u periodu digitalizacije” [7]. Međutim, udžbenici ponekad podržavaju nastanak i dugoročnost zabluda [8].

U ovom radu će prvo biti predstavljen koncept funkcije, ponajprije dajući povijesni razvoj ovog koncepta, a zatim će biti naglašena kompleksnost samog koncepta koja uzrokuje poteškoće i zablude u razumijevanju. Nadalje ćemo dati kratki prikaz najčešćih teškoća i zabluda koje se pojavljuju kod učenika i studenata pri savladavanju koncepta funkcije. U sljedećem poglavlju detaljnije ćemo opisati teorijski okvir, didaktičku kategoriju Grundvorstellung, koji može biti korišten u budućim istraživanjima o konceptu funkcije.

II. KONCEPT FUNKCIJE

A. *Povijesni razvoj koncepta funkcije*

Koncept funkcije je značajka koja razlikuje modernu matematiku od antičke [9]. Razvoj ovog koncepta uslijedio je nakon još jedne matematičke revolucije proizašle iz definiranja krivulja algebarskim jednadžbama, umjesto, kao do tada, određenim geometrijskim svojstvom. Ovaj se pristup počeo sve više koristiti od sedamnaestog stoljeća nakon objavljivanja Descartesove rasprave o geometriji [2]. Ključnu ulogu u razvoju, a i u poučavanju ovog koncepta uveo je Leonhard Euler u svom djelu *Introductio in analysin infinitorum* iz 1748. godine. Prema Euleru, funkcija y od x je svaki "analitički izraz u x", to jest, svaki izraz koji sadrži potencije, logaritme, trigonometrijske funkcije u varijabli x. Kasnije se definicija funkcije mijenjala te je ona (i njezina neprekidnost) generalizirana [2]. Koncept funkcije mijenjao se tijekom godina, ne jer je netko samovoljno odlučio napraviti promjene, nego zato što su nove spoznaje u matematici stvorile potrebu za tim promjenama [10]. Suvremeni koncept funkcije, kojeg još nazivamo i Dirichlet-Bourbakijev koncept (polovinom dvadesetog stoljeća), definiran je kao postupak između dva neprazna skupa koja svakom elementu iz prvog skupa (domena) pridružuje točno jedan element drugog skupa (kodomena) [11]. Dirichlet-Bourbakijev pristup definirao je kao funkcije mnoga pridruživanja koje prethodne generacije matematičara nisu prepoznale. Među njima su funkcije koje nisu neprekidne, funkcije definirane po dijelovima (tj. različitim pravilima na različitim poddomenama) te funkcije definirane pomoću grafa [12].

U osamnaestom i devetnaestom stoljeću funkcija se poučavala samo na tehničkim visokim učilištima i nekim srednjim školama (poput vojnih škola) [2]. Početkom dvadesetog stoljeća Felix Klein je identificirao pojam funkcije kao temelj inovativnih promjena u nastavi matematike te se zalagao za što više primjera primjene matematike u nastavi, jer je koncept funkcije važan alat za modeliranje [13]. Početkom 20. stoljeća su u Meranu, Stuttgartu i Dresdenu zabilježeni novi nastavni programi. Po njima su učenici u dobi od 12 do 15 godina učili o konceptu varijable i funkcijske ovisnosti, a u dobi od 16 – 17/18 godina su izrađivali grafičke prikaze funkcija u svrhu povezivanja aritmetike, algebre i geometrije. Do sredine dvadesetog stoljeća, Kleinove ideje polučile su pobjedu – koncept funkcije zauzeo je središnje mjesto u nastavnim planovima i programima diljem Europe u srednjoškolskoj matematici [13, 14]. U novije vrijeme literatura o poučavanju matematike podržava promicanje konceptualnog znanja o funkcijama, primjerice nastanak različitih uzoraka koji pokazuju funkcijsku ovisnost [11, 15].

B. *Kompleksnost koncepta funkcije*

Iako je koncept funkcije jedan od osnovnih pojmova i njegovo razumijevanje je temelj za nadogradnju matematičkih sadržaja, u istraživanjima je uočeno da učenici/studenti često imaju problema sa konceptom funkcije. Naime, uočene su višestruke i različite poteškoće, čak i zablude u shvaćanju koncepta funkcije [16, 17]. Učenici imaju poteškoća i s mnogim usko povezanim pojmovima s funkcijom (varijabla, domena, kodomena, kompozicija, inverz) [18].

Nedostatak razumijevanja koncepta funkcije ima za posljedicu:

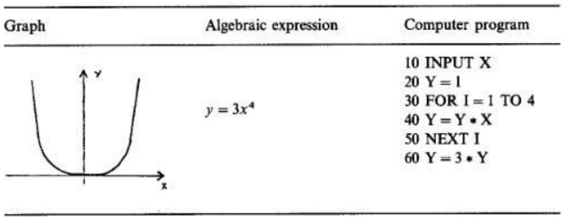
- probleme s razumijevanjem kasnijih koncepata, kao što su limesi, derivacije ili integrali;
- nesigurna primjena funkcija u drugim područjima ili profesionalnoj budućnosti;
- osjećaj da je koncept funkcije beskoristan, što dovodi do niske motivacije i interesa za njegovo proučavanje [16].

Koncept funkcije se u različitoj dobi uvodi u nastavu na različite načine, tj. promatra se samo neki njen aspekt.

Tako na primjer, Sfard (ali i drugi znanstvenici poput D. Talla) ističe dualnost koncepta funkcije koji može biti promatran na dva načina:

- *strukturalno* – kao objekt i
- *operativno* – kao proces [19-21].

Na primjeru sa Slike 1 uočimo da je grafički prikaz strukturalan, računalni je operativan. Algebarski prikaz funkcije se može protumačiti na oba načina: operativno kao sažeti opis nekog računanja, ili strukturalno, kao statički odnos između dviju veličina [19].



Slika 1: Različiti prikazi funkcije [19]

Sfard primjećuje da je, povijesno gledano, operativni aspekt prethodio strukturalnom i tvrdi da bi se tako trebalo pristupiti i u procesu poučavanja, objašnjavajući da je strukturalni pristup apstraktniji od operativnog [19].

Različiti prikazi funkcija daju različite poglede na funkcije, međutim niti jedan ne pruža potpuni pogled na koncept funkcije sam za sebe [22]. Tri su vrste značajki koje u međusobnoj povezanosti utječu na znanje o funkcijama:

- različiti načini pristupa funkcijama,
- kontekst prezentacije i
- poznavanje temeljnih pojmova [23].

Sposobnost identificiranja i predstavljanja pojma u različitim prikazima i fleksibilnost pri prelasku s jednog prikaza na drugi igraju ključnu ulogu u učenju i razumijevanju koncepta funkcije [10, 24-26].

