

Učinak diskursne nastave na razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja učenika o linearnim jednadžbama s jednom nepoznanicom

Marina Marega Selecki

Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu, Hrvatska

Poslijediplomski sveučilišni studij

Istraživanje u edukaciji u području prirodnih i tehničkih znanosti – usmjerenje Matematika

mmselecki@pmfst.hr

***Sažetak** – U radu se predstavlja teorijski okvir i plan istraživanja usmjerenog na ispitivanje učinka diskursne nastave na razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja učenika o linearnim jednadžbama s jednom nepoznanicom. Diskursna nastava promatra se kao pristup u kojem se matematičko znanje oblikuje kroz jezik, argumentaciju i zajedničku izgradnju značenja. U teorijskom dijelu rada razrađuju se pojmovi konceptualnog i proceduralnog znanja i proceduralne fleksibilnosti te načela diskursne nastave utemeljena na komunikaciji i aktivnom sudjelovanju učenika. U planu istraživanja predviđena je edukacija učitelja o učinkovitim diskursnim praksama, provedba nastavne intervencije i višestruko prikupljanje podataka putem testova, upitnika, dnevnika i intervjua. Očekuje se da će diskursno usmjerena nastava potaknuti dublje razumijevanje pojma jednakosti i razviti uravnoteženo povezivanje konceptualnih i proceduralnih aspekata znanja, dok će profesionalni razvoj učitelja pridonijeti unaprjeđenju kvalitete nastave matematike.*

***Ključne riječi:** diskursna nastava, konceptualno znanje, proceduralno znanje, linearne jednadžbe, profesionalni razvoj učitelja*

I. UVOD

Poučavanje linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom predstavlja ključnu fazu u razvoju algebarskog mišljenja učenika. U tom se području često uočavaju teškoće koje proizlaze iz nerazumijevanja koncepta jednakosti i povezanosti između simboličkih postupaka i njihovog značenja. Razvijanje algebarskog mišljenja stoga zahtijeva pažljivo usklađivanje različitih aspekata matematičkog znanja. Suvremena istraživanja ističu važnost uravnoteženog razvoja konceptualnog i proceduralnog znanja, koja se međusobno nadopunjuju i osnažuju te zajedno omogućuju dublje razumijevanje matematičkih ideja. Diskursna nastava temelji se na pretpostavci da učenici uče kroz razgovor, objašnjavanje i uspoređivanje

strategija, a ne pasivnim usvajanjem znanja. Takav pristup potiče aktivno sudjelovanje, razumijevanje matematičke logike i veću fleksibilnost u primjeni različitih strategija rješavanja.

U nastavku rada izlaže se teorijski okvir koji objašnjava povezanost konceptualnog i proceduralnog znanja te ulogu diskursne nastave u njihovu povezivanju, a zatim se oblikuje plan istraživanja kojim se želi ispitati kako takav pristup može unaprijediti njihovu integraciju u poučavanju linearnih jednadžbi.

II. TEORIJSKI OKVIR

A. Konceptualno i proceduralno znanje u matematici

Razumijevanje odnosa između konceptualnog i proceduralnog znanja jedno je od ključnih pitanja u istraživanjima učenja i poučavanja matematike. Oba tipa znanja čine temelj za razvoj matematičkih kompetencija, no njihova međusobna povezanost određuje na koji će način učenici učiti i koristiti matematiku u različitim kontekstima. Ako se u praksi poučavaju odvojeno, postoji opasnost da učenici razviju ili samo vještine izvođenja postupaka bez njihovog razumijevanja ili samo intuitivna shvaćanja pojmova bez mogućnosti njihove praktične primjene. Tek njihova integracija omogućuje smisleno i fleksibilno korištenje matematičkih ideja.

