

Utjecaj vizualizacije i geometrijskog rezoniranja u poučavanju geometrijskih koncepata

Maja Čuletić Čondrić^{1, 2}

¹ Sveučilište u Slavonskom Brodu, Tehnički odjel, Slavonski Brod, Hrvatska

² Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, Split, Hrvatska

Poslijediplomski sveučilišni studij,

“Istraživanje u edukaciji u području prirodnih i tehničkih znanosti” – usmjerenje Matematika

mccondric@unisb.hr, mcondri@pmfst.hr

Sažetak

Mnogobrojna znanstvena istraživanja pokazuju da je geometrija unutar matematičkog obrazovanja prirodan okvir za razvoj prostornog zora. Njezin je cilj osposobljavanje učenika za korištenje geometrijskih pojmova, koncepata i postupaka za rješavanje konkretnih prostorno-geometrijskih problema. Prostorna vizualizacija je sposobnost misaonog predočavanja odnosno prikazivanja trodimenzionalnog objekta na dvodimenzionalnoj ravnini. Kvalitetan razvoj geometrijskih koncepata kod učenika ne uključuje samo imenovanje geometrijskih oblika, crtanje i računanje površina i opsega koristeći formule, već ona uključuje puno više, kreativnost, darovitost, i sl. Usprkos određenom prirodnom razvoju poimanja prostora i geometrijskih koncepata, potrebno je namjerno i osmišljeno poučavanje istoga kako bi učenici napredovali kroz nekoliko nivoa jer je to obveza i odgovornost učitelja u nastavi matematike. Zaključivanje u matematici, a posebno u geometriji zahtjeva veću razinu razumijevanja i povezivanja s prethodnim naučenim konceptima. To su pokazali i rezultati međunarodnih istraživanja koje se provode u Hrvatskoj već nekoliko godina kao što su TIMSS i PISA.

Ključne riječi – geometrija, vizualizacija, geometrijski koncepti, zaključivanje i razumijevanje

I. UVOD

Nastava matematike na svim razinama obrazovanja zahtjeva od učenika i studenata razumijevanje ideja i koncepata, ostvarivanje ishoda učenja iz određenih tema obrazovanja, a sve u svrhu ostvarivanja cilja tj. povezivanja prethodno naučenog i usvojenog sadržaja s trenutnim ali i povezanost s primjerima iz prakse.

Kroz povijest, mnogi su matematičari ali i osobe u tehničkim znanostima pokušavali svoje ideje, bile one teorijske ili algebarske, predložiti i lakše objasniti pomoću slika, geometrijskim dokazivanjem i zaključivanjem. Poznati

grčki matematičari i filozofi kao što su: Tales (624. pr. Kr. – 547. pr. Kr.), Platon (428. pr. Kr. – 348. pr. Kr.), Aristotel (384. pr. Kr. – 322. pr. Kr.), Euklid (330. pr. Kr. – 275. pr. Kr.) i mnogi drugi, geometriju su doživljavali i proučavali kao posebno savršenstvo i znanost samu za sebe. I danas, nakon mnogo napisanih znanstvenih, stručnih, diplomskih radova, raznih kvantitativnih i kvalitativnih istraživanja, geometrija ostavlja prostora za daljnja istraživanja geometrijskog mišljenja i zaključivanja.

Često se pitamo, čemu služe matematički dokazi i zašto je potrebno nešto dokazivati ako je poznato da to vrijedi. Odgovor na to pitanje dao je Andrew Gleason i kaže: *cilj dokaza nije da nas uvjeri da je nešto istinito već da nam pokaže zašto je istinito*. A kada si u učionici među učenicima ili studentima, bilo to osnovna škola, srednja škola ili fakultet, vidljive su poteškoće i nerazumijevanje u povezivanju i prijelazu s konkretnog na apstraktno, ali i obrnuto. Zato u tom trenutku treba iskoristiti razne metode poučavanja i modele dinamičke geometrije, npr. poslužiti se vizualnim prikazima, crtežima, mapama, modelima i sl. Jer je i američki matematičar i pisac Martin Gardner (1914. – 2010.) rekao: *suhoparan dokaz može biti toliko jednostavan i predivno biti dopunjen geometrijskim analogonom da je dokaz teorema gotovo vidljiv na prvi pogled*.

Kasnih 50-tih godina 20. st., točnije 1959. godine, nizozemski matematičari, supružnici, Dieke van Hiele-Geldof i Pierra van Hiele, na Sveučilištu u Utrechtu u Nizozemskoj, pišu svoje doktorske disertacije i objavljuju poznatu van Hieleovu teoriju geometrijskog mišljenja. Svoju teoriju geometrijskog mišljenja iznose na temelju vlastitog iskustva u nastavi i istraživanja. Pierra van Hiele pokušava otkriti razlog lošeg uspjeha učenika pri učenju geometrijskih sadržaja, a Dieke van Hiele-Geldof pokušava otkriti konkretne nastavne metode kako bi učenicima omogućila bolji uspjeh u učenju i shvaćanju geometrije. Svoju teoriju objašnjavaju preko nivoa ili razina mišljenja kroz koje se prolazi pri učenju geometrije. Na osnovu svoje teorije, detaljnog istraživanja i studije revidirali su nastavni plan i program geometrije, što je krajem 20. st. u Sjedinjenim Američkim Državama dovelo do

napretka u poboljšanju učenja i poučavanja geometrije također (Musser, 2007.).

Istraživanja pokazuju kako je razina znanja učenika uvjetovana razinom znanja njihovih učitelja u nižim razredima (Uygun, Güner, 2021.) odnosno učitelja matematike u višim razredima (Clements, 2003.; Jupri, 2018). Za učinkovito razvijanje prostornog zora i geometrijskog mišljenja učenika, učitelj bi trebao imati dovoljno znanja iz geometrije kao i pedagoške vještine kako bi mogao razvijati vještine i sposobnosti kod učenika. Prema istraživanju (Pavlin-Bernardić i sur., 2010.; Kuzniak, Rauscher 2011.) važno je znati stavove i uvjerenja učitelja, nastavnika ali i studenata koji se tek pripremaju za ta zanimanja, jer su baš oni ti koji poučavaju djecu matematici i modeliraju učenikove stavove i uvjerenja također, kako o matematici tako i o geometriji. Pokazuje se kako studenti učiteljskog studija iskazuju negativnije stavove prema matematici od ostalih ispitanih skupina te također smatraju da su matematičke sposobnosti urođene (Dujčić, 2017.).

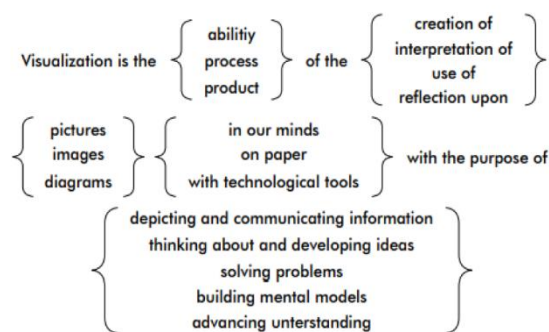
Danas u klupama sjede mladi iz tzv. Z-generacije (rođeni između 1996. i 2010.) i Alpha-generacije (rođeni nakon 2011.) kojima je ova napredna tehnologija sastavni dio svakodnevnog života, tehnologija koja koristi vizualizaciju je prirodno integrirana u njihov život.