Nadalje, mentalne slike koncepta funkcije, koje studenti stvaraju u svojoj glavi, mogu se razlikovati od njezine matematičke definicije [11, 16, 27]. Ova je slika rezultat njihovog iskustva s funkcijom u nekom kontekstu, koji može varirati između geometrijskog pristupa (izraženog kao krivulja), algebarskog pristupa (izraženog kao formula) i logičke ideje (ulazno-izlazni stroj) [9].

Funkcijsko mišljenje uključuje tri koncepta: koncept pridruživanja, koncept kovarijacije i koncept objekta [22, 28, 29]:

a) *Koncept pridruživanja* funkcije koristi za opisivanje ili stvaranje veza između veličina: jedna veličina se dodjeljuje drugoj, te je jedna veličina ovisna o drugoj. Ovakav koncept je statičan;

b) *Koncept kovarijacije* se zasniva na razumijevanju ideje kako promjena nezavisne varijable uzorkuje promjenu zavisne varijable. Zavisna varijabla kovarira s nezavisnom. U ovom slučaju je potrebno razumijevanje i razlikovanje skupova domene i kodomene. Korisni prikazi za proučavanje kovarijacije su tablice i grafovi. Ovaj koncept potiče dinamičnost funkcijskog mišljenja;

c) *Koncept objekta* promatra funkciju kao cjelinu. U tom slučaju je najjednostavnije promatrati svojstva funkcije kao što su neprekidnost, postojanje ekstrema… Ako funkciju promatramo kao objekt onda ona može biti element familije funkcija ili možemo njome manipulirati, npr. derivirati ju, integrirati…

C. Teškoće i zablude pri usvajanju koncepta funkcije

Velik dio istraživanja o konceptu funkcije zapravo se bavi detektiranjem poteškoća i zabluda povezanih s učenjem ovog koncepta. Mnoga od njih ukazuju kako na nedosljednosti između mentalnih slika o funkciji koje pojedinac razvija tako i između tih slika i definicije [30].

Trujillo i suradnici [16] su u svom preglednom radu sistematizirali zablude i poteškoće vezane uz koncept funkcije te su ih svrstali u pet kategorija:

1) Definicija
2) Tumačenje ili značenje
3) Zapis i izraz
4) Grafički prikaz
5) Manipuliranje i svojstva.

1) Definicija

Mnogi učenici i studenti ne znaju izreći jasnu i preciznu definiciju funkcije matematičkim rječnikom i bez grafičkih pomagala [16]. Krajem 20. stoljeća, istraživanja su utvrdila da i budući nastavnici matematike imaju teškoća s razumijevanjem koncepta funkcije. Primjerice ne uvažavaju proizvoljnu prirodu funkcije [10, 26]. Nadalje mnogi budući nastavnici nisu mogli objasniti važnost i podrijetlo zahtjeva jednoznačnosti [10, 31, 32]. Analize ukazuju da mnogi učenici imaju problema u identificiranju preslikavanja koje su funkcije i iskazivanju definicije pojma funkcije. Razlog tome je često nedostatak konceptualnog znanja, odnosno učenje temeljeno na pamćenju, a ne razumijevanju [33]. Srednjoškolski učenici često funkciju radije opisuju primjerom nego ju definiraju [25], ali i pri korištenju primjera mnogi od njih griješe [34].

2) Tumačenje ili značenje

Najčešće teškoće koje se pojavljuju u ovom dijelu su razlikovanje funkcije i jednadžbe te korištenje funkcije pri modeliranju ili opisivanju neke pojave ili situacije [16, 24, 35, 36]. Najčešće zablude u tumačenju koncepta funkcije su: funkcija se smatra „strojem“ koji ulazni podatak „nekako“ mijenja u izlazni; funkcija uvijek mora biti zadana algebarskim izrazom, odnosno pravilom pridruživanja; funkcija je pridruživanje točno jednog elementa domene točno jednom elementu kodomene i obrnuto [16].

Najčešće tumačenje srednjoškolskih učenika je da je funkcija transformativna „kutija“ koja radi na principu ulazno – izlaznih podataka. U ovakvom tumačenju funkcija je matematički objekt, a ne prepoznaje se kao dinamični proces pridruživanja, tj. kovarijacije. Napomenimo da ovakvo tumačenje nije netočno, ali je nepotpuno. Ono je korisno u početnim fazama učenja, ali ograničenje na samo jedan pristup je nedovoljan pogotovo za studente [16, 25]. Osim što učenici/studenti smatraju da funkcija mora biti zadana algebarskim izrazom kao pravilom pridruživanja [35, 37], dodatno misle i da je takvo pravilo dovoljno da bi bila funkcija dobro zadana [25, 26]. Još jedna učestala zabluda je miješanje koncepata funkcije i bijekcije, mnogi učenici smatraju da je samo bijektivna funkcija funkcija, a ostale vrste funkcija koje ne zadovoljavaju svojstvo bijektivnosti (pridruživanje „jedan na jedan“) to nisu [32, 33, 38].

3) *Zapis i izraz*

Promotrimo funkciju kojoj su domena i kodomena skup realnih brojeva, te je zadana sljedećim zapisom:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x.$$

Različita istraživanja su pokazala da učenici/studenti imaju teškoća s razumijevanjem ovakvog zapisa [1, 33, 39, 40]. Nadalje, učenici i studenti često ne mogu odrediti je li po dijelovima zadana funkcija poput

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

zapravo jedna ili dvije funkcije [1]. Dodatno, učenici/studenti imaju poteškoća u poimanju što je varijabla x i što zapravo ona predstavlja. Ne razumiju da umjesto x možemo uvrstiti bilo koji element domene. Tako npr. čak 43% studenata koji su s izvrstan položili kolegij algebre nije točno izračunalo vrijednost funkcije f kada je za varijablu stavljeno $x + a$ umjesto x [1]. Manipuliranje različitim algebarskim prikazom iste funkcije također predstavlja problem [1, 16, 41, 42].