Hiebert i Lefevre [1] definiraju konceptualno znanje kao mrežu bogatu odnosima, pri čemu pojedini elementi dobivaju značenje tek pri povezivanju s drugima. Ono uključuje razumijevanje pojmova i njihovih međusobnih odnosa te osigurava učenicima kognitivni okvir za objašnjavanje i interpretiranje procedura. Rittle-Johnson i Schneider [2] smatraju da konceptualno znanje može biti implicitno ili eksplicitno. Implicitno znanje se očituje kroz intuitivno prepoznavanje struktura i spontan odabir smislenih postupaka, dok eksplicitno znanje podrazumijeva svjesno i jasno verbalizirano razumijevanje odnosa i mogućnost objašnjavanja zašto određeni postupci funkcioniraju. Star [3] dodaje da konceptualno znanje opisuje kvalitetu

znanja koja se odnosi na dubinu razumijevanja i bogatstvo povezanosti koje ono uspostavlja, a ne o količini činjenica o određenim konceptima kojima učenik barata.

Proceduralno znanje se, prema Hiebertu i Lefevre [1], sastoji od formalnog jezika matematike koji uključuje simbole i pravila zapisivanja te algoritama za rješavanje zadataka. Rittle-Johnson i Schneider [2] ističu da ono uključuje nizove koraka i fleksibilne strategije koje treba izvoditi ispravnim redoslijedom. Star [3] naglašava da proceduralno znanje označava vrstu znanja koje uključuje simbole, pravila i postupke koji omogućuju rješavanje zadataka čak i bez dubljeg razumijevanja. Ova definicija objašnjava zašto učenici često mogu točno riješiti standardne zadatke, ali istodobno ne razumiju matematičku logiku postupaka koje provode.

Međusobni odnos konceptualnog i proceduralnog znanja predstavlja jedno od središnjih pitanja u raspravama o matematičkom znanju, a kroz povijest su se istaknula četiri teorijska modela njihovog odnosa: model u kojem se prvo razvija konceptualno znanje, model u kojem se prvo razvija proceduralno znanje, model neovisnog razvoja i iterativni model [2]. Iterativni model, koji je danas najšire prihvaćen, polazi od toga da konceptualno i proceduralno znanje djeluju dvosmjerno. Učenici mogu prvo razumjeti pojam pa lakše usvojiti proceduru, ali isto tako izvođenjem procedura mogu postupno otkriti obrasce i uočiti dublje koncepte. Ipak, empirijski dokazi potvrđuju da taj odnos nije uvijek simetričan. U nekim domenama prevladava utjecaj konceptualnog znanja na proceduralno, dok u drugima proceduralno znanje snažnije potiče razvoj konceptualnog [2]. Star [3] naglašava da se konceptualno i proceduralno znanje ne smiju promatrati kao strogo odvojene kategorije. U praksi se često isprepliću, a učenici istodobno koriste elemente oba tipa znanja. On redefinira proceduralno znanje kao dinamičniji konstrukt koji uključuje i razinu fleksibilnosti te povezanosti s konceptima. Na taj se način prevladava stereotip shvaćanja proceduralnog znanja kao mehaničko ponavljanja pravila. Ključnu ulogu u integraciji ova dva tipa znanja ima proceduralna fleksibilnost. Schneider, Rittle-Johnson i Star [4] su pokazali da konceptualno i proceduralno znanje imaju stabilne dvosmjerne veze te da oba neovisno pridonose razvoju proceduralne fleksibilnosti. Proceduralna fleksibilnost se definira kao sposobnost prepoznavanja više mogućih postupaka i odabira onoga koji je najprikladniji u određenom kontekstu. Hickendorff i suradnici [5] predlažu teorijski okvir koji širi pojam fleksibilnosti i opisuje je kao fleksibilnu i kreativnu uporabu pojmova, odnosa, reprezentacija i strategija. Prema njima, matematička fleksibilnost predstavlja most između konceptualnog i proceduralnog znanja jer učenicima

omogućuje da ideje koriste na smislen i prilagodljiv način. Time se naglašava da fleksibilnost nije samo tehnička vještina odabira određenog postupka, već uključuje i kreativnost u primjeni matematičkih koncepata. Istraživanje Star i suradnika [6] otkrilo je razlike u proceduralnoj fleksibilnosti među učenicima različite dobi i obrazovnih usmjerenja, što upućuje na to da se fleksibilnost razvija postupno kroz nastavu i iskustvo. Također, važno je istaknuti da proceduralna fleksibilnost nije ekvivalentna poznavanju više algoritama, nego zahtijeva sposobnost procjene koja je strategija najefikasnija u konkretnoj situaciji.