II. VIZUALIZACIJA

Ne postoji zajednički, jedinstveni koncept i definicija vizualizacije za svaki pojedini predmet ili područje istraživanja. Prikazane su različite vizualizacije i stvaranje mentalnih slika, jer je to važan alat koji pomaže u razumijevanju kako matematičkih ideja, tako i geometrijskih koncepata i dokaza.

Prema Schroeder i sur. (1997.) vizualizacija je dio svakodnevice, od meteoroloških karata do uzbudljive računalne grafike. Također navode da je vizualizacija pretvaranje podataka ili informacija u slike, gdje uključuje primarni ljudski senzorni aparat, vid kao i moć obrade ljudskog uma. Dijelev vizualizaciju na znanstvenu i vizualizaciju podataka, gdje znanstvenu vežu za računalnu znanost i sučelja, a vizualizaciju podataka za konkretni prikaz i obradu.

Za znanstveno – nastavne potrebe formira se pragmatična definicija koja pod vizualizacijom podrazumijeva ono što se koristi kao vizualizacija u subjektu (receptijski pogled) ili je razvijena kao vizualizacija za subjekt (produkcijski pogled). (Gretsch, Holzäpfel, 2016.). Također, oni u svojoj knjizi *Lernen mit Visualisierungen*, to pokazuju slikom 1.



Slika 1. Definicija vizualizacije (Gretsch, Holzäpfel, 2016.)

Mogu se razlikovati različite didaktičke funkcije vizualizacije u predavačkoj nastavi. No, Müller, (2023.) navodi da se svaka ta vizualizacija treba temeljiti na provjeri njezine funkcije za nastavu:

- i) prezentacija – vizualizacije služe za ilustraciju nastavnog materijala i dopunu tekstualnih informacija
- ii) organizacija – vizualizacije s funkcijom organiziranja ilustriraju npr. strukturne odnose ili kronološke sekvence
- iii) interpretacija – interpretativne vizualizacije imaju za cilj pojednostaviti apstraktne informacije njihovim kontekstualiziranjem ili djelovanjem kao "unaprijed organizator"
- iv) transformacija – vizualizacije s funkcijom transformacije imaju za cilj povećati pamćenje i služe kao pomoć pri pamćenju, u smislu "vizualne mnemotehnike"
- v) dekoracija – dekorativne vizualizacije imaju za cilj učiniti gradivo za učenje zanimljivim i motivirati učenike

A. Vizualizacija i kreativnost u nastavi

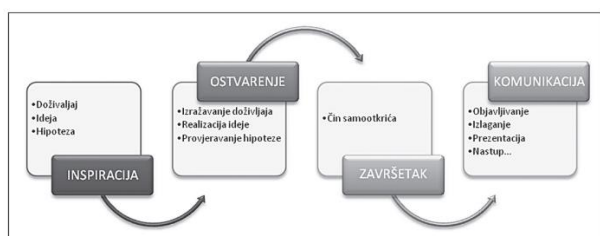
Engleski pedagog, Ken Robinson 2011., u izlaganju o kreativnosti kaže: „Vjerujem da je kreativnost u odgoju i obrazovanju jednako važna kao i pismenost i trebamo se jednako prema njoj odnositi. Čvrsto vjerujem da odrastanjem ne postajemo kreativniji već sve manje kreativni. Obrazujemo se da ne budemo kreativni.“

Američki psiholog, Ellis Paul Torrance, poznat po značajnim istraživanjima u području kreativnosti, na temelju brojnih eksperimenata sedamdesetih godina 20. st., daje pet principa kojima se potiče kreativno ponašanje kod učenika (Torrance, 1974.):

- neobična pitanja učenika treba uvažavati
- neobične i maštovite ideje učenika treba uvažavati
- učitelj treba pokazati da učenikove ideje imaju vrijednost
- učitelj treba odvojiti vrijeme kada nema ocjenjivanja
- učitelj treba povezati evaluaciju uzrok i posljedica

Nastavno na ove Torranceove principe, danas postoji čitav niz metodičkih postupaka kao što su umne mape, oluja ideja, kartice slučajnih pojmova i mnoge druge, kojima trebaju ovladati učitelji, pogotovo studenti učiteljskih smjerova, kako bi mogli u praksi poticati i razvijati kreativnost kod učenika.

Kreativnim procesom se smatra neki određeni tijek kreativnih misli, ideja i djelovanja, te završni rezultat je kreativno djelo ili produkt. Kreativni proces prema Bognaru (2012.) se sastoji iz nekoliko faza, a najčešća podjela ide na četiri faze, a to su: inspiracija, ostvarivanje, završetak i komunikacija (slika 2.). Navedene faze ne moraju ići po redu, nego se može preskakati ili vraćati u nazad. No, obično se kreće od prve faze gdje se prikupljaju ideje i postavljaju hipoteze, preko druge faze gdje se vrši provjera navedenoga, dolazi se do treće faze gdje se određene ideje potvrđuju i odbacuju, kako bi se u posljednjoj četvrtoj fazi verificirale i testirale ideje i/ili gotovi proizvod.



Slika 2. Kreativni proces (Bognar, 2012.)

Kreativna vizualizacija, odnosno sposobnost stvaranja mentalnih slika, jedan je od važnih alata koji pomažu razumijevanju matematičkih ideja, koncepata i sl.

Prema reformi MZOO 2019., učitelji i učenici su dobili veliku slobodu u povezivanju svih sadržaja s svim nastavnim predmetima. Tu zasigurno ima prostora da se nastava matematike okrene i prilagodi učeniku, ali to od učitelja zahtjeva velike i drugačije pripreme za nastavu, odabiranje najpovoljnijih metoda i oblika rada, prilagođavanje zadataka u smjeru poticanja i razvijanja kreativnosti.

Prikazujući učenicima matematičke sadržaje na kreativan način te kao takve učeći i primjenjujući na konkretnim problemskim zadacima, učenici dobivaju drugu dimenziju matematike kao vrijednosti koja im je potrebna za život i društvo. Bez obzira što su neki zadaci ili primjeri već riješeni, ili su ih učenici već prethodno negdje koristili, treba ponavljati jer u nekoj drugoj situaciji se riješi možda na drugačiji način, ili se pokaže neka druga ideja, a to upravo i očituje kreativnost učenika u nastavi matematike (Kadum, 2011.).

B. Prostorni zor

Prostorni zor, (eng. *spatial ability, spatial sense*), podrazumijeva intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas.

U istraživačkom kontekstu razlikuju se pojmovi kao prostorne sposobnosti (eng. *spatial abilities*) i prostorne vještine (eng. *spatial skills*). Iako se često koriste i s jednakim značenjima, ti se pojmovi zapravo odnose na urođene sposobnosti (prostorne sposobnosti), za razliku od naučenih vještina (prostorne vještine). Kod odraslih ljudi praktički ih je nemoguće razlikovati. Najčešće se istražuju sposobnosti prostorne vizualizacije, među koje se ubrajaju sposobnosti misaone rotacije i misaone transformacije, te sposobnosti prepoznavanja prostornih odnosa. (Dečman, Halavuk, Milin Šipuš, 2013)

Pod pojmom prostorni zor podrazumijeva se osjećaj i percepcija shvaćanja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata u svakodnevnom životu, povezivanje tradicionalne geometrije s vizualizacijom i misaonim transformacijama. (Čizmešija i sur., 2010.)