4) *Grafički prikaz*

Iako se u srednjoj školi i početnim kolegijima matematike na prijediplomskom studiju izučava funkcija jedne varijable, česta poteškoća je prevođenje algebarskog prikaza funkcije u grafički koristeći Kartezijev koordinatni sustav, i obrnuto [16, 43]. Sljedeći problem koji je učestao po svojoj frekvenciji je određivanje predstavlja li krivulja u koordinatnom sustavu graf neke funkcije ili ne. Neki učenici u odgovoru na ovo pitanje koriste horizontalni umjesto vertikalnog testa pokazujući da ne razumiju zapravo niti jedan od ta dva testa [43]. Nadalje, mnogi studenti također imaju tendenciju pretpostaviti da su zadane funkcije linearne ili kvadratne i to u slučajevima kada je ta pretpostavka neopravdana. Primjerice smatraju da je svaki graf "u-oblika" parabola. Ove zablude možda i nisu toliko iznenađujuće jer se funkcije obično uvode u školski kurikulum kroz specifične vrste funkcija, često linearne ili kvadratne [42]. Nalazi istraživanja pokazuju kako učenici/studenti smatraju da konstanta funkcija nije funkcija bez obzira je li zadana u algebarskim izrazom: $f(x) = k$, gdje je k konstanta ili u grafičkom prikazu: pravac paralelan s x-osi [1, 44, 45]. Jedan od razloga leži u tome što studenti miješaju konstantu funkciju s izrazom $x = k$, gdje je k konstanta, koji ne predstavlja funkciju. U ovom slučaju graf je pravac paralelan s y-osi [16]. Drugi razlog leži u činjenici da funkcija ne varira, tj. ne sadrži nezavisnu varijablu x s desne strane [3]. S druge strane učenici/studenti smatraju da kružnica u koordinatnom sustavu prikazuje graf funkcije [44], npr. čak 65% studenata učiteljskog fakulteta na Cipru smatra da je izrazom $x^2 + y^2 = 25$ zadana funkcija [45]. Zanimljivo je i da učenici/studenti često misle da sve funkcije imaju geometrijski prikaz u koordinatnom sustavu, što je istina za funkcije čije su domena i kodomena skupovi brojeva, ali nije točno ako su elementi skupa nebrojčani [16].

5) *Manipuliranje i svojstva*

Funkcije koje imaju prekid posebno su problematične učenicima/studentima. Činjenica da njihov graf nije neprekinuta linija navodi ih na pretpostavku da ono što je prikazano nije funkcija [1, 16, 43, 44]. Nadalje, studentima je teško uzeti u obzir da ograničenja domene utječu na sliku funkcije. Ova poteškoća je povezana s nerazumijevanjem funkcije kao pridruživanja. Budući da funkciju ne smatraju pridruživanjem, ne mogu proširiti ograničenje domene na sliku funkcije [16]. Teškoće se pojavljuju i u manipulaciji funkcijama u smislu traženja kompozicije funkcija [3].

III. TEORIJSKI OKVIR OSNOVNIH IDEJA

U ovom seminarskom radu govorit će se i o didaktičkoj kategoriji Grundvorstellung (GV) i njezinoj primjeni. Grundvorstellung je njemačka riječ koja se sastoji od dva dijela, "Grund" što znači osnova i "Vorstellung" što znači ideja, pojam ili mentalni model [46]. Zbog toga se GV u literaturi može naći i pod nazivom *Osnovni mentalni modeli* (BMM). U ovom seminarskom radu za GV ćemo koristit pojam *osnovna ideja*.

U nastavku će biti objašnjen opis koncepta osnovne ideje, različiti aspekti osnovne ideje i primjeri primjene korištenja osnovne ideje u nekim istraživanjima, a vezano uz koncept funkcije.

Zapravo, uz pomoć ovog didaktičkog pristupa tj. uz pomoć osnovne ideje možemo opisati vezu između matematičkog sadržaja i mentalnog prikaza kojeg učenik stvara [47]. Također, možemo reći da je osnovna ideja nekog matematičkog koncepta interpretacija povezana sa sadržajem koja tom konceptu daje značenje [46] ili didaktički koncept koji klasificira mentalne matematičke prikaze [48]. Ili najjednostavnije, osnovna ideja je odgovarajući model objašnjenja.

Koncept osnovnih ideja, tj. vezu apstraktnih matematičkih pojmova i mentalnih modela koji se za te pojmove formiraju kod učenika, možemo prikazati u tri koraka [47, 49]:

• Značenje matematičkog pojma zasniva se na povezivanju sa prethodnim znanjem ili proživljenim iskustvom, tj. novi pojam stavlja se u kontekst sa poznatim sadržajem.

• Konstruira se odgovarajući mentalni prikaz matematičkog pojma - internalizacija.

• Razvija se sposobnost primjene matematičkog pojma na stvarne životne situacije.

Možemo zaključiti da u procesu formiranja značenja nekog matematičkog koncepta veliku ulogu ima prethodno znanje, ali i primjeri njegove primjene u konkretnim situacijama. Također je važno međusobno povezivanje različitih matematičkih koncepata jer je to osnova za stvaranje naprednijih koncepata. Pomoću osnovne ideje možemo detaljno analizirati matematičke koncepte ili postupke tražeći veze s drugim matematičkim elementima. Cilj takvih analiza je identificirati različite pristupe određenoj matematičkoj temi, kako bi se učenicima olakšalo stvaranje ispravnih matematičkih prikaza [47].

A. Različiti aspekti osnovne ideje

1) Normativni, deskriptivni i konstruktivni aspekti

Osnovna ideja nije nova didaktička kategorija. No, sve do 1980-ih korištena je isključivo u *normativne* svrhe. Opisivano je kako bi učenike trebalo poučavati u svrhu razvijanja određenog konceptualnog razumijevanja. Međutim, tada se nije razmatralo kakve su matematičke predodžbe (točne, pogrešne ili nepotpune) učenici doista razvili. Nakon navedenog razdoblja raste broj *deskriptivnih* istraživanja u didaktici matematike, kao i interes za proces učenja (ne više samo poučavanja). Opisane promjene utjecale su i na proširenje primjene osnovne ideje. Ona se počela koristiti u svrhu „opisa, analize i interpretacije nastavnih situacija te za konstruktivno ispravljanje pogrešaka i zabluda“ [47].

Dakle, danas razlikujemo normativne i deskriptivne osnovne ideje. Primijetimo, ne radi se o dvije različite vrste osnovnih ideja, već o dva različita načina primjene koncepta osnovnih ideja.

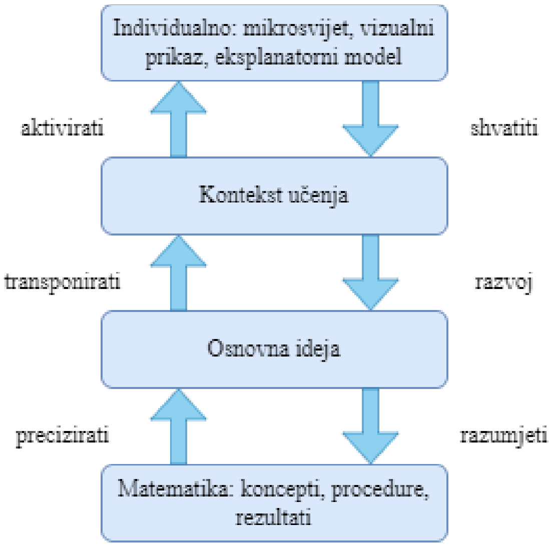
Vom Hofe opisuje ove koncepte kao:

• *Normativni* aspekti više su poput obrazovnih uputa i određuju ciljeve učenja za nastavu matematike. Također mogu pomoći nastavnicima u osmišljavanju lekcije [46].

