

# Središnje teme i orijentacije u području rješavanja matematičkih problema

Ivana-Marija Pavković<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Osnovna škola „Josip Vergilij Perić“, Hrvatska

<sup>2</sup> Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, Hrvatska

Doktorski studij

Istraživanje u edukaciji u području prirodnih i tehničkih znanosti – usmjerenje Matematika

[ivana.pavkovic@skole.hr](mailto:ivana.pavkovic@skole.hr), [impavko@pmfst.hr](mailto:impavko@pmfst.hr)

**Sažetak** – Rješavanje problema u nastavi matematike zauzima značajan prostor pozornosti matematičara i istraživača u matematičkom obrazovanju još u vrijeme Georga Polye, a i nakon njega. Možemo reći da je George Polya utrao put sustavnom i strukturiranom planu za rješavanje problema. Nakon njega nailazimo na razne teorije i teoretski formirane strukture koje se bave rješavanjem problema općenito i rješavanjem problema u nastavi matematike. Početak definiranja matematičkog problema i kako rješavati probleme u nastavi matematike te koji se zadatci smatraju problemima je početak smještanja učenika u centar odgojno-obrazovnog procesa s naglaskom na što veću aktivnost i uključenost učenika. To je ujedno i svrha suvremene nastave, osposobiti učenike za rješavanje problema. U modernom društvu, koje je podložno brzim promjenama potrebno je imati određene vještine, a jedna od njih je i sposobnost rješavanja problema. U ovom radu predstaviti ću rezultate istraživanja o heurističkom pristupu pri rješavanju problema, strategijama koje se koriste za rješavanje problema, tipovima problema, razvoju i ulozi mentalne sheme učenika i sposobnosti rasuđivanja te ulozi učitelja prilikom rješavanja problema u nastavi matematike.

## I. UVOD

Sredinom prošlog stoljeća javlja se interes za rješavanje problema u nastavi matematike. Začetnik svega toga je poznati matematičar George Polya (1945) koji je predstavio općeniti plan rješavanja problema u nastavi matematike kroz četiri faze za sve vrste problema. Nakon njega poznati istraživači u matematičkom obrazovanju su proučavali Polyin plan i analizirali ga kao što su Schoenfeld (1979) i Sewerin (1979). Posebno, rješavanje problema je od 1969. godine bilo tema na svakoj konferenciji ICME-a. U 80-im 90-im godina istraživači i edukatori su se bavili definiranjem matematičkog problema, klasifikacijama problema i načinom pristupanja

rješavanju matematičkih problema, te uviđanjem važnosti rješavanja problema za učenike. Krajem 90-ih pa sve do sada razne države diljem svijeta rade na implementaciji rješavanja problema u kurikulumu i programe. Nadalje, rješavanje problema smatra se jednom od najviših kognitivnih vještina u nastavi matematike i općenito u svakodnevnim životnim situacijama, stoga su se istraživači zanimali i za predznanje učenika, njihovo prethodno iskustvo u rješavanju problema, koji su kognitivni procesi potrebni za uspješno rješavanje problema te na koji način uaprijediti kognitivne vještine učenika. Vrlo teško je razumijeti proces rješavanja problema, stoga su razni matematičari pokušali dati strukturu, formalizirati taj proces koji bi olakšao učenje i poučavanje problema. Pokušali su dati općeniti teorijski okvir za rješavanje problema. Velika pozornost se počela davati i utjecaju stavova i motivacije učenika za rješavanje problema. U ovom radu ću sustavno prikazati što se do sada u svijetu istražilo u vezi rješavanja problema, definiranje matematičkog problema, heurističkom pristupu, tipovima problema, strategijama za rješavanje problema, učenikovo sposobnosti rasuđivanja te ulozi učitelja prilikom tog procesa.

## II. HEURISTIKČKI PRISTUP RJEŠAVANJU PROBLEMA I POVIJESNI PREGLED

U vrijeme Georga Polye matematika se počela shvaćati kao sredstvo za kognitivni razvoj učenika. On je smatrao da je potrebno osposobiti učenika za rješavanje problema u nastavi matematike što pridonosi kognitivnom razvoju i boljem razumijevanju nastavnih sadržaja. Smatrao je da na taj način može popularizirati matematiku među učenicima. Godinama je uvriježeno da je matematika najmanje popularna među svim predmetima. Međutim, matematika može biti popularna i zabavna te donijeti mentalnu aktivnost na veću razinu. Matematika je potrebna svima, inženjerima, znanstvenicima, učiteljima, učenicima. Kako bi

krenuli u daljnju analizu najprije ćemo definirati matematički problem. **Matematički problem** je problem koji se može prikazati, analizirati i po mogućnosti riješiti matematičkim strategijama (Blum i Niss, 1991). Nije svaki zadatak problem. Matematički problem je onaj zadatak u kojem rješenje nije očigledno kao ni sama strategija rješavanja (Pólya 1981, Blum i Niss 1991, Nunokawa 2005). Ako nam je na prvi pogled rješenje zadatka vidljivo i metoda rješavanja, tada se radi o rutinskom zadatku. Problem može biti i zadatak koji je tekstualni, ali i algebarski zadatak. Kao takav može biti jednostavniji, problem iz realnog svijeta ili složeniji, apstraktniji problem, čisto matematički problem (Blum i Niss, 1994). Nunokawa, (2005) kaže i da je problem ono što zahtjeva dublje promišljanje, korištenje prethodnog znanja, transformiranje zadatka. Problemi su i zadatci čija ih težina i složenost čini problematičnim i nerutinskim (Xenofontos, 2014 prema Schoenfeld, 1992, Goos, Galbraith i Renshaw, 2000).

Rješavanje problema općenito se smatra najvažnijom kognitivnom aktivnosti u svakodnevnom životu (Jonassen, 2000). Možemo ga definirati kao pronalaženje odgovora na pitanje u zadatku, a za čije pronalaženje nije poznata metoda ili procedura (Cindrić, 2014).

Gagne, (1980) smatra kako središnja točka obrazovanja treba biti to kako naučiti učenike misliti, kako koristiti 'zdrav razum' (razmišljati racionalno) i da postanu što bolji u rješavanju problema (Jonassen, 2000 prema Gagne, 1980). Problem se smatra pitanjem koje je teško riješiti, sumnjivim slučajem ili složenim zadatkom koji uključuje sumnju i neizvjesnost (Seel, 2012). Pronalaženje vrijednosti nepoznatog mora imati neku društvenu, kulturnu ili intelektualnu vrijednost (Jonassen, 2000).