Važnost prostornog zora također ističe Radović i sur. (2012.) kojeg se definira kao sposobnost vizualizacije prostora tj. pamćenja oblika, veličine geometrijskih figura, kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnos.

Određene studije (npr. Jones i Tzekaki, 2016.; Pavlovičová i sur., 2022.) ukazuju da je nivo geometrijskog mišljenja i prostornog zora učenika u opadajućem trendu. To može biti posljedica samog programa (kurikuluma) geometrije te nedovoljne spremnosti i spretnosti učitelja i nastavnika matematike u poučavanju učenika geometriji. (Pjanić, 2023.)

Prema Mladinić, Radović, (2021.) postoji 5 elemenata od kojih se sastoji prostorni zor, a to su: prostorna percepcija, vizualizacija, mentalna rotacija, psihologijski test i prostorna orijentacija. Posljednjih godina, razvojem STEM područja uočena je naglašena veza sa prostornim zorom, posebice sa mentalnom rotacijom. Pokazalo se da uspjeh ili neuspjeh u STEM području je povezan sa sposobnošću mentalne rotacije.

U svijetu se često provode testiranja prostornog zora, osobito studentske STEM populacije (Sorby, 2005., 2009.). Pokazuje se da je razvijeni prostorni zor, pored znanja matematike, dobar prediktor uspješnosti na tim studijima, osobito na inženjerskim. Pritom se često koriste standardizirani svjetski testovi kao što su Test misaonih rotacija, Test misaonog presijecanja i sl.

Također, Metz, Donohue, Moore, (2012.) u svojem istraživanju potvrđuju da se na razvoj prostornog zora može utjecati. Počevši od rane životne dobi, pokazuje se da neke aktivnosti, kao što je slaganje LEGO kockica, ručni rad, sviranje glazbenih instrumenata, bavljenje nekim sportovima, te u novije vrijeme i igranje računalnih 3D-igrica, pridonose razvoju prostornog zora. Dok Linn i Petersen (1985.) u meta analizi utvrđuju kako ženska populacija ima prosječno slabije razvijeni prostorni zor, posebno u području misaonih rotacija. Pokazuje se da žene rješavanju prostornih problema radije pristupaju analitički nego holistički, a takav pristup zahtijeva više vremena, što je također važan faktor koji pridonosi slabijem prosječnom uspjehu ženske populacije.

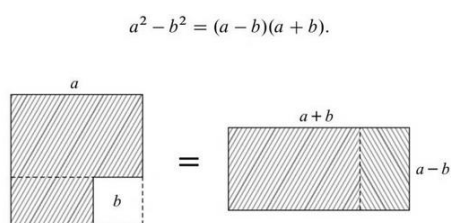
Njemački matematičar, Hans Freudenthal, je rekao: „Geometrija je opipljiv prostor; to je onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se. To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istražiti i osvojiti, kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se“.

C. Vizualizacija u nastavi matematike

Vizualizacija je moćan alat u nastavi matematike (Alsina, Roger, 2006., Radošević Medvidović, Štefan Trubić, 2023.) koja ima sposobnost transformirati apstraktne koncepte u konkretna iskustva.

Kroz pažljivo osmišljenu vizualnu pripremu, učeniku će konkretni koncept postati privlačniji, intrigantniji, potaknut će njegovu kreativnost, istraživanje i razvoj kritičkog razmišljanja i zaključivanja.

U knjizi *Math made visual* (Alsina, Roger, 2006.) postavlja se pitanje: Je li moguće napraviti matematičke crteže koji pomažu razumijevanju matematičkih ideja, dokaza i argumenata? I autori su uvjereni i odgovaraju potvrdno na ovo pitanje te pokazuju kako se neke tehnike vizualizacije mogu koristiti za stvaranje slika koje imaju i matematički ali i pedagoški značaj. Samo jedan od primjera pokazuje se slikom 3.



Slika 3. Vizualni prikaz algebarskog izraza (Alsina, Nelsen, 2006.)

Vizualizaciju u matematici treba razvijati jer potiče maštu i kreativnost, ali uvijek treba biti popraćeno adekvatnim objašnjenjem i povezivanjem koncepta. Vizualizacija je kao

pozivnica i njome pozivamo na daljnja razmišljanja i zaključivanja.

D. Vizualizacija i druga znanstvena područja

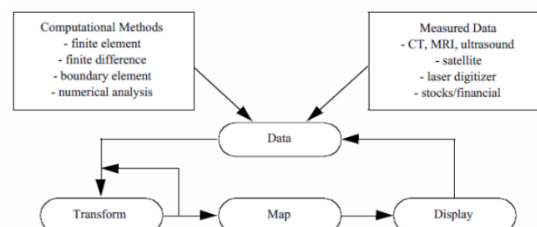
a) Vizualizacija i književnost

Čitanje je vrlo važna ljudska vještina od razvoja pisanog pisma i ona je složen proces koji obuhvaća dekodiranje i razumijevanje teksta koji se čita. Müller (2023.) tvrdi da vizualizaciju treba koristiti kao tehniku za promicanje čitalačke socijalizacije i čitalačku pismenosti. Koncept čitateljske pismenosti, kao i druge kompetencije, može se promatrati kao apstraktan oblik.

Prema istraživanju (Müller, 2023.) pokazano je da se uz pomoć tehnike vizualizacije u didaktici književnosti mogu poboljšati i povećati čitateljske navike na stranom jeziku kod studenata koji studiraju strani jezik L2 (drugi strani jezik).

b) Vizualizacija i statistika

Pojam „vizualizacija podataka“ je još jedan izraz koji se koristi za opisivanje vizualizacije (Schroeder i sur., 1997). Vizualizacija podataka (slika 4.) tumači se kao općenitiji dio od znanstvene vizualizacije, budući da podrazumijeva obradu izvora podataka izvan znanosti i tehnike.



Slika 4. Vizualizacija prikupljanja podataka (Schroeder i sur., 2018.).

Vizualizacija podataka je interdisciplinarna kategorija, koja dotiče različita područja i znanja iz statistike, programiranja, dizajna i sl. Za valjanost svake vizualizacije od iznimne je važnosti točnost i ispravnost prikupljenih podataka ali i grafički elementi, boje i kompozicije. (Čorluka, 2012.). Prikaz i obrada podataka pomoću grafikona, mapa, dijagrama i sl. se ubraja u dio deskriptivne statistike i kao takva daje određenu težinu pri svakom istraživanju.