• *Deskriptivni* aspekti procjenjuju učeničke mentalne prikaze, ovom metodom imamo uvid u pojedinačne slike i eksplanatorne modele svakog učenika. Ove pojedinačne slike mogu se više ili manje razlikovati od osnovne ideje danog normativnim smjernicama. Dodajmo da terminologija nije u potpunosti usklađena jer neki autori ovakav pristup nazivaju individualnim osnovnim idejama [46]. Mi ćemo se zadržati na terminu deskriptivne osnovne ideje.

Terminom osnovnih ideja opisujemo odgovarajuće modele objašnjenja. Osnovne ideje se koriste kao normativna metoda u analizi matematičkih sadržaja. Dok se osnovne ideje koriste kao deskriptivna metoda u određivanju podudarnosti individualne mentalne slike s očekivanom.

Naglasimo, međutim, da postoji i treći aspekt osnovnih ideja – *konstruktivni* aspekt. Temelji se na već opisanoj pretpostavci da učenici grade svoje individualne mentalne prikaze i objašnjenja, ali i da nastavnici mogu utjecati na njih npr. nekom generiranom osnovnom idejom. Proces generiranja osnovne ideje možemo vidjeti na Slici 2. Na Slici 2 su u lijevom stupcu prikazane didaktičke odluke, a u desnom stupcu aktivnosti učenika koje su podržane odgovarajućim mjerama navedenim u lijevom stupcu. Objasnimo detaljnije proces prikazan na Slici 2. Analizom matematičkih koncepata ili procedura učitelji započinju proces poučavanja s ciljem kreiranja osnovne ideje. No, u ovoj fazi svakako moraju uzeti u obzir učeničko predznanje i iskustvo o određenoj matematičkoj temi. Sljedeći korak je transpozicija promatranog sadržaja iz osnovne ideje u relevantni kontekst učenja. On bi trebao biti prikladan za aktiviranje odgovarajućih pojedinačnih slika i eksplanatornih modela za svakog učenika. Nadalje, poželjno je da učenik shvati kontekst učenja iz svog stvorenog mentalnog modela, a zatim razvije očekivanu osnovnu ideju uključivanjem nove ideje u osobni sustav eksplanatornih modela. I tada konačno možemo reći da učenik razumije promatrani matematički koncept.



Slika 2. Proces generiranja osnovne ideje [47]

Gore opisani procesi mogu pomoći u planiranju nastave, ali i kao model za otkrivanje i rješavanje potencijalnih „sukoba“ između formalnog i intuitivnog pristupa. Posljedica ovoga je zapravo prepoznavanje i praćenje problema učenja [47, 50].

2) Primarne i sekundarne osnovne ideje

Neki autori kategoriziraju osnovne ideje s obzirom na razinu složenosti proučavanog matematičkog koncepta:

- *Primarne* osnovne ideje se temelje na konkretnim radnjama sa stvarnim objektima. U svrhu objašnjenja nekog matematičkog koncepta, ovdje manipuliramo stvarnim objektima. Stoga možemo reći da primarna osnovna ideja poprima reprezentativni karakter.
- *Sekundarne* osnovne ideje se temelje na matematičkim operacijama sa simboličkim objektima. Ovdje, u objašnjavanju matematičkih struktura koje nisu stvarne već zamišljene radnje, manipuliramo simboličkim reprezentacijama kao što su brojevni pravac, pojam funkcije, grafovi funkcija... Dakle, možemo reći da sekundarna osnovna ideja ima simbolički karakter.

Važno je istaknuti da primarne i sekundarne osnovne ideje imaju važnu ulogu u matematizaciji (tj. procesu modeliranja) problemskih zadataka iz stvarnog života. Oni su ključni u "transformaciji" u nekoliko koraka:

- transformacija se provodi s problema iz stvarnog života na problem matematičkog modela,
- rješavanje matematičkog modela (često je potrebno koristiti osnovne ideje u procesu rješavanja matematičkog modela, npr. prevođenje s jedne vrste reprezentacije na drugu npr. iz geometrijske u algebarsku),
- interpretacija matematičkih rezultata u kontekstu stvarnog života (naravno, na kraju je potrebno matematička rješenja prevesti natrag u terminologiju zadanog zadatka i ponuditi objašnjenje riječima).

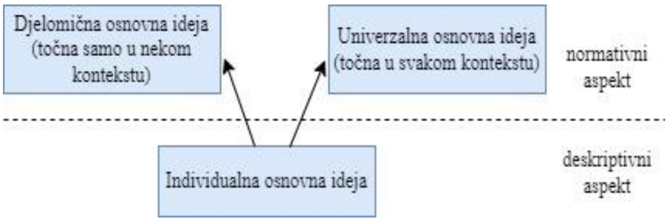
Međutim, proces modeliranja je vrlo složeno područje koje nije predmet našeg interesa, te ovdje nećemo ulaziti u detalje o toj temi.

3) Univerzalne, individualne i parcijalne osnovne ideje

Roos [51] razlikuje univerzalnu, individualnu i parcijalnu osnovnu ideju.

- *Univerzalna* osnovna ideja ima ulogu normativnog vodstva za nastavnike. Ova osnovna ideja odgovara na pitanje što bi učenici trebali misliti o određenom konceptu, ona je neovisna o kontekstu. Univerzalna osnovna ideja se oslanja na Vom Hofeov normativni aspekt.
- *Individualna* osnovna ideja se oslanja na Vom Hofeov deskriptivni aspekt. Odgovara na pitanje što svaki pojedinačni učenik misli o određenom konceptu. Individualna osnovna ideja se može utvrditi promatranjem načina na koji učenik rješava zadatak ili problem, a često je potrebno kroz dijalog točnije procijeniti njegovu kreiranu osnovnu ideju.
- *Djelomična* osnovna ideja je ideja koja daje smisao nekom konceptu, ali u ograničenom kontekstu. Roos je uvela i ovaj aspekt u želji da pomoću njega otkrije razlog zabluda nekih učenika. Primjer djelomične osnovne ideje je tvrdnja “dijeljenjem se rezultat smanjuje” što je točno samo u nekim kontekstima, u slučaju prirodnih brojeva kada je djeljenik veći od djelitelja. Zabluda kojom bi se ova tvrdnja generalizirala u svakom kontekstu vodi do tzv. pretjerane generalizacije [51].

Roos je kategorizirala individualnu osnovnu ideju ili kao univerzalnu (jer funkcionira u svakom kontekstu) ili kao djelomičnu (jer funkcionira samo u nekom kontekstu). Slika 3 prikazuje međusobni odnos navedenih osnovnih ideja. Važno je istaknuti da korištenje ispravne djelomične osnovne ideje u pogrešnom kontekstu može dovesti do zablude pretjerane generalizacije [51].