Rješavanje problema je kompetencija koja je potrebna za svakodnevni život (Cindrić, 2014). Stoga su matematički problemi dobar trening za probleme u svakodnevnom životu (Cindrić, 2014). Problemi se mogu razlikovati i proučavati prema strukturi, specifičnosti, apstraktnosti i složenosti (Jonassen, 2000).

Većina psihologa i pedagoga, smatra rješavanje problema najvažnijom vještinom u životu, jer se ljudi svakodnevno susreću s raznim problemima, a rješavanje problema je najefikasnije sredstvo za stvaranje kreativnog mišljenja (Stojaković, 2005).

Pedagozi i psiholozi ističu kako se poučavanje matematike ne smije svoditi samo na implementaciju metoda, procedura ili primjenu algoritama. Rješavanje matematičkih problema s riječima opisano je kao "srce matematike", jer povezuje matematiku sa stvarnim životom što povećava

učenikovu motivaciju za učenje matematike (Khoshaim, 2020).

Polya je smatrao da vještina rješavanja problema nije urođena, već se ona može naučiti. Klasificirao je matematičke probleme ne prema tematici, već prema metodi rješavanja. Polya stavlja naglasak na **heuristički pristup** rješavanju problema i korištenje heurističkih strategija za rješavanje problema.

Heuristika se bavi rješavanjem problema, ispitivanjem načina kako riješiti problem, detaljnije pristupa problemu, analiziranje i prikupljanje informacija, međusobno uspoređujući probleme kako bi se apstrahirala stvarnost i dobili heurizmi.

Postoje četiri faze rješavanja problema:

1. razumijevanje problema,
2. smišljanje plana,
3. provođenje plana i
4. pogled unatrag

Kroz ove faze isprepliće se heuristički pristup rješavanju problema u kojima učitelj navodi učenika, heuristički, kako će pristupiti rješavanju problema, koju metodu koristiti. Heuristika je postupak koji vodi učenika prema rješavanju problema, pomaže mu u otkrivanju. Heurističkim metodama učitelj se trudi da učenik koristi sva osjetila pri provođenju ovih koraka.

U prvoj fazi, fazi razumijevanja problema, ključno je problem razumjeti, a da bi se problem razumio potrebno je da učenici postave i nađu odgovore na sljedeća pitanja.

*Što je nepoznanica?*

*Koje podatke imamo?*

*Koji su uvjeti?*

*Može li se zadovoljiti taj uvjet?*

*Je li taj uvjet dovoljan kako bi se odredilo nepoznato?*

*Postoji li previše podataka u uvjetu koji će nam donijeti rješenje koje nije konkretno za problem?*

Učenike treba navoditi da promišljaju o ovim pitanjima, a uvježbavanjem stječu mentalni sklop u kojem pri svakom sljedećem rješavanju problema pristupaju na takav način. Važno je vizualizirati problem kao cjelinu, razumjeti njegovu svrhu stimuliranjem motivacije i ponavljanjem ključnih pitanja. Proučiti i grupirati dijelove, u dokaznim zadacima su to hipoteza i zaključak, što dovodi do traženog dokaza, a u zadacima kojima se traži rezultat su to podatci, uvjeti i nepoznanica. Stvoriti mentalnu shemu takvu da učenik kombinira dijelove s dijelovima, dio sa cjelinom. Na taj način će što bolje razumjeti problem.

U drugoj fazi je potrebno smisliti plan, dobiti ideju za rješenje problema. Potrebno je pronaći poveznicu između podataka, nepoznatog i uvjeta. Ponekad, kako bi se dobila ideja za rješenje problema je potrebno riješiti slične probleme. Pokušati se prisjetiti već viđenog problema koji je povezan sa zadanim.

Pitanja koja je poželjno postaviti i na njih dati odgovor.

*Možeš li riješiti sličan problem?*

*Što je korisno iz tog problema?*

*Možeš li koristiti metodu za rješavanje sličnog problema?*

Ono što je ključno u ovoj fazi je pogledati problem s više strana, iz raznih perspektiva, raditi na povezivanju s prethodnim problemima u kojima istovremeno uočavamo sličnosti i razlike, analizirati i sintetizirati. Učenik tako dobiva ideju koja može biti dovoljna, ali ako nije dovoljna za potpuno rješenje problema, treba proučiti dijelove te ideje i vidjeti što je ključno za zadani problem, do kojeg dijela rješenja problema ideja vodi.

Paziti da pitanja ne budu konkretna u lošem trenutku, jer ako je učenik daleko od rješenja, konkretnim pitanjem on neće ništa naučiti. Pitanje nije poučeno za rješavanje drugih problema, a ni učeniku nije jasno kako je učitelj odjednom došao do tog pitanja. Konkretna pitanja možemo postaviti kada je učenik blizu konačnog rezultata ili rješenja problema.

U fazi provođenja plana potrebno je izvesti plan do kraja ali promisliti o ispravnosti svakog koraka. Važno je provjeriti svaki korak, kod nekih je to intuitivno, a kod nekih je potrebno provesti dokaz formalno. Dakle, sve algebarske i geometrijske dijelove rješenja provjeriti.

Poželjno je postaviti i odgovoriti na sljedeća pitanja.

*Je li jasno da je svaki korak točan?*

*Možete li dokazati da je točan?*

U završnoj, četvrtoj fazi rješavanja problema, Polya kaže da je potrebno proći ponovo kroz cijeli postupak rješavanja problema. Svakako je dobro razmisliti o rješenju zadataka, o njegovoj interpretaciji, ima li smisla. Potrebno je provjeriti argument, podatke i uvjet. Poželjno je razmisliti i o ideji za rješavanje problema.

Jonassen (2000) smatra kao treba veliku ulogu u rješavanju problema kognitivnim, afektivnim i konativnim procesima i potrebno je učenike naučiti kako kontrolirati svoj um, svoje razmišljanje i kako koristiti racionalne moći. Znači, problemi koji su

dobro strukturirani nemaju veze s problemima s kojima se učenici susreću u svakodnevnom životu.