Uvođenje novih IT rješenja zahtijeva da informatika zna kompletne tokove poslova i podataka u zdravstvenoj ustanovi (Škarecki i sur., 2019.), a vizualizacija podataka je nezaobilazan način kako iz ogromne količine podataka dobiti informaciju za donošenje budućih odluka.

c) Vizualizacija i zdravlje

Prema Koić i sur. (2020.) vizualizacija je tehnika relaksacije koja koristi metodu stvaranja vizualnih mentalnih slika koje se namjerno izazivaju da bi dovele do pozitivnog emocionalnog odgovora, a koji će dovesti do opuštanja uma i tijela. Zahtijeva specifičnu budnost sličnu stanju sanjarenja, drukčija je od spavanja ili sanjanja. Njome se usmjeravaju misli u određenome smjeru s namjerom postizanja nekog osjećaja ili drugog rezultata, na primjer ostvarivanja nekog cilja u sportu, javnom nastupu, pristupu ispitu, a koji inače izaziva povišenu anksioznost. Pojam vizualizacije, imaginacije, zamišljanja, maštanja, opisuje formiranje mentalne, unutrašnje slike nekog prizora, predmeta, događanja. Mašta je termin kojim se opisuje proces formiranja novih slika u umu koji do tada nisu bili viđeni ili doživljeni, kao i kombinacija ishoda nekih situacija.

Koić i sur. (2020.) u svojem priručniku pišu i predlažu i vježbe vizualizacije koje je dobro provoditi nakon početnih vježbi disanja ili progresivne mišićne relaksacije. Također navode da se um koncentrira dok se tijelo opušta. Kreativna vizualizacija potiče pozitivnu energiju, proširuje kreativnost, ublažuje anksioznost i napetost.

Sorrbello i sur. (2016.) povezuje vizualizaciju s dišnim putovima, te u svojem istraživanju navodi izraz „Oči vide ono što mozak zna“, što je zasigurno jako važno u matematičkom pogledu i povezivanju geometrijskih koncepata.

Škarecki i sur. (2019.) daju primjer osobne vizualizacije i vizualizacije 3D objekata - interaktivni anatomske građe, ljudski genom, ljudski kromosom, itd.

III. GEOMETRIJSKO REZONIRANJE

U nastavi matematike geometrija učenicima predstavlja veće teškoće od ostalih matematičkih sadržaja, a jedan od ključnih razloga je razvoj i sposobnost prostornog zora.

Pod pojmom geometrijsko rezoniranje (Arbab, Wing, 1985.) podrazumijeva se sposobnost analize geometrijskih koncepata, formuliranja logičkih argumenata i dokazivanja tvrdnji. Uključuje kritičko razmišljanje, rješavanje problema, deduktivno zaključivanje i sposobnost vizualizacije te manipuliranje geometrijskim oblicima i odnosima. Dva ključna aspekta geometrijskog zaključivanja su dedukcija i dinamičke hijerarhije klasa objekata.

U istraživanju Seah (2015.) razmatra neke od problema uključenih u poučavanje i učenje dvodimenzionalnih oblika i ilustrira kako se aktivnosti poput zadataka savijanja papira

moгу koristiti za poticanje vizualizacije i geometrijskog rezoniranja.

Samo neka empirijska istraživanja (Baranović, N., 2015.; Antunović-Piton, B., Baranović, N., 2021.) kao i teorijske postavke, primjerice paradigme o geometriji (Gonseth, 1945.), Fischbeinova teorija figuralnih pojmova (Fischbein, 1993.), Van Hielova teorija geometrijskog istraživanja (Van Hiel, 1999.), i Duvalov kognitivni model geometrijskog zaključivanja (Duval, 1995.) ukazuju da je sposobnost misaonih transformacija, kao dio prostornog zora, ključni prediktor u razvoju kvalitetnog geometrijskog rezoniranja i općenito percepcije dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata, te geometrijskih transformacija. U studiji (Jones, K., 1998.) navodi spomenute teorijske okvire ali i važnost definiranja geometrijskog razmišljanja i zaključivanja.

Kvalitetan razvoj geometrijskih koncepata kod učenika ne uključuje samo imenovanje geometrijskih oblika, crtanje i računanje površina i opsega koristeći formule, već ona uključuje puno više. U kurikulumu (MZO, NN 72019.) za geometriju na razini osnovne škole se stavlja naglasak:

- analiza karakteristika i svojstava geometrijskih oblika
- odnos dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika
- određivanje i opisivanje prostornih odnosa Kartezijevim koordinatnim sustavom
- prepoznavanje transformacija primjenom rotacije, translacije i osne simetrije

Da bi se ovi ishodi realizirali u svojoj punini, tj. da bi učenici bili u mogućnosti učiti geometriju na svim razinama važna pretpostavka je mogućnost tvorbe mentalne slike geometrijskih oblika vizualizacijom, te njezinih transformacija.

A. Teorije o geometrijskim konceptima

O putu od neformalnog do formalnog poznavanja geometrije i njezine dubine govore mnoge teorije o učenju geometrije i aspektima onoga što često podrazumijevamo samo po sebi. Tako su neke od značajnijih teorija sljedeće:

- paradigme o geometriji (Gonseth, 1945)
- Teorija figuralnih koncepata (Fischbein, 1993.)
- Definicija koncepta i slika koncepta (Tall i Vinner, 1981.)
- Van Hieleova teorija

1) Paradigme o geometriji

Gonseth (1945. - 1955., Kuzniak; Rauscher, 2011.) razlikuje tri paradigme geometrije ovisno o stupnju integracije sa stvarnim svijetom ili prostorom:

- a) prirodna geometrija,
- b) prirodna aksiomatska geometrija i
- c) formalna aksiomatska geometrija.

U osnovnom i srednjem obrazovanju samo prve dvije igraju važnu ulogu. Prirodna geometrija podrazumijeva pronalaženje ispravnosti naših percepcija fizičkog i opipljivog svijeta ili prostora. Tako u prirodnoj geometriji crtež može biti argument za dokazivanje točnosti rješenja, pa na pitanje navedite jedan predmet oblika trokuta, dijete može reći prometni znak iako sam znak nije lik već tijelo oblika trostrane prizme. Ili ako učitelj pita sijeku li se dva pravca na ovoj slici dijete može produžiti pravce i odgovoriti.

Prirodnu aksiomatsku geometriju karakterizira aksiomatski model stvarnog svijeta. Aksiomi su usko povezani s našom percepcijom prostora, a slika ili model više nisu dovoljan argument. Oni služe samo kao podrška u rasuđivanju i dokazivanju, koji moraju proizići iz aksioma, definicija ili dokazanih svojstava. To su primjerice zadatci kakvi se susreću u višim razredima osnovne ili srednjoj školi, gdje je crtež pomoć u određivanju nekih veličina, ali ne služi kao dokazni argument.

Formalna aksiomatska geometrija odvojena je od stvarnog svijeta ili prostora, njegova ključna značajka je cjelovit i dosljedan sustav aksioma. Ta se paradigma geometrije ne uvodi u školskom sustavu već samo na studijima koji u svom sastavu imaju matematiku, gdje se primjerice proučava Euklidska geometrija sa svojim aksiomima.

Unutar paradigme prirodne geometrije, dokazi dobiveni iz slike ili fizičkog prikaza koncepta, poput mjerenja duljine npr. dijagonale, prihvatljivi su i valjani, dok je unutar paradigme prirodne aksiomatske geometrije potrebno uzeti u obzir aksiome i formalne definicije, a slika ili model mogu nam biti od pomoći, dok više nisu dovoljan argument (Kuzinak; Rauscher, 2011).