Slika 3. Veze između univerzalne, individualne i djelomične osnovne ideje [51]

B. Primjeri primjene osnovne ideje

U ovom dijelu će bit opisani i kvalificirani primjeri korištenja osnovnih ideja iz nekoliko različitih radova. Prvo ćemo vidjeti primjere normativnog korištenja osnovnih ideja funkcije u svrhu analize i kategorizacije zadataka s obzirom na složenost osnovnih ideja koje su potrebne za njihovo uspješno rješavanje. Osnovne ideje su u mnogim radovima korištene s obzirom na normativni i deskriptivni aspekt. Proučavani su koncepti različitih vrsta funkcije: linearne [52], logaritamske [53], sinus [48]. Ovdje će biti prikazan primjer deskriptivnog korištenja osnovnih ideja funkcije sinus. S obzirom da je koncept funkcije temelj razumijevanja složenijih koncepata ne čudi što se osnovne ideje koriste i u analizi razumijevanja tih složenijih koncepata. Primjerice, često se analizira koncept granične vrijednosti (odnosno limesa) niza [54] ili općenitije granične vrijednosti funkcije [55] te derivacije funkcije [55]. Osim osnovnih ideja funkcije, u nastavku ćemo opisati osovne ideje koncepata bliskih konceptu funkcije tj.ekstrema i određemog integrala kako bismo pobliže ilustrirali što su to osnovne ideje i njihovu ulogu u nastavi matematike.

Prema Vollrathu [28] postoje tri različite osnovne ideje funkcije koje se mogu aktivirati: pridruživanja, kovarijacije i objekta, njih smo već naveli i objasnili na stranici 3. ovoga rada. Jedino istraživanje koje je provedeno o funkcijama u Hrvatskoj je također koristilo ovaj teorijski okvir u analizi. U radu su analizirani zadaci o funkcijama iz više razine Državne mature 2015. i 2016. godine. Zadaci su grupirani s obzirom na osnovnu ideju funkcije koja je potrebna da bi se zadatak uspješno riješio. Analiza je pokazala da čak 77% zadataka aktivira osnovnu ideju objekta, 14% ideju pridruživanja, dok čak niti jedan zadatak ne aktivira osnovnu ideju kovarijacije [56]. Uočimo, u ovom radu nije bilo govora o uspješnosti u rješavanju ovih zadataka. Možemo reći da je ovdje analizirana normativna osnovna ideja, ali ne i deskriptivna.

Vom Hofe i Blum [47] objasnili su upotrebu osnovnih ideja u velikim studijama kao što su PALMA i PISA.

PALMA je longitudinalno istraživanje koje istražuje razvoj matematičkih kompetencija u bavarskim školama, koristeći kvantitativne i kvalitativne metode. Ovdje je osnovna ideja korištena za principe projektiranja na način da su zadaci kategorizirani prema broju i složenosti osnovnih ideja koje je potrebno koristiti za njihovo uspješno rješavanje.

U analizi zadataka iz PISA testa namijenjenog petnaestogodišnjacima odredili su za svaki zadatak (normativne) osnovne ideje koje učenici trebaju posjedovati da bi ih uspješno riješili. Također su razvrstavali zadatke po težini koristeći varijablu “OI-intenzitet”.

Budući da je za uspješno rješavanje matematičkog zadatka potrebno posjedovati različite kompetencije od proceduralnog znanja do mentalnih prikaza, često u kvantitativnim testovima nije moguće vrednovati samo jednu komponentu. “Mentalni prikazi ne čine se izolirani od drugih čimbenika i stoga se ne mogu mjeriti odvojeno od njih” [47].

1) Osnovna ideja funkcije sinus

Katter [48] je u svom istraživanju proučavao koje osnovne ideje imaju studenti, budući nastavnici matematike, o sinusima, kako su različite osnovne ideje sinusa povezane jedna s drugom, te postoje li osnovne ideje drugih matematičkih objekata koje utječu na način na koji učenici razmišljaju o sinusu?

Razlikovao je četiri osnovne ideje o funkciji sinus:

- Osnovna ideja *proporcije*

je definicija funkcije sinus u pravokutnom trokutu. Sinus promatranog kuta je kvocijent duljina nasuprotne katete promatranom kutu i hipotenuze.

- Osnovna ideja *projekcije*

vrijednost $sin\,\alpha$ može tumačiti kao redukcijski faktor u izrazu $a = sin\,\alpha \cdot c$. Na primjer, sjena stabla se povećava ili smanjuje ovisno o kutu svjetlosnih zraka.

- Osnovna ideja *jedinične kružnice*

je povezana s parametrizacijom jedinične kružnice, točnije s kružnim gibanjem objekta. Vrijednost sinusa odgovara broju koji daje informaciju o položaju objekta.

- Osnovna ideja *oscilacije*

je bitna u matematičkom modeliranju periodičnih procesa. Česti primjeri periodičnih funkcija su prikaz modela vibrirajuće žice, kardiogram....

Iako su studenti pokazali da posjeduju ispravne osnovne ideje, nisu ih znali primijeniti u neočekivanom kontekstu. Npr. samo je dvoje studenata (od 30) dalo točan odgovor uz objašnjenje da procijene vrijednost izraza $\sin 80^{\circ}$, pri čemu su neki odgovori čak bili veći od 1 ili su bili izraženi u ovisnosti o veličini π. Ovo pokazuje potrebu za izgradnjom fleksibilne i održive osnovne ideje [48].

2) Osnovna ideja niza

Niz (a_n) definiramo kao funkciju $a\colon \mathbb{N} \to S$, pri čemu S može biti skup realnih (ili kompleksnih) brojeva, ali može biti i skup nekih objekata npr. učenika u razredu, mjeseci u godini… Vrijednost funkcije $a(n)$ nazivamo n-ti član niza i kraće ju označavamo s a_n. S obzirom da smo niz definirali kao funkciju osnovne ideje niza vrlo su slične osnovnim idejama samih funkcija.

- Osnovna ideja *nizanja*

promatra nizove kao poredak objekata u zadanom redoslijedu. Primjer osnovne ideje nizanja je popis učenika u imeniku. Ova osnovna ideja se često koristi u zadacima testova inteligencije u kojima treba prepoznati pravilnost koja se javlja u zadanom nizu te ga treba nastaviti.

- Osnovna ideja *pridruživanja*

podrazumijeva da svakom prirodnom broju n pridružujemo neki element iz skupa S, odnosno n-ti član niza.

- Osnovna ideja *kovarijacije*

se temelji na pojmu funkcije i članove niza prikazuje kao funkciju prethodnih članova. U ovoj ideji se n-ti član niza opisuje rekurzivnim formulama, ovisnošću o prethodnim članovima niza. Dobri primjeri ove osnovne ideje su aritmetički i geometrijski niz.