Ovi uvidi imaju važne posljedice na nastavu matematike. Ako nastava naglašava isključivo procedure, učenici razvijaju spretnost u izvođenju, ali imaju poteškoća u primjeni znanja u novom kontekstu. Ako se u nastavi naglašava samo konceptualno razumijevanje bez dovoljno prakse, učenici razumiju ideju, ali im nedostaje sposobnost učinkovite primjene. Stoga se preporučuje uravnotežena integracija koncepata i procedura uz sustavno poticanje proceduralne fleksibilnosti. Učitelji bi trebali nuditi zadatke koji omogućuju usporedbu različitih metoda, raspravu o njihovim prednostima i nedostacima te refleksiju o konceptualnim vezama koje povezuju provedene postupke. Takav pristup potiče učenike da matematiku doživljavaju kao smisleni sustav, a ne samo kao niz izoliranih pravila.

B. Diskursna nastava

Diskurs u nastavi matematike obuhvaća sve oblike komunikacije među učenicima i između učenika i učitelja, uključujući verbalne, neverbalne i simboličke načine izražavanja. Adler i Ronda [7] ističu da je matematički diskurs dinamičan sustav komunikacijskih praksi kroz koje učenici aktivno oblikuju znanje. Sfard [8], u okviru svoje komognitivne teorije, naglašava da je mišljenje oblik komunikacije, odnosno da matematičke ideje ne postoje odvojeno od jezika i simbola, već nastaju i razvijaju se upravo kroz diskursne prakse zajednice. U tom smislu, učenje matematike ne može se odvojiti od sudjelovanja u diskursu.

U hrvatskom kontekstu važnost diskursa posebno dolazi do izražaja jer kurikulum za nastavni predmet Matematika [9] prepoznaje matematičku komunikaciju kao jednog od ključnih matematičkih procesa. Učenike je potrebno poticati na smisleno prikazivanje matematičkih objekata, obrazlaganje rezultata, objašnjavanje svojih ideja i bilježenje postupaka, ali i na razumijevanje tuđih objašnjenja te razmjenjivanje i sučeljavanje različitih stajališta. Na taj se način nacionalni kurikulum usklađuje s načelima diskursnog pristupa nastavi matematike.

Diskursna nastava temelji se na pretpostavci da učenici ne usvajaju znanje pasivno, već ga zajednički konstruiraju kroz jezik, simbole i interakciju. Istraživanja provedena u različitim kontekstima potvrđuju da diskursno utemeljena nastava ima pozitivan utjecaj na učenje matematike. Yimam Legesse i Kelkay [10] pokazali su da su učenici koji su sudjelovali u diskursno utemeljenoj nastavi postigli značajno bolje rezultate na testovima konceptualnog i proceduralnog znanja u području vjerojatnosti i statistike u odnosu na kontrolnu skupinu. Ng i suradnici [11] u istraživanju provedenom u Hong Kongu su dodatno pokazali da promjene u učiteljskim diskursnim praksama, poput povećanja broja pitanja koja potiču objašnjavanje i opravdavanje, dovode do vidljivih poboljšanja u učenju učenika.

Hennessy i suradnici [12] naglašavaju da produktivan dijalog zahtijeva više od kratkih pitanja i odgovora. On uključuje situacije u kojima učenici obrazlažu misli, opravdavaju tvrdnje i kritički promišljaju ideje drugih. Howe i suradnici [13] diskursnu nastavu definiraju kao strukturiranu komunikaciju u kojoj učitelj sustavno koristi pitanja, poticaje i argumente kako bi potaknuo dublje razumijevanje. O'Connor i Michaels [14] pritom razvijaju koncept govornih poteza, odnosno strategija kojima učitelj usmjerava razgovor na način da učenici aktivno doprinose zajedničkoj izgradnji znanja. Doprinos daljnjoj razradi dali su i Demirci i Baki [15] s konceptom jezgre matematičkog diskursa koji razlikuje vanjsku strukturu diskursa koja uključuje vrste tipove učioničkih interakcija (učitelj, učitelj-razred, učitelj-učenik, učenik-učenik) i unutarnju strukturu koja podrazumijeva poteze matematičkog diskursa koji su povezani s motivacijom, objašnjavanjem matematičkih ideja i njihovim usvajanjem. Takav okvir omogućuje detaljnije razumijevanje dinamike učioničkog dijaloga.