2) Teorija figuralnih koncepta

U istraživanju geometrije (posebno unutar prirodne aksiomatske geometrije) bavimo se i manipuliramo misaonim entitetima zvanim figuralni pojmovi, koji odražavaju prostorne karakteristike (oblik, položaj, količinu), kao i konceptualne kvalitete poput idealnosti, apstrakcije, općenitosti i cjelovitosti (Fischbein, 1993.). Figuralne koncepte dijelimo na:

- a) misaone entitete
- b) one koji karakteriziraju prostorne karakteristike kao što su: oblik, položaj, količina
- c) kvalitete koncepta, a to su: idealnost, apstrakcija, općenitost, cjelovitost

Za razliku od ostalih područja matematike, istraživanje na polju geometrije karakterizira činjenica da mentalni entiteti s kojima djelujemo uključuju sliku kao bitnu komponentu. Istinsko značenje riječi krug u geometriji, kako se koristi u

razmišljanju, ne može se svesti na čistu definiciju, ali u razmišljanju i rezoniranju često nam pomaže slika kruga. Također, zbog gore navedenih konceptualnih kvaliteta, geometrijski pojmovi nemaju stvarnu fizičku prisutnost. U stvarnosti postoje samo trodimenzionalni objekti, gdje je dimenzija definirana kao topološka dimenzija. Stoga nema stvarnog primjera točke, linije ili kvadrata. Čak i geometrijski trodimenzionalni objekti, poput kocke, ne postoje u stvarnosti upravo zbog tih svojstava. Imamo samo njihove fizičke ili grafičke modele. Dakle, figuralni koncept je slika koju definicija u potpunosti kontrolira. (Fischbein, 1993).

Figuralni koncepti uključuju sliku kao bitnu komponentu, nemaju stvarne fizičke modele (točka, crta ili kvadrat, kocka), te je slika u potpunosti kontrolirana definicijom.

3) Definicija koncepta i slika koncepta

Usporedimo figuralni koncept koji je tipičan za područje geometrije, s definicijom Talla i Vinnera (1981.), koja je formalna definicija pregovarana u široj matematičkoj sferi, i konceptualnu sliku koja predstavlja kognitivnu shemu koncepta.

Idealan figuralni koncept odgovara njihovoj definiciji koncepta, dok mentalna slika definicije pojma, tj. figuralni koncept sa svim konotacijama, nejasnoćama i nesigurnostima, odgovara njihovoj konceptualnoj slici (Fischbein, 1993). Dakle, Vinner i Tall kao i Fischbein ukazuju na razlike između definicije pojma, odnosno idealnog figuralnog koncepta, i pojedinačne konceptualne slike, odnosno, njegove mentalne figuralne koncepcije. Prvo može biti sadržano u drugom, ali u trenutnom mentalnom procesu rasuđivanja uključen je samo dio konceptualne slike i nije nužno da ova evocirana slika uključuje formalnu definiciju. Nisu rijetke pojave nedosljednosti između prikaza geometrijskog koncepta i formalne definicije. Ponekad slika doslovno dominira nad definicijom i stoga poznavanje formalne definicije ne doprinosi učenju.

Također mogu postojati razlike u odabiru paradigme. Unutar paradigme prirodne geometrije, nalazi izvedeni iz slike ili fizičkog prikaza koncepta, poput mjerenja duljine kvadratne dijagonale, prihvatljivi su i valjani, dok su unutar paradigme prirodne aksiomatske geometrije, na koju se odnosi figuralni koncept se posebno odnosi, potrebno je razmotriti aksiome i formalne definicije, a slika ili model mogu nam biti od pomoći, dok više nisu dovoljan argument (Kuzinak; Rauscher, 2011).

4) Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja

Nizozemski supružnici, nastavnici matematike, Pierra i Dieke opisali su teoriju pomoću pet razina geometrijskog mišljenja, a najvažniji rezultat van Hieleove teorije je

identificiranje svih pet razina, krenuvši od nulte razine do četvrte, gdje smo opisali svaku pojedinu. U nekim istraživanjima (Baranović, 2015.) koristi se numeriranje razina od jedan do pet kako ne bih došlo do nejasnoća ako je netko npr. razina broj dva, to je zapravo treća razina geometrijskog mišljenja.

O ovoj teoriji pisali su mnogi (Van Hiele, 1986., 1999., Usiskin, 1982., Teppo, 1991., Mason, 2002., Čižmešija i sur., 2010., Villers, 2010., Baranović, 2015., Howse, 2015., Antunović-Piton i Baranović, 2021.) i potvrđena je na raznim modelima te nema više sumnje u njezinu valjanost, tako da se svaka osoba, bila učenik ili student, sigurno nalazi na određenoj razini van Hieleove teorije geometrijskog mišljenja. Učenici nižih razreda osnovne škole su obično na nultoj razini, učenici viših razreda osnovne škole su na prvoj razini, dok rijetko koji učenik osmog razreda pokaže razinu dva. Srednjoškolci bi trebali biti obično na razini tri, no većina pokazuje još i razinu dva, a studenti tehničkih fakulteta i matematičkih usmjerenja bi pokazali najvišu razinu četiri.

Dakle, razine van Hieleove teorije geometrijskog mišljenja su:

- razina 0 – vizualizacija ili prepoznavanje
- razina 1 – analiza
- razina 2 – neformalna dedukcija
- razina 3 – dedukcija
- razina 4 – strogost

Svih pet razina van Hielove teorije opisuje načine i procese razmišljanja koji se koriste u kontekstima geometrije. Razine razmišljanja ne govore o tome koliko znanja imamo već samo opisuju na koji način razmišljamo te kakve geometrijske ideje imamo. Na slici 5. vidljiva je značajna razlika od razine do razine i predmeti misli - o čemu možemo geometrijski razmišljati (Van de Walle, Karp, Bay-Williams 2010.).



Slika 5. Prikaz razina prema Van Hielevoj teoriji (Van de Walle, Karp, Bay-Williams 2010.)

Clements i sur. (1999.) utvrdio je da geometrijsko rezoniranje postoji već prije razine 0. On predlaže novu razinu, tj. prekognitivna razina. Na ovoj razini, pojedinac je još uvijek nesiguran u prepoznavanju oblika, obrađujući pažnju samo na neka svojstva. Na primjer, u ovoj se fazi svi zatvoreni i zaobljeni oblici prepoznaju kao krug.