Postavlja se pitanje, može li, između ostalog, dobro strukturiran nastavni kurikulum utjecati na sposobnost rješavanja problema kod učenika. Na koji način uvesti učenike u proces rješavanja problema? Može li općenita teorija, plan pomoći u tome? Odgovor je potvrđan. Međutim kako to pitanje objasniti. Detaljan odgovor ću nastojati dati u svojim daljnjim istraživanjima. Sigurno, sustavan pregled pristupa rješavanju problema, prikladnim strategijama, obzirom na vrste problema, koje misaone procese uključiti, koja je učiteljeva uloga u svemu tome i koja je zapravo važnost heuristike u rješavanju problema. Svaki navod potrebno je potkrjepljivati primjerima i implikacijama kako uvesti u nastavu, u kojim temama koristiti rješavanje problema. Također ću vidjeti što se događa na razini Republike Hrvatske u aspektu rješavanja problema. Ispitati mišljenja učitelja o važnosti rješavanja problema, njihovoj osobnoj educiranosti, sposobnosti artikulacije nastave s rješavanjem problema. Proučiti i analizirati literaturu, udžbenike. Što se sve nalazi u udžbenicima. Konačno dati implikacije, odnosno prijedlog uputa za sustavno rješavanje problema u nastavi matematike.

Mnogi istraživači u svijetu, kao što su Gagne, Briggs, Wagner (1992), van Merrieboer (1997), Smith i Ragon (1999.), daju općenite strategije rješavanja problema, opće upute kako primijeniti rješavanje problema u nastavi matematike, prateći učenje samog koncepta i pravila, naglašavanjem kognitivnih vještina potrebnih za uspješno rješavanje problema. Međutim, treba razumjeti da različiti ishodi, zahtijevaju različite uvjete i podršku obzirom na to koji je koncept u pozadini problema ili se pak radi o uvježbavanju pravila.

Stephen Lerman (2010) opisuje razvijanje matematičkog jezika kao ključnog elementa za rješavanje problema. Neuspjeh u rješavanju problema može biti izazvan i time da učitelj ima bogat, a učenik loše razvijen matematički jezik. Potrebno je učenike učiti razmišljati, razvijati svaki pojam na hijerarhijskoj i vertikalnoj razini, nadalje hijerarhijska razina ima hijerarhijski dio i horizontalni dio. Odnosno, učenike treba poučavati postepenom odmakom od zadataka iz svakodnevnog života i polako ih uvoditi u proces apstrakcije, što bi označavalo razvoja rješavanja problema na hijerarhijskoj razini. Odnosno, krenuti s jednostavnijim rutinskim zadacima do složenijih, slabo strukturiranih, apstraktnijih problema. Da bi se postigla uspješnost na toj razini potrebno je razviti rješavanje problema i na horizontalnoj razini, što znači uvježbati dovoljno

ove jednostavne, rutinske zadatke iz svakodnevnog života. Učenici koji stavljaju naglasak na kontekst i identificiraju ga kao apstraktno, ne mogu primijeniti znanje koje imaju u tom zadatku kako bi riješili neki drugi zadatak s drugačijim kontekstom ili bez konteksta uopće, jer nisu razumjeli koncept koji je u pozadini problema.

Nadalje, potrebno je razvijati učeničko znanje i vertikalno, odnosno, da učenik nadograđuje svoje znanje, integracijom novog u prethodna znanja.

Kilpatrick (1985) navodi pet koraka za rješavanje problema:

1. Osmoza: u okruženju koje je povoljno za učenje, usmjereno i implicitno se prenose tehnike rješavanja problema
2. Memoriranje: formiranje posebnih tehnika za rješavanje problema određenog tipa te kako ih pravilno primijeniti.
3. Oponašanje: oponašanjem učitelja, učenici stječu sposobnosti rješavanja
4. Suradnja: učenici stječu sposobnosti rješavanja problema surađujući s drugim učenicima u grupama
5. Refleksija: učenici stječu sposobnosti rješavanja problema kroz promišljanje o pristupu i postupcima tijekom rješavanja problema

Učenicima ove heuristike trebaju biti objašnjenje kroz probleme i prikazivanje problema.

Prema Bruder i Collet (2011), učenje kako rješavati probleme odvija se u 4 faze:

1. Intuitivno upoznavanje s heurističkim strategijama i metodama – pomoću agilnih, poticajnih pitanja
2. Osvješćivanje posebnih heurizama pomoću istaknutih primjera za koje je karakteristična određena strategija – eksplicitne upute
3. Kratko uvježbavanje novih strategija – upoznavanje s heurizmima i stjecanje iskustvenih kompetencija
4. Proširenje konteksta – prijenos u druge kontekste

Heurizmi se mogu opisati kao određeni načini postavljanja pravih pitanja. Isto tako, treba dati priliku i učenicima da sami postavljaju pitanja.

Da bi znali koje heurističke alate primijeniti, potrebno je znati kako prikazati problem, strukturirati, možda predstaviti na drugačiji način. Nije jednostavno dobiti

odgovore na ta pitanja, što je povezano sa samoregulacijom i metakognitivnim sposobnostima.

Mnogi istraživači navode kako problem zapravo takav zadatak, situacija s kojim se učenik nije prije susretao, nema iskustva za rješavanje. Samim time heuristika tu zakazuje.

Prema Liljedahl i dr. (2016), problem je takav zadatak koji se ne može riješiti izravnim naporom nego zahtijeva kreativni uvid u rješenje. Slično navodi i Poincare (1952), da je rješavanje problema otkriće preko kreativnosti. U kreativnost su uključeni nesvjesni mentalni procesi (Hadamard, 1945).

Matematička kreativnost se može opisati kao fenomen iznenadnog osvijetljenja.

Sastoji se od četiri faze:

1. Inicijacija – pokušaj rješavanja problema, bezuspješno
2. Inkubacija – učenik rješava problem nesvjesno (odmak od problema)
3. Iluminacija – osvjetljenje, dolazak do rješenja, svjesno vraćanje na problem
4. Provjera – nužna za detaljniji uvid u problem

Treba naglasiti da je iluminacija proces koji se događa između svjesnog i nesvjesnog djelovanja.

Kreativno rješavanje problema određeno je vanjskim, vidljivim procesima, ali i samim karakterom učenika.

Nije lako procijeniti kreativnost učenika, pokušao je Csikszentmihályi, (1996), proučavajući kreativnost kroz tri faze, procjena učinkovitosti otkrića, rasprava o procesima kreativnosti, rasprava o navikama i genijalnošću učenika.

Jako je relevantno odrediti je li neki učenik kreativan ili ne. Stoga treba gledati na kreativnost kao vrijednu osobinu učenika i samo ako je točno riješio neki problem na drugačiji način, ne nužno da je taj način efikasniji.

Kreativno rješavanje problema uz pomoć heuristike je moguće.