Okvir Matematički diskurs u nastavi (MDI) Adler i Ronde [7] osmišljen je kako bi omogućio sustavno opisivanje matematičkog diskursa u nastavi. U središtu je pretpostavka da se matematika uči kroz specifične diskursne prakse te da kvaliteta tih praksi određuje koje se ideje i postupci doista mogu usvojiti. Okvir MDI čine četiri povezane sastavnice: objekt učenja, egzemplifikacija, objašnjavajući govor i sudjelovanje učenika. Objekt učenja definira što je cilj učenja na određenom nastavnom satu, dok egzemplifikacija označava način na koji se pomoću primjera i zadataka gradi i prepoznaje općenitost matematičkih ideja. Objasnjavajući govor obuhvaća imenovanje i legitimiranje matematičkih objekata, a sudjelovanje učenika odnosi se na vrste govora i objašnjenja koje nastava omogućuje. Egzemplifikacija zapravo pokreće učenje jer niz odabranih primjera omogućuje da učenici uoče postojanost i granice pojma. Varijacija primjera

može biti zasnovana na sličnosti, kontrastu ili integraciji. Zadaci povezani s primjerima određuju što učenici trebaju raditi i na kojoj kognitivnoj razini, od jednostavnog izvođenja do problemskog povezivanja koncepata. Objasnjavajući govor ima dvostruku funkciju: imenovanje i legitimiranje. U imenovanju, okvir razlikuje kolokvijalni jezik, matematičke „etikete” i punu upotrebu formalnog matematičkog jezika. U legitimiranju, razlikuju se nematematički kriteriji, poput autoriteta učitelja ili svakodnevnih iskustava, i matematički kriteriji koji uključuju opće principe i definicije. Kvaliteta diskursa raste kada se objašnjavajući govor premješta prema matematičkim kriterijima, jer to učenicima otvara mogućnost prijenosa i generalizacije. Sudjelovanje učenika može varirati od kratkih potvrda do elaboriranih objašnjenja i argumentacija. Okvir MDI pokazuje da se kvalitetno sudjelovanje postiže kada učenici iznose razloge i dokaze, a učitelj njihove doprinose preuzima i dalje razvija. Okvir je vrijedan jer učiteljima omogućuje refleksiju koja uključuje pitanja poput: jesu li primjeri planirani s ciljem generalizacije, je li razina zadatka očuvana, koriste li se matematički kriteriji u objašnjenjima i imaju li učenici priliku za elaborirani govor. Time se diskursna nastava operacionalizira kao sustavan put prema kvalitetnoj matematičkoj komunikaciji u skladu s ključnim odredbama kurikulumu.

Istraživanja pokazuju da se učinkovite metode diskursne nastave mogu jasno interpretirati kroz dimenzije okvira MDI. Objekt učenja je potrebno stalno isticati na način da učitelj eksplicitno postavlja cilj sata i kontinuirano mu se vraća, čime usmjerava pozornost na ono što je matematički važno. Time se oblikuje okvir u kojem učenici razumiju kriterije prema kojima se vrednuju ideje i mogu prepoznati napredak prema cilju. Učinkovitost diskursa dodatno osigurava egzemplifikacija kroz promišljenu izmjenu primjera i korištenje različitih reprezentacija. Na taj način učenici uočavaju strukturu pojmova, granice definicija i razlike između tipičnih primjera, rubnih slučajeva i protuprimjera. Reprezentacije u obliku riječi, simbola, grafova ili modela povezuju intuitivno razumijevanje s formalnim jezikom matematike i potiču generalizaciju [7]. Posebnu snagu imaju učiteljska pitanja „kako” i „zašto”, jer premještaju razgovor s pukog opisivanja postupaka prema obrazlaganju i opravdavanju tvrdnji. Takva pitanja otvaraju prostor za objašnjavajući govor i usmjeravaju učenike na matematičke kriterije, čime se produbljuje razumijevanje i potiče preciznost izražavanja [14], [15]. Diskurs postaje sadržajni kada se učitelj suzdrži od neposredne evaluacije i potiče učenike da sami procjenjuju valjanost ideja koje se iznose. Odgovornost se prenosi na razrednu zajednicu pa legitimacija odgovora postaje utemeljena na dokazima i definicijama umjesto na autoritetu učitelja. U tom procesu važnu ulogu imaju