- Osnovna ideja *objekta*

promatra niz kao cjelinu, matematički objekt kojemu možemo odrediti različita svojstva (monotonost, periodičnost, omeđenost…) [57, 58].

3) Osnovna ideja točke ekstrema

Ovdje će biti navedene osnovne ideje vezane uz pojam ekstremnih točaka funkcije kako ih je klasificirala Roos u svrhu identificiranja pogrešaka i zabluda učenika te objasnila moguće uzroke njihove pojave [51].

- Osnovna ideja *najveće/najmanje vrijednosti*

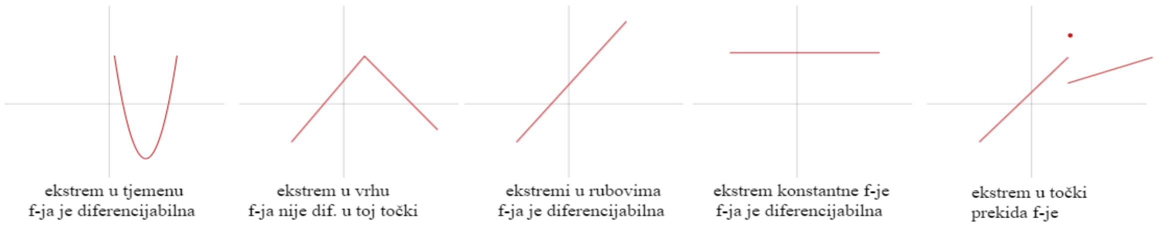
se izravno odnosi na definiciju ekstremne točke: ekstremne točke su točke (x,y) s najvećom/najmanjom y – vrijednošću u odnosu na određenu okolinu oko x. Od učenika se očekuje da budu sposobni identificirati ekstremne točke uspoređujući vrijednosti funkcije y (bilo algebarski ili grafički). Potpunim usvajanjem željene osnovne ideje studenti će moći razlikovati vrste točaka ekstrema prikazanih na Slici 4. Ova osnovna ideja je korisna pri uvođenje koncepta točaka ekstrema u škole. Jedan od razloga za to je činjenica da je ova osnovna ideja univerzalna i vrijedi u svakom kontekstu.

- Osnovna ideja *nul nagiba*

se odnosi na činjenicu da graf funkcije ima nagib nula u ekstremnoj točki. Ovo je usko povezano s aspektom "derivacija je nula": "ekstremi se postižu u točkama gdje je derivacija u toj točki jednaka nuli". Ali znamo da to nije uvijek točno. Neki preduvjeti moraju biti ispunjeni: promatrana točka mora biti unutar domene i funkcija mora biti diferencijabilna. Ako bilo koji od ovih uvjeta nije zadovoljen, moguće je da postoji ekstremna točka u kojoj derivacija nije jednaka nuli (vidi Sliku 4). Čak i kada su preduvjeti zadovoljeni i postoje točke u kojima je derivacija jednaka nuli, to nije nužan uvjet za postojanje ekstrema. Dakle, možemo zaključiti da niti argument "ekstremna točka implicira nagib jednak nuli" niti obrnuti argument "nagib jednak nuli implicira ekstremnu točku" nisu uvijek istiniti. Zbog toga je ova osnovna ideja djelomična osnovna ideja.

- Osnovna ideja *promjena monotonosti*

Ako neka funkcija strogo pada do određene točke x_0, a zatim strogo raste, intuitivno se može tvrditi da je $x_0$točka (lokalnog) minimuma. Razmišljanje analogno ovome može se primijeniti u slučaju postojanja točke (lokalnog) maksimuma. Primjenom ove osnovne ideje od učenika se očekuje da bude sposoban pronaći intervale monotonosti i primijetiti u kojoj se točki događaju promjene. Oni to mogu učiniti grafički ili algebarski koristeći tablicu promjena predznaka za prvu derivaciju znajući da prolaskom kroz ekstremnu točku prva derivacija mijenja predznak. Ali to je točno samo u jednom smjeru, suprotna tvrdnja nije istinita: svaka točaka ekstrema ne



Slika 4. Vrste ekstremnih točaka funkcije [51]

dovodi do promjene monotonosti. Stoga je i ova osnovna ideja djelomična.

4) Osnovna ideja određenog integrala

U ovom dijelu ćemo opisati osnovne ideje o određenim integralima kako su ih neki autori klasificirali [46, 55].

- Osnovna ideja *površine*

je klasični pristup konceptu određenog integrala koji se često koristi u udžbenicima, a koji se temelji na određivanju površine ispod grafa funkcije f na segmentu $[a, b]$ na x-osi u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Ovakav model bez daljnjeg objašnjenja može dovesti do raširene zablude da je "integral područje, a područje je uvijek pozitivno". Takva zabluda nastaje jer se u ovom slučaju uvijek pretpostavlja da je promatrana funkcija nenegativna, što naravno ne mora biti.

- Osnovna ideja *(re)konstrukcije*

ima snažnu vezu s modeliranjem problema iz stvarnog života. Ovdje određeni integral funkcije f predstavlja mjeru promjene veličine kao ukupnu varijaciju ove veličine na zadanom intervalu. Veza sa mjerom promjene derivacije, kroz antiderivaciju, ovdje je očita. U zadacima koji koriste ovu osnovnu ideju najčešće se traži volumen, kao mjeru promjene protoka tijekom vremena, ili, na primjer, prijeđena udaljenost kao mjera promjene brzine tijekom vremena. Zanimljivo je da se takvi zadaci mogu rješavati i prije uvođenja koncepta integrala u škole. Iako se u ovakvim zadacima zapravo računa površina ispod grafa funkcije, osnovna ideja površine je zapravo u drugom planu, a osnovna ideja (re)konstrukcije je od primarne važnosti jer zadaci ne zahtijevaju eksplicitno izračunavanje površine, već neke druge fizikalne veličine.

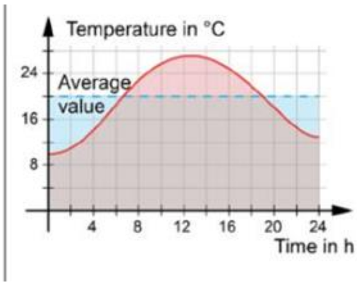
- Osnovna ideja *prosječne vrijednosti*

se bazira na teoremu srednje vrijednosti integrala koji glasi:

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$, tada postoji $c \in [a, b]$ takav da vrijedi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorem nam zapravo govori da postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je površina ispod grafa funkcije f iznad promatranog segmenta $[a, b]$, jednaka površini pravokutnika širine $b - a$ i visine $f(c)$. Slika 5 prikazuje primjer u kojem možemo izračunati prosječnu dnevnu temperaturu izračunavanjem integrala funkcije temperatura tijekom vremena.