Ako se problem ne može riješiti samo uz pomoć heuristike, dizajnirano (Polya, 1949; Schoenfeld, 1985), učenik se mora osloniti na posebno logičko razmišljanje – probajno razmišljanje (Perkins, 2000).

Takav način razmišljanja karakterističan je za kreativno rješavanje problema u kojem učenik dolazi do AHA! efekta.

Ako se problem ne može riješiti namjernim djelovanjem, heuristika se treba sastojati od dva glavna procesa: specijalizacija i generalizacija.

Kroz specijalizaciju se ispituju karakteristike problem, pokušava se riješiti problem. Ako se ne uspije, nastavlja se istraživanjem i pokušavanjem. Generalizacijom se ispituje specifičnost rješenja, razlozi zbog kojih je taj postupak uspio.

Istraživači navode da u današnjem svijetu velikog tehnološkog napretka, korištenjem digitalne tehnologije učenik ispituje i analizira problem generiranjem svih slučajeva, određuje svojstva, veze između koncepata, specificira slučajeve, samim time koristi razne strategije za rješavanje problema.

Također, ono što je usko povezano s poboljšanjem sposobnosti rješavanja problema je i postavljanje problema. Upravo učenička kreativnost dolazi do izražaja u situaciji u kojoj učenici postavljaju problem. Dakle, postavljanje problema ne samo kao cilj nego i kao način poučavanja rješavanja problema (Kilpatrick, 1987).

## II. STRATEGIJE

Nabrojimo neke poznate heurističke strategije:

### 1. Crtanje slike.

Bez obzira je li zadatak geometrijski ili ne, kad god je to u zadatku moguće, poželjno je nacrtati sliku. Geometrijska slika, graf ili dijagram omogućuju nam brže i lakše uočavanje povezanosti između podataka i nepoznatog, razumijevanja samog problema i njegovih dijelova.

### 2. Rješavanje unatrag.

Prvo trebamo uočiti koji je cilj zadatka, odnosno što trebamo dobiti. Krećemo od konačnog cilja zadatka prema unatrag dok ne dođemo do uvjeta koji su nam zadani. Pri vraćanju unatrag, trebamo u svakom koraku znati što bi tom koraku trebalo prethoditi. Nakon rješavanja unatrag, provjeravamo rješenje problema tako da krenemo od početka prema kraju.

### 3. Rastav na slučajeve.

Rješavanje složenog problema olakšat će nam raščlanjivanje tog problema na manje, jednostavnije probleme.

### 4. Generalizacija.

U nekim zadacima pomoći će nam rješavanje općenitijeg problema. No, nije uvijek jednostavno otkriti taj drugi, općenitiji problem. Taj dio je glavni dio ove heuristike. Rješenje općenitijeg problema primijenit ćemo na specijalni slučaj, tj. početni problem.

### 5. Rješavanje ekvivalentnog problema.

Ponekad će nam rješavanje drugog, ekvivalentnog problema pomoći u rješavanju početnog problema. Vrlo je bitno osmisliti problem koji je ekvivalentan početnom.

### 6. Analiza i sinteza.

Prvo je potrebno zadatak shvatiti kao cjelinu. Nakon toga, promatraju se glavne sastavnice zadatka, a zatim i detalji zadatka. Nakon rastavljanja zadatka na manje dijelove, proučavamo zasebno dijelove zadatka te ih spajamo u sličan zadatak koji znamo riješiti.

Rješavanje tog zadatka pomoći će nam u rješavanju početnog problema.

### 7. Specijalizacija.

U nekim je zadacima jednostavnije promatrati lakši, specijalniji zadatak od početnog zadatka. Rješavanje specijalnog zadatka olakšava nam rješavanje početnog, općenitijeg i težeg zadatka.

### 9. Metoda pokušaja i pogrešaka.

Ovo je metoda kojom se često koristimo u rješavanju matematičkih problema. Pretpostavljamo smisljeno rješenje problema te provjeravamo zadovoljava li to rješenje uvjete zadatka. Proces ponavljamo sve dok ne dobijemo ispravno rješenje.

## IV. VRSTE PROBLEMA

Prema Jonassenu (2000) problemi se mogu razlikovati u *strukturi, složenosti, specificiranosti*. Mayer i Wittrock (1996) dijele probleme na *dobro strukturirane i loše strukturirane, te rutinske i ne rutinske*. Još prije njih, Smith (1991) razlikuje probleme obzirom na utjecaj vanjskih čimbenika kao što su domena i složenost, te utjecaj unutarnjih čimbenika kao što su karakteristike rješavatelja problema.

*Dobro strukturirani problemi* su obično problemi koji se nalaze u udžbenicima, na ispitima. Njih karakterizira primjena konačnog broja pravila i

koncepta za njihovo rješavanje. To su obično problemi u kojem je potreban konačan broj logičkih operatora, problemi transformacije, gdje poznato konačno stanje, a nepoznato ciljno stanje (Greno, 1978). Te kako navodi Wood (1983), uglavnom takvi zadatci daju poznata, razumljiva rješenja.

S druge strane, *loše strukturirani problemi* su problemi koje obično nalazimo u svakodnevnoj i profesionalnoj praksi. Takvi zadatci nisu ograničeni domenom sadržaja, već su integrirani od nekoliko domena. Rješenja im nisu predvidiva, postoji više načina, putova rješavanja (Kitcher, 1983). Takvi zadatci posjeduju nepoznate elemente, odnosno one koji nisu odmah vidljivi (Wood, 1983). Kako bi riješili takve zadatke, učenici moraju dati svoj osvrt, izraziti vlastito mišljenje, uvjerenje. Mnogi istraživači, kao što su Dunkle, Schrow i Bendixen (1995), navode kako se vještine rješavanja dobro strukturiranih problema ne mogu prenijeti na loše strukturirane probleme. Međutim, praksom, loše strukturirani problemi postaju dobro strukturirani problemi (Jonassen, 2000).

Nadalje, *složenost problema* ovisi o broju pitanja, funkcija ili varijabli, te u kojem su stupnju povezanosti i vrsti odnosa među varijabli (Funkle, 1991). složenost nam govori, koliko i kako jasno su pouzdane komponente koje sačinjavaju problem. Predstavljaju li te komponente problem implicitno ili eksplicitno. Najsloženijom vrstom problema smatraju se dinamički problemi kod kojih se okolina i čimbenici mijenjaju tijekom vremena. Složeni zadatci se smatraju teškima i čak učenik koji je neiskusnik u rješavanju problema prepoznaje je li problem složen ili jednostavan.