zajednički artefakti, poput brojevni pravaca, plakata, modela ili bilješki na ploči, jer čine matematičke objekte vidljivima, usporedivima i dostupnima svima. Rasprave dobivaju jasnoću i smjer kada zadaci imaju jasno definiranu svrhu, a kriteriji uspjeha unaprijed su dogovoreni. Time se održava fokus na objektu učenja, a sudjelovanje učenika usmjerava prema postizanju zajedničkog cilja. Aktivnosti poput „razmisli–upari–podijeli“ ili kartica „teme za razgovor“ pridonose ravnomjernijem uključivanju svih učenika, smanjuju dominaciju pojedinaca i potiču iznošenje različitih ideja. U kombinaciji sa standardima odgovornog govora koji uključuju nadovezivanje na tuđe tvrdnje i obrazlaganje vlastitih, takve metode povezuju egzemplifikaciju s objašnjavajućim govorom i postupno uvode učenike u jezik i kriterije matematičke zajednice [14]. Zadaci s više mogućih rješenja i aktivnosti koje izazivaju kognitivni konflikt dodatno produbljuju diskurs jer otvaraju prostor za usporedbu različitih strategija i zahtijevaju preciznije definicije [16], [12]. Rad u skupinama i debate preusmjeravaju interakciju s odnosa učitelj–učenik na odnose među učenicima, čime se povećava angažman učenika i razvija suradničko, odnosno zajedničko razumijevanje. Digitalni alati šire mogućnosti egzemplifikacije jer omogućuju simultanu vidljivost različitih rješenja i time obogaćuju raspravu [16]. Sve navedene metode međusobno se nadopunjuju i omogućuju učitelju da integrira sve dimenzije okvira MDI: da objekt učenja bude stalno vidljiv, planira varijaciju primjera, sustavno potiče objašnjavajući govor i osigurava široko sudjelovanje učenika. Takav pristup pridonosi razvoju proceduralnog i konceptualnog znanja, koji se prema istraživanjima razvijaju iterativno i međusobno osnažuju [17]. Varijacija primjera i kriterijski vođena rasprava potiču generalizaciju, dok elaboracija i argumentacija povezuju postupke s pojmovima. Diskursno učenje pritom povećava oba tipa znanja [10], a rasprave olakšavaju povezivanje pojmova i algoritama [18]. Učenici razvijaju fleksibilnost i dublje razumijevanje usporedbom različitih strategija u okruženjima utemeljenima na diskursu [19], [20], [21]. Sfard [8] stoga naglašava da je razvoj znanja ujedno i razvoj diskursa.

C. *Poučavanje linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom*

Linearne jednadžbe predstavljaju prvi susret učenika s algebram te imaju posebno mjesto u nastavi matematike u višim razredima osnovne škole. Prema hrvatskom kurikulumu za nastavni predmet Matematika [9], linearne jednadžbe se u pravom smislu uvode u šestom razredu, kada su učenici u dobi od približno dvanaest godina. Učenici tada postupno prelaze s isključivo aritmetičkog računanja na algebarsko mišljenje. Do tog trenutka rješavali su jednostavnije zadatke u kojima se tražio nepoznati

član jednakosti, poput „ $\square + 7 = 15$ “ ili „ $36 : \square = 9$ “, u kojima se naglasak stavljao na dopunjavanje i razumijevanje aritmetičkih odnosa, a ne na apstraktno simboličko mišljenje.

Prema Piagetovoj teoriji kognitivnog razvoja, učenici u dobi od približno dvanaest godina nalaze se na prijelazu iz konkretno-operacijske u formalno-operacijsku fazu [22]. Tek tada su sposobni za sustavno apstraktno mišljenje, koje je nužno za razumijevanje jednadžbi u općem obliku. Pojmovi konzervacije i reverzibilnosti, koji se razvijaju u konkretno-operacijskoj fazi, temelj su za konceptualno shvaćanje jednadžbi jer bi učenik trebao razumjeti da se jednakost održava samo ako se na obje strane provede ista operacija. Proceduralno znanje, poput „prebacivanja članova jednadžbe“, može se razviti i ranije, ali bez konceptualne podloge ostaje površno.