Slika 5. Prosječna vrijednost i integral [55]

- Osnovna ideja *akumulacije*

promatra određeni integral funkcije kao limes suma s velikim brojem malih područja. U tu svrhu treba zadani interval podijeliti na nekoliko podintervala koji mogu (ali ne moraju) biti jednake duljine. Tada se zadana površina aproksimira upisanim (ili opisanim) pravokutnicima čiju je površinu jednostavnije izračunati. Povećanjem broja podintervala, odnosno pravokutnika povećava se točnost izračuna. Konačno, određeni integral definiran je kao limes promatranih površina, kada broj podintervala teži prema beskonačno. Treba napomenuti da ovdje nije naglasak na izračunu površina niti na samoj njihovoj graničnoj vrijednosti, već na njihovoj akumulaciji. Greefrath i suradnici [55] smatraju da se u školi integrali trebaju uvesti koristeći navedenu osnovnu ideju. No, također, zaključuju da je jedino ispravno načelo kombinirati različite osnovne ideje kako bi učenici dobili bolji uvid u koncept određenog integrala.

IV. ZAKLJUČAK

U radu je naglašena važnost koncepta funkcije kako u razvoju moderne matematike tako i u ostalim primijenjenim znanostima. Međutim, zbog kompleksnosti koncepta funkcije često se kod učenika ne razvija razumijevanje samog koncepta (deskriptivne osnovne ideje) koje je u dovoljnoj korelaciji sa željenim prikazom toga koncepta (normativne osnovne ideje). Na primjer, iz prikazanih primjera osnovnih ideja lako možemo zaključiti da korištenje djelomične osnovne ideje u pogrešnom kontekstu ili ignoriranje svih potrebnih pretpostavki može dovesti do učeničkih pogrešaka i zabluda. S normativnom osnovnom idejom možemo spriječiti pogrešna shvaćanja [47]. Ali čak i ako su učenici došli s već stvorenim pogrešnim predodžbama, osnovna ideja bi trebala djelovati kao faktor korekcije učeničkih pogrešaka i zabluda [44]. Ovakva istraživanja su korisna da bi nastavnici osvijestili učenička ograničenja koja se često javljaju [36]. Dakle, unatoč svim prethodnim studijama, daljnja istraživanja su itekako potrebna jer sadašnji studenti i dalje imaju poteškoća s učenjem koncepta funkcije [16].

Svaki školski sustav ima svoje specifičnosti i razlikuje se od ostalih po nemalom broju elemenata koji utječu na znanja učenika. Nadalje, uočeno je da u Hrvatskoj nema istraživanja koje se bavilo osnovnom idejom o konceptu funkcije koju razvijaju učenici. Stoga bi cilj budućih istraživanja trebao biti da identificira sve vrste predodžbi (osnovnih ideja), a među njima i moguće zablude o konceptu funkcije koje imaju na primjer studenti prve godine tehničkih fakulteta. Odabrana ciljana skupina je pogodna jer ona dolazi s već određenim predznanjima, a nakon završenog drugog ciklusa školovanja. Dodatno, njima je razumijevanje koncepta funkcije bitno za daljnje uspješno školovanje. Osim takvih deskriptivnih osnovnih ideja, paralelno bi se moglo analizirati neke od najčešće korištenih srednjoškolskih udžbenika matematike kako bi se saznalo kakve slike, odnosno normativne osnovne ideje, koncepta funkcije udžbenici najčešće promoviraju. Znači, jedan od sljedećih ciljeva bi mogao otkriti mogu li neki udžbenici potaknuti određene zablude.

Odabrani teorijski okvir, didaktička kategorija *Grundvorstellungen* (osnovne ideje) svojim različitim aspektima i načinima primjene se čini vrlo pogodna i primjerena za predložene analize.

LITERATURA

[1] M. Oehrtman, M. Carlson, and P. W. Thompson, "Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding," *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education,* vol. 27, p. 42, 2008.

[2] L. Zuccheri and V. Zudini, "History of Teaching Calculus," in *Handbook on the History of Mathematics Education*, A. Karp and G. Schubring Eds. London: Springer, 2014, ch. 24, pp. 493-513.

[3] C. Bardini, R. Pierce, J. Vincent, and D. King, "Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function," *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education,* vol. 5, no. 2, pp. 85-107, 2014.

[4] MZOS. "Kurikulum za nastavni predmet Matematika." Narodne novine. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (accessed kolovoz, 2023.).

[5] NCVVO. "Ispitni katolog za Državnu maturu 2022./2023. - Matematika." Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. https://www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2022/09/MAT-2023a.pdf (accessed kolovoz, 2023.).

[6] X. Li, "Cognitive analysis of students' errors and misconceptions in variables, equations, and functions," Ph.D. dissertation, Texas A & M University, 2010.

[7] D. Glasnović Gracin and L. Jukić Matić, "Use of textbooks and other resources in curriculum reform. A longitudinal case study," *ZDM–Mathematics Education,* vol. 53, pp. 1373-1385, 2021.

[8] A. Kajander and M. Lovric, "Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 40, no. 2, pp. 173-181, 2009.

[9] I. Kleiner, "Evolution of the function concept: A brief survey," *The College Mathematics Journal,* vol. 20, no. 4, pp. 282-300, 1989.

[10] R. Even, "Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept," *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, no. 2, pp. 94-116, 1993.

[11] S. Vinner and T. Dreyfus, "Images and definitions for the concept of function," *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 20, no. 4, pp. 356-366, 1989.

[12] M. A. Malik, "Historical and pedagogical aspects of the definition of function," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 11, no. 4, pp. 489-492, 1980/10/01 1980, doi: 10.1080/0020739800110404.

[13] J. P. d. Ponte and H. M. Guimarães, "Notes for a history of the teaching of algebra," in *Handbook on the History of Mathematics Education*, A. Karp and G. Schubring Eds. London: Springer, 2014, ch. 22, pp. 459-492.

[14] A. Sierpinska, "On understanding the notation of function," in *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, E. Dubinsky and G. Harel Eds. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992, pp. 25-58.

[15] M. Carlson, S. Jacobs, E. Coe, S. Larsen, and E. Hsu, "Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study," *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 33, no. 5, pp. 352-378, 2002.

[16] M. Trujillo, L. Atarés, M. J. Canet, and M. A. Pérez-Pascual, "Learning difficulties with the concept of function in maths: a literature review," *Education Sciences*, vol. 13, no. 5, p. 495, 2023. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/2227-7102/13/5/495.

[17] M. O. Thomas, I. de Freitas Druck, D. Huillet, M.-K. Ju, E. Nardi, C. Rasmussen, and J. Xie, "Key mathematical concepts in the transition from secondary school to university," in *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges*, 2015: Springer International Publishing, pp. 265-284.