*Specificiranost problema* odnosi se na to jesu li zadatci *apstraktni ili konkretni*.

Nadalje, Jonassen (2000) donosi 11 vrsta problema složenih redoslijedom prema složenosti i strukturi i kognitivnim procesima potrebnim za njihovo rješavanje od lakših ka težima, a to su:

- 1) logički problemi
- 2) algoritamski problemi
- 3) problemi priče
- 4) problemi korištenja pravila
- 5) problemi donošenja odluka
- 6) troubleshooting problemi
- 7) dijagnostički problemi
- 8) problemi strateških izvedbi
- 9) problemi analize slučaja

10) problemi dizajna

11) problemi dileme

### ***Logički problemi***

To su problemi koji su najbolje strukturirani od svih navedenih vrsta problema. Za njihovo rješavanje potrebna je mentalna oštrina, jasnoća i logičko zaključivanje. U tim vrstama problema postoji specifična metoda rješavanja koju učenici moraju otkriti. Ako je logički problem uključen u neki kontekst, tada je on apstraktniji i manje su prenosiva znanja, vještine, strategije za rješavanje takvih problema.

### ***Algoritamski problemi***

Takve probleme karakterizira konačan broj skupova postupaka potrebnih za njihovo rješavanje. Naravno, bez konceptualnog razumijevanja probleme je teže riješiti i razumjeti jer naglasak na proceduri i proceduralnom znanju te je takvo znanje nemoguće prenijeti na druge probleme. Obično se kod takvih problema dodavanjem konteksta može generalizirati teorija za njivo rješavanje, dakle prenosiva su znanja, vještine, strategije. Mnogi istraživači smatraju da takvi problemi zapravo i nisu problemi, jer postoji određen niz koraka za njihovo rješavanje. Međutim, i takvi zadatci mogu postati problemi, ako se od učenika zahtijeva da modeliraju algoritam te ako se fokusira na apstraktno i apstraktno razmišljanje.

### ***Problemi priče***

To su matematički problemi integrirani u priču. Za njihovo rješavanje potrebno je identificirati ključne riječi, odabrati algoritam i redoslijed izvođenja. Da bi ovakvi zadatci imali smisla, potrebno je od učenika tražiti provjeru odgovora, rješenja, postupka. Što su zadatci složeniji, rezultati rješavanja su lošiji, jer se učenici fokusiraju na pogrešan odabir riječi i primjene neprikladan algoritam (Sherill, 1983). Površna fokusiranost učenika ili pak prisjećanje zadataka kojih su riješili može dovesti do neuspješnog rješavanja problema jer nisu u potpunosti razumjeli načela i koncepte. Kako bi se to izbjeglo potrebno je imati razvijenu reprezentaciju informacija u priči (Jonassen, 2000.)

### ***Problemi korištenja pravila***

To su problemi u kojima ima više točnih postupaka, odnosno načina rješavanja. Karakteristična im je jasna svrha ili cilj koji nije ograničen na specifičnu metodu. Učenici moraju prepoznati i pronaći relevantne informacije, sistematski pretraživati strategije kako bi uspješno riješili ovaj problem. To

su npr. kartaške igre, šah. Takve igre su loše strukturirane i složeniji oblici problema.

### ***Problemi donošenja odluka***

Kako sami naziv kaže, to su problemi u kojima je potrebno odabrati jednu opciju na temelju kriterija iz skupa ponuđenih. Ova vrsta problema je lošije strukturirana od prethodne i složenija, jer je ključno analizirati vrijednosti, prepoznati problem, okupiti sve informacije o ostalim izborima te na kraju utvrđivanje najboljeg izbora prema analizi troškova i koristi. Ovdje su naglašene tzv. psihološke prepreke, odnosno osobama se teško odmaknuti od konformizma, veliki utjecaj na odluke ima i društveni pritisak kao i stres i strah od neuspjeha. Jednostavne odluke s jednim rješenjem i konačnim brojem izbora brzo će se riješiti. Međutim, ako se radi o složenijim problemima, gdje se odluke donose u više faza, promjenjivi su i potrebno je donositi odluke u stresnim situacijama, što neće možda rezultirati povoljnim ishodom.

### ***Troubleshooting problemi***

Takve probleme susrećemo svakodnevno, kao npr. problem može biti i dijagnosticiranje nekog stanja. Rješavači pretpostavljaju neku hipotezu, testiraju je i na osnovu toga upoznaju pobliže problem i bliže su rješenju. Od učenika zahtjeva poznavanje koncepata, procedure, strateško znanje. Uvelike je uvjetovano iskustvom rješavatelja. Učenik koji je dobar u takvom rješavanju problema ima veću količinu i bolju organizaciju znanja. Za njihovo rješavanje je karakteristična metoda PARI – osloni se na znanje, prepoznavaj i izvedi akciju, dobij rezultat i interpretiraj. Dok se problem rješava, učenik treba ispitivati svoje razloge, pretpostavke i postupke.

### ***Problemi strateških izvedbi***

To su problemi složenije integrirane strukture. Koristi se više strategija da se zadovolji loša struktura. Odnosno, uz veći skup strategija takvi problemi postaju projektni problemi. Ovakvi zadatci su složeni, zahtijevaju unaprijed osmišljenu strategiju i trenutnu improvizaciju. Učenik treba imati razvijenu dobru memoriju, prepoznavati uzorke, održavati pozornost.

### ***Problemi analize slučaja***

To su problemi koje opisuje loša struktura bez jasno definiranih ciljeva i ograničenja. Strategije nisu poznate, a informacije su nepotpune, netočne i dvosmislene bez formalnih procedura i smjernica. Ovakvi problemi su najviše vezani uz kontekst stoga je važno dobro analizirati situaciju. Potrebno je najprije razraditi cilj, zatim prikupiti informacije i razraditi hipoteze. Nakon toga je potrebno predvidjeti učinak određenih odluka, pratiti učinak i vlastito djelovanje.

### ***Problemi dizajna***

Probleme dizajna smatramo loše strukturiranima i kompleksnima. Karakteriziraju ih dvosmisleni ciljevi, nemaju određen način rješavanja te je za njihovo rješavanje potrebna integracija višeg znanja neke domene, proceduralno znanje, ono općenito što su učenici naučili o rješavanju problema, ali i specifično. Problemi dizajna imaju dosta stupnjeva slobode, različiti učenici mogu dati različite načine rješavanja. Što znači da nema pogrešna dizajna rješenja problema, već samo bolji ili lošiji dizajn. Rješenja boljeg dizajna mogu se bolje evaluirati. Opet se vraćamo na to da dizajn rješenja uvelike ovisi o karakteristikama učenika.