Vygotski [23] ističe ulogu socijalne interakcije i zone proksimalnog razvoja. Prema njegovu shvaćanju, učenici mogu usvojiti i proceduralne i konceptualne aspekte rješavanja jednadžbi ranije, ukoliko dobiju odgovarajuću podršku. Uloga učitelja pritom nije samo demonstracija postupka, nego vođenje učenika kroz pitanja, argumentaciju i uspoređivanje. Na primjer, pitanje „Zašto smijemo oduzeti isti broj s obje strane jednadžbe?“ usmjerava učenike na dublje razumijevanje pojma ekvivalentnosti i povezuje proceduralne korake s konceptualnim znanjem.

Razlike između perspektiva Piageta i Vygotskog odražavaju se i u nastavnoj praksi. Prema Piagetu, učenici su za učenje linearnih jednadžbi spremni tek ulaskom u formalno-operacijsku fazu, dok prema Vygotskom, uz primjerenu podršku i diskurs, mogu i ranije stjecati znanja o rješavanju linearnih jednadžbi. Ove dvije perspektive nisu proturječne, već se nadopunjuju. Piaget upozorava na kognitivne granice, a Vygotski naglašava kako se te granice mogu proširiti kroz socijalno učenje.

U kontekstu linearnih jednadžbi, prema definicijama Hiebert i Lefevre [1], konceptualno znanje podrazumijeva razumijevanje da jednadžba predstavlja ravnotežu i da se operacije moraju simetrično primijeniti, dok proceduralno znanje znači ovladavanje tehnikama poput zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja jednadžbe nekim brojem odnosno djelovanjem inverznih operacija kako bi se izračunala vrijednost nepoznanice. Uvođenje linearnih jednadžbi u nastavu tako otvara prostor za razumijevanje pojmova jednakosti i ekvivalentnosti te za prijelaz između različitih prikaza poput simboličkih, grafičkih, tabličnih i kontekstualnih. Upravo zato linearne jednadžbe predstavljaju idealan sadržaj za istraživanje odnosa konceptualnog i proceduralnog znanja, ali i

proceduralne fleksibilnosti, koja podrazumijeva poznavanje više strategija rješavanja i svjesno odabiranje najprimjerenije. Istraživanja pokazuju da učenici često znak jednakosti doživljavaju operacijski, u smislu da im on predstavlja uputu da računaju dalje, umjesto relacijski, u smislu da lijeva i desna strana jednakosti izražavaju istu vrijednost [24]. To dovodi do pogrešaka poput rješavanja zadatka $8 + 4 = __ + 5$ na način da učenici na praznu crtu napišu broj 12, jer smatraju da jednakost znači nastavak računanja. Ova pogrešna interpretacija može se javiti već u nižim razredima i zadržati se kroz cijelu osnovnu školu, a često i kasnije. Stoga je razjašnjavanje koncepta jednakosti ključni preduvjet za razvoj konceptualnog znanja.

U literaturi se proceduralna fleksibilnost često opisuje kao treća dimenzija znanja, uz konceptualno i proceduralno [25]. Dok proceduralno znanje podrazumijeva kako nešto napraviti, a konceptualno zašto to radimo, fleksibilnost dodaje dimenziju koja odgovara na pitanja kada i koju metodu izabrati. Istraživanja pokazuju da upravo fleksibilnost razlikuje učenike koji su sposobni rješavati različite vrste zadataka od onih koji se oslanjaju na mehaničko ponavljanje [26], [27]. Schneider i suradnici [25] u longitudinalnim istraživanjima pokazuju da je fleksibilnost snažno povezana s razvojem matematičkog rasuđivanja i da učenici koji uče uspoređivati metode rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom razvijaju sposobnost generalizacije. To znači da njihovo znanje ne počiva isključivo na naučenom i uvježbanom algoritmu, već oni razumiju širi skup matematičkih odnosa, što im pomaže i u složenijim domenama poput rješavanja kvadratnih jednadžbi ili sustava jednadžbi.