Da bi se uspješno savladale prethodno spomenute razine van Hielove teorije geometrijskog mišljenja, u svojoj teoriji Pierra van Hiele, dao je i pet faza za uspješan proces učenja i savladavanja naučenih nivoa. Te faze učenja potkrijepljene su primjerima i aktivnostima koje nastavnik ali i učenik obavlja da bi se postigla određena razina. Faze učenja (Teppo, 1991., Van Hiele, 1999., Howse, 2015.) se dijele na:

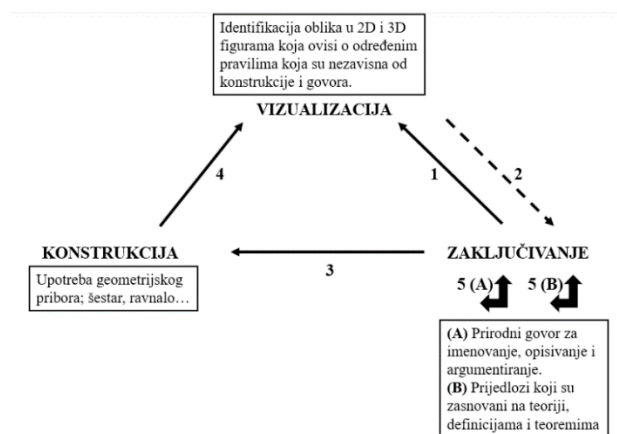
- Faza pitanja i informiranja (Inquiry/Information)
- Faza usmjerenog vođenja (Directed orientation)
- Faza objašnjavanja (Explication)
- Faza aktivnosti otvorenog tipa (Free orientation)
- Faza povezivanja (Integration)

5) Duvalov kognitivni model geometrijskog mišljenja

Francuski filozof i psiholog Raymond Duval (1934. - ...) poznat je po doprinosima u području matematičkog obrazovanja, odnosno kako učenici uče matematiku i kako se nastavni pristupi mogu prilagoditi da bi se poboljšalo razumijevanje, usvajanje i povezivanje matematičkih ali i geometrijskih koncepata.

U knjizi *Understanding the Mathematical Way of Thinking* (Duval, 2017.) fokus je stavljen na kognitivne aspekte učenja matematike, načine na koje učenici konceptualiziraju matematičke pojmove i strategije koje koriste u rješavanju matematičkih problema. Proučava kako učenici percipiraju matematičke simbole, kako ih povezuju s konceptima te kako ta percepcija utječe na njihovo razumijevanje matematike. Također, istražuje procese transformacije matematičkog znanja i razumijevanja, kao i ulogu semiotike u tim procesima. Tako je nastala njegova poznata fraza "nema noeze bez semioze", što bi značilo da su procesi mišljenja, odnosno spoznaje (noeza) i interpretacije simbola (semioza) međusobno povezani, štoviše i nerazdvojni. Također, Duval ističe i kako postoji potencijalni sukob između perceptivnog razumijevanja figure i matematičke percepcije. Kognitivni procesi koje Duval analizira (slika 6.) u geometrijskom rezoniranju su:

- Vizualizacija – vizualna reprezentacija geometrijskih iskaza ili heurističko iskazivanje složenijih geometrijskih situacija
- Konstrukcija – korištenje geometrijskog pribora
- Zaključivanje – posebno diskurzivni proces za proširivanje znanja; za objašnjavanje, dokazivanje



Slika 6. Duvalov kognitivni proces
(Granić, 2024.)

U istraživanju Ramatlapana i Berger (2018.) prikazuju percepcijska znanja, vještine i razmišljanja budućih učitelja matematike na temelju rješavanja zadataka geometrijskog sadržaja, povezivanju geometrijskih prikaza, svojstava i teorema. Dobivene rezultate prikazuju pomoću Duvalovog kognitivnog modela gdje je vidljivo kako su buduću učitelji matematike imali poteškoće u povezivanju kognitivnih procesa vizualizacije i zaključivanja te u perceptivnom razumijevanju i povezivanju. I tu se dolazi također do onoga pitanja: „Što vidi učitelj, a što učenik, za isu sliku nekog geometrijskog pojam, koncepta i sl.?”

B. Geometrija i dokazi

Poznati su izrazi kao što su: “dokazi bez riječi”, “vizualni dokazi”, “grafički dokazi”, koji na jedan jednostavan, elegantan, kreativan i slikovit prikaz povezuje zornost i geometrijsko zaključivanje. To je jedno veliko područje za istraživanje kojim su se bavili i još uvijek se bave mnogi inozemni matematičari, poput Nelsen (1993., 2000., 2015.), Bell (2011.), Miller, College (2012.), i drugi, ali i naši hrvatski matematičari, kao što su: Šikić (2000.), Kuljanac, Varošaneć (2006.), Veljan, Marušić (2017.), Dakić (2018.), i mnogi drugi, s naglaskom na vizualni prikaz, no, treba biti s oprezom, jer u sebi također kriju niz zamki i miskoncepcija koje učitelj treba poznavati. Vizualnim se dokazima može poboljšati i unaprijediti nastava matematike, učiniti ju zanimljivijom, dinamičnijom, kreativnijom, ali tako i povećati motivaciju kod učenika, pobudit zanimanje za učenjem matematike i istraživanjem, radi boljeg rezultata u razumijevanju kako matematičkih tako i geometrijskih sadržaja (Radošević Medvidović, Štefan Trubić, 2023.).

IV. PLAN ISTRAŽIVANJA

A. Svrha i cilj istraživanja

Svrha istraživanja je utvrditi kojim nastavnim metodama učitelji u višim razredima osnovne škole poučavaju geometriju, te postoji li utjecaj vizualizacije i zaključivanja na bolji uspjeh kod učenika iz geometrije. Nakon analiziranih

podataka cilj je napraviti kratke smjernice i upute za učitelje u poučavanju geometrijskih koncepta pomoću vizualizacije, misaonih transformacija i geometrijskog zaključivanja.

B. Istraživačka pitanja i nacrt istraživanja

Istraživačka pitanja su podijeljena u tri grupe:

1) Prva grupa pitanja namijenjena je za učitelje: Kako učitelji percipiraju vizualizaciju i geometrijsko zaključivanje? Kako i koliko učitelji koriste vizualizaciju i misaone transformacije kod poučavanja tema geometrijskog sadržaja? Na koji način učitelji razvijaju vizualizaciju i geometrijsko rezoniranje kod učenika?

2) Druga grupa pitanja namijenjena je za učenike: Kako učenici stvaraju slike u svojoj glavi? Kako učenici rješavajući problemski zadatak dolaze do geometrijskog rezoniranja? Pomaže li vizualizacija učenicima u učenju novih geometrijskih koncepta? Hoće li poučavanje pomoću vizualnih konkretna (prikaza) pokazati bolji uspjeh kod učenika?

3) Treća grupa pitanja odnosi se za statističku obradu podataka: Postoji li povezanost učiteljevog poučavanja i učenikovog geometrijskog zaključivanja? Postoji li povezanost misaonih transformacija i uspjeha učenika u geometriji? Postoji li statistički značajna razlika u uspjehu učenika na predtestu i posttestu između kontrolne i eksperimentalne skupine?

Nacrt istraživanja je baziran na kombiniranom kvaziekperimentalnom istraživanju koji uključuje učitelje nižih i viših razreda osnovne škole te učenika viših razreda osnovne škole. Planira se napraviti upitnik s učiteljima, a zatim intervju s nekoliko odabranih učitelja. Potom će se odraditi predtest znanja na eksperimentalnoj i kontrolnoj skupini učenika. Prema dobivenim rezultatima planira se napraviti za učitelje kratke upute, smjernice za poučavanje i razvijanje geometrijskog mišljenja i zaključivanja pomoću vizualizacije. Na kraju će se provesti posttest znanja na eksperimentalnoj i kontrolnoj skupini učenika, te statistički obraditi svi dobiveni rezultati.