[18] S. Steketee, "Using technology to integrate geometry and algebra in the study of functions," in *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges*, 2015: Springer, pp. 617-619.

[19] A. Sfard, "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin," *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, no. 1, pp. 1-36, 1991.

[20] D. Tall, "Functions and calculus," in *International Handbook of Mathematics Education: Part 1*: Springer, 1996, pp. 289-325.

[21] E. Dubinsky, "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking," in *Advanced Mathematical Thinking*: Springer, 1991, pp. 95-126.

[22] M. Doorman, P. Drijvers, K. Gravemeijer, P. Boon, and H. Reed, "Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking," *International Journal of Science and Mathematics Education,* vol. 10, pp. 1243-1267, 2012.

[23] R. Even, "Factors involved in linking representations of functions," *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 17, no. 1, pp. 105-121, 1998.

[24] Z. Parhizgar, A. Dehbashi, P. Liljedahl, and H. Alamolhodaei, "Exploring students' misconceptions of the function concept through problem-posing tasks and their views thereon," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 53, no. 12, pp. 3261-3285, 2022.

[25] H. Dogan-Dunlap, "Reasoning with metaphors and constructing an understanding of the mathematical function concept," in *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2007, vol. 2: ERIC, pp. 209-216.

[26] R. Even, "Subject matter knowledge for teaching and the case of functions," *Educational Studies in Mathematics,* vol. 21, no. 6, pp. 521-544, 1990.

[27] D. Tall and S. Vinner, "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity," *Educational Studies in Mathematics,* vol. 12, no. 2, pp. 151-169, 1981.

[28] H.-J. Vollrath, "Funktionales denken," *Journal für Mathematik-Didaktik,* vol. 10, pp. 3-37, 1989.

[29] S. Digel and J. Roth, "A qualitative-experimental approach to functional thinking with a focus on covariation," *Mathematics Education in the Digital Age (MEDA),* vol. 167, 2020.

[30] O. Viirman, "The function concept and university mathematics teaching," Ph.D. dissertstion, Karlstads Universitet, 2014.

[31] J. M. Marbán and E. J. Sintema, "Pre-service secondary teachers' knowledge of the function concept: A cluster analysis approach," *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education),* vol. 5, no. 1, pp. 38-53, 2020.

[32] M. Borke, "Student teachers' knowledge of students' difficulties with the concept of function," *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education,* vol. 9, no. 1, pp. 670-695, 2021.

[33] K. Basibüyük, Ö. Sahin, B. Gökkurt, E. Erdem, and Y. Soylu, "The mistakes that are made by students with regard to functions: Evidence from Erzincan (a province in Turkey)," *Universal Journal of Educational Research,* vol. 4, no. 11, pp. 2523-2532, 2016.

[34] A. Panaoura, P. Michael-Chrysanthou, and A. Philippou, "Teaching the concept of function: Definition and problem solving," in *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, pp. 440-445.

[35] M. P. Carlson, *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. University of Kansas, 1995.

[36] A. O'Shea, S. Breen, and B. Jaworski, "The development of a function concept inventory," *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education,* vol. 2, pp. 279-296, 2016.

[37] M. Sajka, "A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study," *Educational Studies in Mathematics,* vol. 53, pp. 229-254, 2003.

[38] D. Breidenbach, E. Dubinsky, J. Hawks, and D. Nichols, "Development of the process conception of function," *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, no. 3, pp. 247-285, 1992.

[39] P. W. Thompson and M. P. Carlson, "Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically," *Compendium for Research in Mathematics Education,* pp. 421-456, 2017.

[40] S. A. S. Abdullah, "Comprehending the concept of functions," *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* vol. 8, pp. 281-287, 2010.

[41] F. Arzarello, L. Bazzini, and G. Chiappini, "A model for analysing algebraic processes of thinking," *Perspectives on School Algebra,* pp. 61-81, 2002.

[42] B. B. Schwarz and R. Hershkowitz, "Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools," *Journal for Research in Mathematics Education,* pp. 362-389, 1999.

[43] B. Küçük, "Identifying the secondary school students' misconceptions about functions," *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* vol. 15, pp. 3837-3842, 2011.

[44] D. Tall and M. Bakar, "Students' mental prototypes for functions and graphs," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 23, no. 1, pp. 39-50, 1992/02/01 1992, doi: 10.1080/0020739920230105.

[45] A. Evangelidou, P. Spyrou, I. Elia, and A. Gagatsis, "University students' conceptions of function," *International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2004.

[46] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm, and H.-G. Weigand, "Basic mental models of integrals: theoretical conception, development of a test instrument, and first results," *ZDM–Mathematics Education,* vol. 53, no. 3, pp. 649-661, 2021.

[47] R. Vom Hofe and W. Blum, "“Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics," *Journal für Mathematik-Didaktik,* vol. 1, no. 37, pp. 225-254, 2016.

[48] V. Katter, "The connection between angle measure and the understanding of sine," in *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2019, no. 16: Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

[49] R. Vom Hofe, "Grundvorstellungen mathematischer inhalte als didaktisches modell," *Journal für Mathematik-Didaktik,* vol. 13, pp. 345-364, 1992.

[50] R. Vom Hofe, "On the generation of basic ideas and individual images: Normative, descriptive and constructive aspects," in *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity: An ICMI Study Book 1. An ICMI Study Book 2*: Springer, 1998, pp. 317-331.

[51] A.-K. Roos, "'Grundvorstellungen'and their application to the concept of extreme points," in *CERME 10*, 2017.

[52] C. M. Krause and A. Salle, "On the role of gestures for the descriptive analysis of 'Grundvorstellungen': A case of linear functions," *Signs of Signification: Semiotics in Mathematics Education Research,* pp. 293-313, 2018.

[53] C. Weber, "Making logarithms accessible-operational and structural basic models for

logarithms," *Journal für Mathematik-Didaktik,* vol. 37, no. 1, pp. 69-98, 2016.

[54] H.-G. Weigand, "Zur entwicklung des grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer perspektive," *Mathematische Semesterberichte,* vol. 63, no. 1, pp. 135-154, 2016.

[55] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm, and H.-G. Weigand, "Aspects and" Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral: subject matter-related didactical perspectives of concept formation," *Journal für Mathematik-Didaktik,* vol. 1, no. 37, pp. 99-129, 2016.

[56] M. Gusic, "Functions in the 2015 and 2016 Croatian State Matura in higher level Mathematics," *Mathematics Education as a Science and a Profession,* pp. 28-41, 2017.

[57] R. Steinbauer, S. Kramer, and E. Süss-Stepancik. (2019). Schulmathematik analysis. Available: https://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/WS1819/smana-gesamt-2019-02-14.pdf

[58] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm, and H.-G. Weigand, *Didaktik der Analysis*. Springer, 2016.