### ***Problemi dileme***

Ovakve probleme karakterizira donošenje odluka u određenom trenutku, loše su strukturirani i nema rješenja koje je prihvatljivo za većinu ljudi. Možemo ih podijeliti na društvene i etičke dileme. Na njihovo rješavanje utječe osobine rješavatelja, njegov pogled na određeni problem. Također, utječu i etički, organizacijski, vremenski aspekti nekog problema.

### ***V. SPOSOBNOSTI UČENIKA***

Sposobnosti učenika svakako utječu na rješavanje problema. Što su kod učenika razvijenije vještine i znanja te motiviranost za učenje, veća je vjerojatnost u uspješnosti rješavanja problema.

Mnogi istraživači navode kako razvijenost mentalne sheme direktno utječe na rješavanje problema. Dio mentalne sheme svakako je i mentalna agilnost, sposobnost brzog povezivanja koncepta, stvaranja novih veza, prebacivanja iz jednog aspekta u drugi kako bi se pronašao najadekvatniji način za rješenje problema. Zapravo ta mentalna agilnost je ono što najviše razlikuje intuitivne rješavatelje (Lompscher, 1975, 1985). Međutim, većina njih se slaže da se mentalna shema vezana uz rješavanje problema može poboljšati adekvatnim pristupom poučavanja, u što je uključeno poznavanje učenika od strane učenika, prilagodba problema i postupno uvođenje složenijih problema, lošije strukture uz apstraktnost. Važno je znati koje su mentalne aktivnosti, psihološki procesi koji se događaju pri rješavanju problema, koje koncepte učenik koristi, povezuje li više koncepata. Podrška od strane učitelja treba biti formirana prema tim individualnim razlikama učenika ali i s obzirom na ishode i procese koji su potrebi za rješavanje određenog problema.

Neke mentalne agilnosti kroz heuristiku:

1. Redukcija: svođenje problema na bitne iteracije – apstrakcija, prikazivanje uz pomoć grafova, tablica, crteži – strukturiranje, retrospekcija – povezivanje s prethodnim znanjem (heuristika)



2. Reverzibilnost: preusmjeriti tok misli – pogled unatrag (heuristika)

3. Aspekti: promatranje problema iz nekoliko aspekata u isto vrijeme, prepoznavanje veza, mijenjanje ovisnosti na ciljani način – raščlanjivanje, nadopunjavanje princip invarijantnosti simetrije (heuristike)

4. Promjena aspekta: promjena pretpostavki, kriterija, aspekata usmjerenih na rješavanje problema – intuitivno razmišljanje, pogled iz druge perspektive (heuristika)

5. Prijenos: primijeniti dobro poznate procedure na drugi problem, ali i problem s različitim konceptom, lako prepoznavanje pravilnosti – analogija (heuristika)

Učenici koji imaju matematičke sposobnosti, bez da su ih svjesni, teško mogu opisati kako su došli do rješavanja problema. Međutim, ako nedostaje mentalne agilnosti, ona se može razviti prikladnim heuristikama što dovodi do aktivnog učenja rješavanja problema (Collet, 2009).

Pomoć u rješavanju problema svakako daje i korištenje digitalne tehnologije. Ostaje istražiti koje načine rasuđivanja, odnosno zaključivanja koriste učenici pri rješavanju problema uz pomoć digitalne tehnologije.

Također, procesi poput asocijacije, analogije, generalizacije, kontradikcije su potrebni za formuliranje problema, a time i postavljanje problema. Za postavljanje problema potrebni su kognitivni procesi koji su formirani u mentalne mape za rješavanje problema.

## VI. ULOGA UČITELJA

U svojoj knjizi *How to solve it*, Polya navodi i daje instrukcije kako se treba ponašati u učionici i na koje sve situacije može učitelj naići kako bi što bolje pružio podršku rješavanju problema.

Pomoći učeniku je ono što je uistinu potrebno, ali je to isto tako i teško. Naučiti kako pomoći učeniku iziskuje vremena, dosta prakse, predanosti i pozitivan stav o problemima i poučavanju problema. Važno je naučiti kako prevagnuti tijekom pomaganja učenicima, jer oni trebaju samostalno raditi kako bi rješavanje problema imalo svrhu, odnosno da učenici nešto nauče. Isto tako, ne smije se učenike prepustiti samima sebi kako se ne bi izgubili u problemu.

Učitelj treba razumjeti što se događa u umu učenika, a za to je potrebno poznavati učenika, njegove sposobnosti. Ako učitelj vidi da je učenik zastao u određenom dijelu rješavanja problema, treba ga potaknuti potpitanjima koja bi učenika potaknuli da dođe do napretka.

Kako bi učenik razvio mentalnu shemu potrebnu za rješavanje problema, pitanja koja se postavljaju trebaju biti ista. Iste korake treba navoditi više puta, kako bi ih učenik ustalio u svome u umu i prilikom svakog sljedećeg rješavanja problema postupio na isti način.

Pitanja koje se postavljaju trebaju biti općenita. Ta pitanja smo naveli u prvoj fazi rješavanja problema. Međutim, ovakav pristup ima ograničenje, jer su takva pitanja za probleme kojima treba pronaći rezultat, ali ne i dokazne probleme.

Polya navodi kako pitanja trebaju biti povezana sa zdravim razumom, misleći na učenikovo prethodno iskustvo, na to kako je se učenik sigurno nekad u prošlosti sreo sa sličnim problemom, nepoznanicom, metodom rješavanja. Učitelj je dužan pomoći učenicima pri rješavanju problema, ali i osposobiti ih za samostalno rješavanje problema u budućnosti.

Potrebno postavljati pitanja i sugestije dovoljno često. Učenik na taj način može izazvati ideju što je zapravo simulacija. Da bi ta pitanja imala učinak trebaju biti postavljena prirodno (učenici moraju prihvatiti kao nešto što rade prilikom rješavanja problema) i snažno (moraju ostvariti cilj – rješenje problema).

Ono što Polya navodi kao važno je da bi učenik naučio samostalni rješavati probleme, steći vještine rješavanja problema, mora gledati i asimilirati ono što učitelj i drugi učenici čine prilikom rješavanja problema. Kada učitelj sam rješava probleme treba, kako Polya kaže, dramatično postavljati sebi pitanja i davati sugestije kako bi učenici ih prihvatili kao prirodno.