C. Istraživačke metode i koraci istraživanja

Prvi korak za istraživanje buduće dizertacije napravljen je u ožujku i travnju prošle godine. Eksperimentalno istraživanje obuhvatilo je studente integriranih preddiplomskih i diplomskih učiteljskih studija u Republici Hrvatskoj. Sudjelovalo je sedam sveučilišta u Republici Hrvatskoj a to su: Sveučilište u Zagrebu, sveučilište u Rijeci, Sveučilište u Puli, Sveučilište u Osijeku, Sveučilište u Slavonskom Brodu, Sveučilište u Zadru i Sveučilište u Splitu. Na navedenim sveučilištima kontaktirani su nositelji matematičkih kolegija,

koji su zamoljeni da volonterski svojim studentima (od prve do pete godine) prosljede anketni upitnik. Anketni upitnik popunila je 261 osoba (N=261), od toga 13 studenata (M=13), 246 studentica (Ž=246) i 2 osobe nisu izjasnile spol. Iz toga istraživanja smo vidjeli kakve stavove o geometriji i geometrijskom rezoniranju imaju studenti te kojoj razini znanja pripadaju prema Van Hieleovoj teoriji. Ovo je bilo pilot istraživanje, gdje je obradom podataka dobivena valjanost i pouzdanost.

U drugom koraku planira se doraditi anketni upitnik iz pilot istraživanja i zadaci u njemu kako bi se dobio uvid u percepciju geometrije u nižim razredima. To eksperimentalno istraživanje će se provesti na učiteljima razredne nastave u Hrvatskoj, a planirano je u prvom polugodištu nastavne godine 2024./2025.

U trećem koraku istraživanje će se provesti na učiteljima matematike u višim razredima osnovne škole u Hrvatskoj kako bi se čula i njihova uvjerenja i geometrijska rezoniranja. Period za provedbu je drugo polugodište školske godine 2024./2025.

Četvrti korak je odabrati eksperimentalnu i kontrolnu skupinu učenika npr. šestih razreda. Planira se oko 100 učenika za svaku skupinu. S njima će se provesti predtest koji će sadržavati nekoliko pitanja vezanih za stavove o geometriji i vizualizaciji te nekoliko primjera za prostorni zor i geometrijsko zaključivanje.

Peti korak je intervencija u nastavi. S učiteljima koji rade s eksperimentalnom skupinom učenika obaviti će se nekoliko radionica, edukacija, razmijeniti organizacijske metode nastavnih cjelina, predložiti motivacijske primjere za određeni geometrijski koncept koji jačaju prostorni zor i geometrijsko rezoniranje. Učitelji i učenici u kontrolnoj skupini rade bez intervencije i po ustaljenom planu i programu.

Šesti korak je provedba posttesta nakon obrađenog geometrijskog sadržaja na eksperimentalnoj i kontrolnoj skupini.

Za četvrti, peti i šesti korak, predviđeno vrijeme provedbe je od rujna do lipnja tj. jedna školska godina, npr. 2025./2026.

Dakle, u cijelom istraživanju za dizertaciju, ispitanici će biti studenti učiteljskih studija, učitelji nižih i viših razreda osnovne škole i učenici šestih razreda osnovne škole. Svaki mjerni instrument planiram samostalno sastaviti uz pomoć razne literature i nekoliko sličnih provedenih testova. Kako bi instrument bio pouzdan i valjan provesti će se pilot istraživanje za svaki anketni upitnik i test. Anketni upitnici će se sastaviti i u online formi poslati učiteljima u osnovne škole. Dok će se predtest i posttest trebati isprintati i u fizičkom obliku svakom učeniku dati njegov primjerak za

popunjavanje. Svi sudionici će biti upoznati s načinom, trajanjem i ciljem istraživanja. Dakle, podaci će se prikupljati kvantitativnim i kvalitativnim metodama, uključujući upitnike, intervju, rasprave s fokus grupama učitelja i učenika. Podaci koji budu prikupljeni u Google Forms obliku, ali i drugi, šifriraju se u excel tablicu i potom se obrađuju u programu Statistica. Također će se koristiti i analiza čestica ispita znanja za rezultati učenika na predtestu i posttestu.

V. LITERATURA

- [1] Alsina, C.; Roger, B. N.: *Math made visual: creating images for understanding mathematics*. Vol. 28. American Mathematical Soc., 2006.
- [2] Antunović-Piton, B.; Baranović, N.: Razvoj vizualnog i algebarskog mišljenja na primjeru rastućeg geometrijskog uzorka, Zbornik radova - 12. stručno-metodički skup za učitelje i nastavnike matematike u RH, Nastava matematike – jučer, danas, sutra, Pula: Matematičko društvo, 2021. str. 378-378 (radionica, recenziran, prošireni sažetak, stručni)
- [3] Arbab, F., Wing, J.: Geometric reasoning for geometric modeling. In Aircraft Design Systems and Operations Meeting (p. 4024), 1985.
- [4] Baranović, N.: O razvoju geometrijskog mišljenja u nastavi matematike prema van Hiele-ovoj teoriji, simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2015., Vol. VI (1)
- [5] Bell, C. J.: Proofs without Words: A Visual Application of Reasoning and Proof, The National Council of Teachers of Mathematics, Volume 104, issue 9, 690-695, 2011., <https://doi.org/10.5951/MT.104.9.0690>
- [6] Bognar, L., Kreativnost u nastavi, pregledni članak, Napredak, časopis za interdisciplinarna istraživanja u odgoju i obrazovanju, vol. 153., 2012., str. 9.-20.
- [7] Clements, D. H.: Teaching and learning geometry. U: research companion to principles and standards for school mathematics (ur. J. Kilpatrick, J., Martin, W. G., Schifter, D.) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 151–178., 2003.
- [8] Clements, D. H.; Swaminathan, S.; Zeitler Hannibal, M. A.; Sarama, J. Y.: Children's Concepts of Shape. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, VA, v. 30, n. 2, p. 192-212, 1999.
- [9] Čizmešija, A.; Svedrec, R.; Radović, N.; Soucie, T.: Geometrijsko mišljenje i prostorni zor, Zbornik radova četvrtog kongresa nastavnika matematike, ŠK, 2010., Zagreb.
- [10] Čorluka, T.: Ispitivanje učinkovitosti metoda vizualizacije podataka, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Grafički fakultet, Zagreb, 2012.

- [11] Dakić, B.: Matematika u boji-dokazi bez riječi, Element, Zagreb, 2018.
- [12] Dečman, S., Halavuk, A., & Milin Šipuš, Ž.: Geometrija prostora-presjeci tijela ravninom. Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 14(53), 5-13., 2021.
- [13] Dujić, L.: Rezultati istraživanja nekih temeljnih znanja iz elementarne geometrije kod studenata učiteljskog studija, stručni članak, 2017.
- [14] Duval, R., Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, 1995, Berlin, Springer.
- [15] Duval, R.: Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations, Springer, 2017.
- [16] Fischbein, E.: The Theory of Figural Concepts. Educational Studies in Mathematics, 1993, 24(2), 139-162
- [17] Granić, A.: Duvalov kognitivni model geometrijskog mišljenja, diplomski rad, University of Split. Faculty of Science. Department of Mathematics, 2024.
- [18] Gretsche, P.; Holzäpfel, L.: Lernen mit Visualisierungen, Waxmann, New York, 2016.
- [19] Howse, M. E.; Howse, T. D.: Linking the Van Hiele Theory to Instruction, Teaching Children Mathematics, Vol. 21 (5), 2015., pp. 304-313.
- [20] <https://pisa.ncvvo.hr>
- [21] <https://www.ncvvo.hr/međunarodna-istrazivanja/timss/>
- [22] Jupri, A.: Using the Van Hiele theory to analyze primary school teachers' written work on geometrical proof problems. Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1013, No. 1. IOP Publishing, 2018. 12–17.
- [23] Jones, Keith: Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 1998, 18 (1-2), 29-34.
- [24] Jones, K., Tzekaki, M.: Research on the teaching and learning of geometry. U: The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues (ur. A. Gutiérrez, A., Leder, G., Boero, P.) Rotterdam: Sense. 109– 149., 2016.
- [25] Kadum, V.: Kreativnost u nastavi matematike, Metodčki obzori 13, vol.6, 2011., str. 165.-174.
- [26] Koić, E.; Štrkalj-Ivezić, S.; Kovač, M.: „Preporuke za zaštitu mentalnog zdravlja u kriznim situacijama“, Kreativna vizualizacija, 2020.
- [27] Kuljanac, Lj.; Varošaneć, S.: Dokazi bez riječi, 64=65 i zlatni rez, Math.e, br.8, 2006, 1-4
- [28] Kuzinac, A.; Rauscher, J. C.: How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 77, n. 1, p. 129-147, 2011.
- [29] Linn, M. C., Petersen, A. C.: Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-analysis, Child Development, 56(6), 1985., 1479 - 1498.
- [30] Mason, M.: The van Hiele Levels of Geometric Understanding. Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and Applications, MacDougal Little Inc., 2002.
- [31] Metz, S. S., Donohue, S., Moore, C.: Spatial Skills: A Focus on Gender and Engineering, In B. Bogue & E. Cady (Eds.), Apply Research to Practice (ARP) Resources, 2012.
- [32] Miller, R. L., Gollege, W.: On Proofs Without Words, Washington, 2012.
- [33] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Narodne novine, 7/2019.
- [34] Mladinić, P.; Radović, N.: Mentalna rotacija u novo doba matematike, Zbornik radova, Pula: Matematičko društvo "Istra", 2021. str. 259-266
- [35] Müller, M.: Važnost vizualizacije u didaktici književnosti: Motivacijski faktor za razvoj čitalačke socijalizacije?, European Journal of Literature, Language and Linguistics Studies, Volume 7, issue 3, 2023., <http://dx.doi.org/10.46827/ejll.v7i3.487>
- [36] Musser, G. L.; Burger, W. F.; Peterson, B. E.: Mathematics for elementary Teachers, John Wiley, 2007.
- [37] Nelsen, R. B.: Proofs without words I, Exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America, Washington, 1993.
- [38] Nelsen, R. B.: Proofs without words II, More exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America, Washington, 2000.
- [39] Nelsen, R. B.: Proofs without Words III, Further exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America, Washington, 2016.
- [40] Pavlin-Bernardić, N.; Vlahović-Štetić, V.; Mišurac Zorica, I.: Studentski i učiteljski stavovi i uvjerenja o matematici, Odgojne znanosti, vol. 12(2), 385-397., 2010.
- [41] Pavlovićová, G., Bočková, V., Laššová, K.: Spatial Ability and Geometric Thinking of the Students of Teacher Training for Primary Education, TEM Journal. Volume 11, Issue 1, 388–395, 2022.
- [42] Pjanić, K.: Aktivnosti koje mogu pogodovati razvoju prostornog zora i geometrijskog mišljenja učenika osnovne škole, Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, 2023. <https://orcid.org/0000-0001-7196-7508>

- [43] Radošević Medvidović, I.; Štefan Trubić, M.: Vizualizacija u nastavi matematike, *13. stručno-metodički skup učitelja i nastavnika matematike-Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi*, 2023., pp. 285-294.
- [44] Radović, N., Svedrec, R., Soucie, T., Kokić, I.; Vizualizacija prostora, *Poučak časopis za metodiku i nastavu matematike*, vol 13., no. 49., 2012., str.49.-68.
- [45] Ramatlapana, K., Berger, M.: Prospective Mathematics Teachers' Perceptual and Discursive Apprehensions when Making Geometric Connections. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 22(2), 162–173., 2018.
- [46] Schroeder W., Martin K., Lorensen B.: *The Visualization Toolkit 2nd Edition*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 1997.
- [47] Schroeder W., Martin K., Lorensen B.: *The Visualization Toolkit Edition 4.1.*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 2018.
- [48] Seah, R.: Reasoning with geometric shapes. *Australian Mathematics Teacher*, The, 71(2), 4-11., 2015.
- [49] Sorbello, M.; Frova, G. i Zdravković, I.: Vizualizacija dišnog puta: oči vide ono što mozak zna, *Acta clinica Croatica*, 55. (Supplement 1), 2016., 67-67. <https://doi.org/10.20471/acc.2016.55.s1.08>
- [50] Sorby, S.: Developing 3-D Spatial Visualization Skills for Non-Engineering Students, *Proceedings of the 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*
- [51] Sorby, S.: Educational Research in Developing 3-D Spatial Skills for Engineering Students, *International Journal of Science Education*, Vol. 31, No. 3, 2009., 459 - 480
- [52] Šikić, Z.: Dokazi bez riječi, *Poučak*, 2000, 1; 58-62
- [53] Škarecki, C., Fanton, D., Pomper, D., i Pomper, S.: Vizualizacija podataka, optimalna platforma za prezentaciju informacija, *Bilten Hrvatskog društva za medicinsku informatiku (Online)*, 2019., 25(1), 45-54.
- [54] Tall, D.; Vinner, S.: Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.
- [55] Teppo, A.: Van Hiele levels of geometric thought revisited, *The Mathematics Teacher*, Vol. 84, No. 3, March 1991., 210-221.
- [56] Torrance, E. P.: *Encouraging Creativity in The Classroom*, Dubuque, Iowa: Brown Company Publishers, 1974.
- [57] Uygun, T., Güner, P.: Van Hiele Levels of Geometric Thinking and Constructivist- Based Teaching Practices. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(1), 2021., 22–40.
- [58] Usiskin, Z.: Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry- CDASSG Project. The University of Chicago, 1982.
- [59] Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M.: *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon, str. 400, 2010.
- [60] Van Hiele, P.M.: *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*, Academic press Inc., 1986.
- [61] Van Hiele, P. M.; *Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching children mathematic*, 1999, 5(6), 310-316.
- [62] Veljan, D.; Marušić, I.: Vizualni i kratki dokazi - prilog kreativnoj nastavi matematike (1.dio). *Math.e*, 32 (1), 18-37, 2017.
- [63] Villers, M. de.: Some reflections on the Van Hiele theory. Invited plenary presented at the 4th Congress of teachers of mathematics of the Croatian Mathematical Society, Zagreb, 20 June - 2 July 2010.
- [64] Vlasnović, H.; Cindrić, M.; Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema van Hieleovoj teoriji, *Školski vjesnik* 63, 1-2, izvorni znanstveni članak, 37.-51., 2014.