Učitelj se može naći u raznim situacijama prilikom učenikova rješavanja problema, učenik može odmah dobiti dobru ideju i provesti je pravilno do kraja. Međutim, neki učenik može izostaviti neku od četiri faze rješavanja problema i time ne dobije dobru ideju, još gore je da se učenik upušta u rješavanje problema bez potpunog razumijevanja problema. Zbog toga je ključno prolaziti kroz problem iznova i iznova, mijenjati pogled na problem, mijenjati pogled na svaki korak i provjeriti svaki korak pa će se izbjeći i pogreške.

Kada učitelj kreće u rješavanje problema s učenicima, treba pažljivo odabrati problem, ne pretežak ni prelagan. Učenik mora uživati u rješavanju problema, željeti riješiti taj problem. Problemi trebaju biti prirodni i zanimljivi. Da bi se učitelj uvjerio je li učenik razumio problem, zamoli učenika da ponovi problem. Nakon što se učitelj uvjeri u to, treba naučiti učenika da razumije svaki dio problema, ako je potrebno da nacrtaj sliku, da obavezno koristi prikladnu notaciju, da promisli je li moguće zadovoljiti uvjet.



Učitelj treba pronaći način kako da olakša učeniku ako je to potrebno, možda povezati problem sa konkretnim koji je blizak učeniku. Upravo zbog toga kako je najteži dio u rješavanju problema zapravo dobiti ideju. Nije nužno odmah dobiti dobru ideju, jer iz bilo kakve ideje učenik može nešto naučiti te promišljajući promijeniti dio ideje i samim time je poboljšati. Ponekad učenik dobije ideju nakon niza neuspjelih pokušaja, što se karakterizira kao „flash“. Učitelj se tijekom poučavanja rješavanja problema nose sa raznim teškoćama o kojima moraju promišljati, npr. kako postići da učenik s malo znanja ili nikako znanja povezati problem s prije riješenim problemom ili teoremom.

*Možeš li povezati problem s prethodno riješenim?*

*Promotri nepoznanicu, jer ona određuje koji je problem sličan zadanom!*

Nakon niza ideja i neuspjelih pokušaja, Polya navodi da učenicima treba predložiti transformaciju problema, pa zatim pronaći sličan koji je riješen.

Prilikom izvođenja plana rješavanja problema potrebno je imati dobro znanje i mentalnu naviku. To je ono što smo prethodno spominjali, učestalo ponavljanje određenih općenitih pitanja i učestalo rješavanje problema. Da bi se izbjeglo zaboravljanje plana ili eventualne pogreške, nužno je poticati učenike da postavljaju i traže odgovore na sljedeća pitanja.

*Možeš li vidjeti da je svaki korak točan?*

*Možeš li dokazati da je svaki korak točan?*

U zadnjoj fazi rješavanja problema potrebno je provjeriti ima li rezultat smisla (povezati probleme međusobno ili problem s nematematičkim pojavama), provjeriti argument. Navesti učenika da promisli o drugoj metodi rješavanja. Analizirati zajedno s učenikom relevantne podatke problema, varijacije podataka, simetrije, analogije. Na taj način će učenik sigurno imati uspjeh u rješavanju problema – steći će znanje, povezati znanje te stvoriti mentalnu shemu za rješavanje problema.

Prilikom predstavljanja problema učenicima, učitelj treba dobro promisliti što tim problemom želi postići kod učenika. Odnosno, tim zadatkom treba pokrenuti aktivnosti kod učenika koje dovode do stvaranja povoljnog okružja za učenje rješavanja problema u kojem se potiče izgradnja matematičkog koncepta i kompetencija za rješavanje problema.

Nadalje, jako je važno stvoriti društveno okružje koje potiče rješavanje problema, promiče i vrednuje uz modeliranje poticajnih aktivnosti (Lesh i Zawojewski, 2007; English i Gainsburg; 2016).

Tu dolazimo do uloge korištenja digitalne tehnologije pri rješavanju problema. Korištenje digitalne tehnologije podržava adekvatno okružje za učenje u kojem učenici pomoću raznih alata istražuju, međusobno komuniciraju, različito prikazuju problem, pohranjuju informacije, formiraju interaktivno okružje za učenje između učenika, ali i učenika i učitelja (Leung i Bolite-Frant 2015).

#### ZAKLJUČAK

Iz prethodnog da se zaključiti da različiti ishodi problema zahtijevaju različite uvjete za rješavanje. Potrebno je analizirati i dizajnirati procese te konstruirati problemski prostor koje zahtjeva bogatiju radnu memoriju što je dio kognitivne komponente za rješavanje problema. Potrebno je poučavati učenike kako regulirati svoje znanje i postupke pri rješavanju problema, raditi na višestrukim reprezentacijama. Učitelj treba biti upoznat i sa individualnim razlikama učenika, pri tome mislimo, na vještine, stavove, mentalnu agilnost, sposobnost metakognicije te probleme artikulirati prema kognitivnim, afektivnim i konativnim procesima koji su potrebni za njihovo rješavanje.

Na taj način bi se došlo do određene teorije s uputama i implikacijama za rješavanje problema.

Teorija Georga Polye, temelji se na heuristikama vezanih uz prethodna iskustava, pomoćne probleme, analogije – eksplicitno zaključivanje. Nužno je i implicitno zaključivanje – pogled unatrag, učvršćivanje veza i dubina znanja o problemu. Učenik tijekom cijelog procesa rješavanja problema treba razmišljati o postupcima, procedurama, vezama, ispravnosti (Schoenfeld, 1982). Dobar rješavač problema treba stvoriti generalne heuristike neovisne o kontekstu problem. Uz to je ustrajan, pokušava na razne načine, iskušava postupke, povezuje činjenice. Iako neće uvijek imati prethodno znanje za svaki problem, pomoću kreativnosti rješava takav problem (Schoenfeld, 1985, 1992).

U svemu tome ključna je i matematička komunikacija, rasprava o problemu, međusobna suradnja učenika. Rasprava mora imati svoju dubinu i tu dolazimo do razvoja hijerarhijskih i vertikalnih diskursa teorije za rješavanje problema (Lester i Kehle, 2003).

Korištenje digitalne tehnologije na zadacima u kojima rasprava potiče matematičku komunikaciju doprinosi razvoju učenikovih sposobnosti za rješavanje problema.

Učenici postavljanjem problema postaju bolji u rješavanju problema, odnosno, preoblikovanjem neke situacije u drugu, dolazi do izražaja učenikova kreativnost i postavi se novi problem.

## LITERATURA

1. Blum, Werner i Niss, Mogens (1991), »Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction« *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.
2. Bruder, R. (2005). Ein aufgabenbasiertes anwendungsorientiertes Konzept für einen nachhaltigen Mathematikunterricht—am Beispiel des Themas “Mittelwerte”. In G. Kaiser & H. W. Henn (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation* (pp. 241–250). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
3. Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: CornelsenVerlag Scriptor
4. Cindrić, Maja. (2014), »Problemska nastava i dječje strategije u nižim razredima osnovne škole« *Poučak* 65, 52-57
5. Collet, C. (2009). Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation fördern. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. In G. Krummheuer, & A. Heinze (Eds.), *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, Band 2, Münster: Waxmann.
6. Csíkszentmihályi, M. (1996). *Creativity: Flow and the psychology of discovery and invention*. New York: Harper Perennial
7. Dunkle, M.E., Schraw, G., & Bendixen, L.D. (1995, April). *Cognitive processes in well-defined and illdefinedproblemsolving*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.
8. English, L. D. & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st- Century mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313–335). NY: Routledge.
9. Funke, J. (1991). Solving complex problems: Exploration and control of complex systems. In R.J. Stemberg & P.A. Frensch (eds.), *Complexproblem solving: Principles and mechanisms* (pp. 185-222). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
10. Gagne, Robert Mills (1980). »The conditions of learning« New York: Holt, Rinehart, & Winston
11. Gagne, R.M., Briggs, L.J., & Wager, W.W. (1992). *Principles of instructional design* (4th Ed.). New York: Harcourt, Brace, & Jovanovich
12. Goos, Merrilyn; Galbraith, Peter i Renshaw, Peter (2000), »A money problem: A source of insight into problem solving action« *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 80, 1–21.
13. Greeno, J. (1978). Natures of problem-solving abilities. In W. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitive processes* (pp. 239-270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
14. Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York, NY: Dover Publications.
15. Jonassen, David H. (2000), »Toward a design theory of problem solving« *Educational Technology Research and Development*, 48 (4), pp. 63-85. <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0034551957&doi=10.1007%2fBF02300500&partnerID=40&md5=082be2> DOI: 10.1007/BF02300500
16. Khoshaim, Heba Bakr (2020), »Mathematics Teaching Using Word-Problems: Is it a Phobia! « *International Journal of Instruction*, 13(1), 855-868. DOI: <https://doi.org/10.29333/iji.2020.13155a>
17. Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1–15). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
18. Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Erlbaum
19. Kitchner, K.S. (1983). Cognition, metacognition, and epistemic cognition: A three-level model of cognitive processing. *Human Development*, 26, 222-232
20. Lerman, S. (2010). Theories of Mathematics Education: Is Plurality a Problem?. In: Sriraman, B., English, L. (eds) *Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_11)
21. Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). National Council of Teachers of Mathematics, Charlotte, NC: Information Age Publishing
22. Lester, F., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501–518). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
23. Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematical tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191–225). New York: Springer
24. Liljedahl, Peter; Santos-Trigo, Manuel; Malaspina, Uldarico i Bruder, Regina (2016), »Problem Solving in Mathematics Education« *Problem Solving in Mathematics Education ICME-13* Springer, Cham. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1)
25. Lompscher, J. (1975). Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung

geistiger Fähigkeiten. Berlin: Volk und Wissen. 2. Auflage.

26. Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schulkindes. In L. Irrlitz, W. Jantos, E. Köster, H. Kühn, J. Lompscher, G. Matthes, & G. Witzlack (Eds.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit*. Berlin: Volk und Wissen
27. Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Harlow: Pearson Prentice Hall
28. Mayer, R.E., & Wittrock, M.C. (1996) Problem-solving transfer. In D.C. Berliner & R.C. Cañfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 47-62). New York: Macmillan.
29. Nunokawa, Kazuhiko (2005), »Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain« *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 325–340.
30. Perkins, D. (2000). *Archimedes' bathtub: The art of breakthrough thinking*. New York, NY: W.W. Norton and Company.
31. Poincaré, H. (1952). *Science and method*. New York, NY: Dover Publications Inc.
32. Polya, George (1945), »How to solve it; a new aspect of mathematical method.« *Princeton University Press*
33. Pólya, G. (1949). *How to solve It*. Princeton NJ: Princeton University
34. Pólya, George (1981). »Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving« New York: Wiley.
35. Sherrill, J.M. (1983). Solving textbook mathematical problems. *Alberta Journal of Educational Research*, 29, 140-152.
36. Schoenfeld, Alan H. (1979), »Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance« *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 173–187.
37. Schoenfeld, A. H. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research* (pp. 27–37). Philadelphia: Franklin Institute Press
38. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press Inc.
39. Schoenfeld, Alan H. (1992), *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics* In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334– 370). New York: MacMillan
40. Seel, Norbert M. (2012), »Problems: definition, types and evidence« Seel, NM (ur.) *Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Boston: Springer r, DOI: [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6\\_914](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_914)
41. Sewerin, Horst (1979), *Mathematische Schülerwettbewerbe: Beschreibungen, Analysen, Aufgaben, Trainingsmethoden mit Ergebnissen. Umfrage zum Bundeswettbewerb Mathematik*. München: Manz
42. Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 9–26.
43. Smith, M.U. (1991). A view from biology. In M.U. Smith (ed.), *Towards untied theory of problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associa
44. Smith, P.L., & Ragan, T.J. (1999). *Instructional design* 2nd ed. Columbus, OH: Merrill.
45. Stojaković, Olgica (2005), »Problemska nastava« Stručni rad „Obrazovna tehnologija” 3-4/2005. UDK: 371.3 Dostupno na: [http://www.edu-soft.rs/cms/mestoZaUploadFajlove/14\\_OT\\_3-4\\_2005\\_OLGICA\\_STOJAKOVIC.pdf](http://www.edu-soft.rs/cms/mestoZaUploadFajlove/14_OT_3-4_2005_OLGICA_STOJAKOVIC.pdf)
46. van Merriënboer, J.J.G. (1997). *Training complex cognitive skills*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications
47. Wood, P.K. (1983). Inquiring systems and problem structures: Implications for cognitive development. *Human Development*, 26, 249-265.
48. Xenofontos, Constantinos i Andrews, Paul (2014), »Defining mathematical problems and problem solving: Prospective primary teachers' beliefs in Cyprus and England« *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), pp 279-299