Ngu i Phan [28] analiziraju problem fleksibilnosti kroz teoriju kognitivnog opterećenja. U praksi se najčešće razlikuju dvije metode poučavanja jednadžbi: balansna i inverzna metoda. Balansna metoda polazi od ideje vage, odnosno jednadžba se promatra kao vaga u ravnoteži pa se svaka operacija mora provesti na obje strane kako bi se očuvala jednakost, odnosno ravnoteža (npr. „oduzmi 3 s obje strane”). Inverzna metoda oslanja se na primjenu inverznih operacija s ciljem izoliranja nepoznanice, a postupak se često pojednostavljuje pravilom „promijeni stranu – promijeni predznak”. Njihovo istraživanje pokazalo je da inverzna metoda može biti kognitivno manje zahtjevna i učinkovitija kod složenijih jednadžbi, dok balansna metoda snažnije naglašava koncept jednakosti, stoga obje imaju komplementarnu ulogu u nastavi. Ako učenici uče samo inverznom metodom, mogu steći proceduralnu rutinu bez dubljeg razumijevanja, a ako uče samo balansnom metodom, postupci im se mogu činiti presporima. Kada učitelj koristi obje metode, uspoređuje ih i potiče raspravu, učenici razvijaju

vještinu biranja strategija koje su brže i učinkovitije, ali razumiju i alternativne pristupe.

Salifu [29] pokazuje da manipulativi poput vage i algebarskih pločica razvijaju ne samo konceptualno razumijevanje nego i fleksibilnost. Kada učenici fizički manipuliraju pločicama, često spontano razviju različite strategije poput grupiranja članova, faktorizacije, distributivnosti i slično. Ključna je učiteljska uloga da prepozna te različite pristupe i usmjeri raspravu tako da učenici shvate kako svi načini rješavanja vode do istog rješenja.

Važan aspekt fleksibilnosti je i učenje iz pogrešaka. Rittle-Johnson i Star [26] ističu da kada učenici uspoređuju pogrešne i ispravne postupke, ne samo da izbjegavaju tipične pogreške u budućnosti, nego i razvijaju sposobnost procjenjivanja kvalitete postupaka.

Uloga diskursa posebno je izražena u povezivanju proceduralnog i konceptualnog znanja. Rasprave, usporedbe i objašnjavanja omogućuju učenicima da razumiju ne samo kako se pojedini postupci provode, već i zašto oni funkcioniraju. Rittle-Johnson i Star [26] su pokazali da usporedba različitih strategija rješavanja iste jednadžbe potiče razvoj proceduralnog znanja i fleksibilnosti. Durkin i suradnici [28] nadogradili su ovu ideju kroz pristup uspoređivanja i raspravljanja o više strategija, pri čemu su postignuti mjerljivi pomaci u proceduralnoj fleksibilnosti i konceptualnom razumijevanju učenika srednjoškolskog uzrasta.

Dakle, diskurs u nastavi matematike nije samo način komunikacije, nego i sredstvo povezivanja različitih tipova znanja. Kada učenici argumentiraju postupke, oni povezuju proceduralne korake s konceptualnim principima. Na primjer, pitanje „Zašto možemo dodati isti broj na obje strane jednadžbe?” zahtijeva od učenika da iz proceduralne radnje izvuku konceptualno opravdanje. Time diskurs postaje most između „kako“ i „zašto“ [30], [31].

Istraživanja Akdoğan [30] te Dohle i Prediger [31] naglašavaju važnost jezičnih sredstava i diskursnih praksi u izgradnji razumijevanja pojma ekvivalentnosti. Rasid i suradnici [32] su pokazali da primjena različitih diskursnih stilova može značajno unaprijediti konceptualno razumijevanje algebre. Posebno naglašavaju važnost učiteljskih poteza kojima se oblikuje matematički razgovor u razredu. Među njima se ističe preoblikovanje učenikovih ideja, pri čemu učitelj ponavlja učenikov odgovor koristeći precizniji matematički jezik, zatim isticanje kontrasta, koje uključuje pokazivanje zašto pogrešan postupak narušava ravnotežu jednadžbe, te pregovaranje o značenju, kroz raspravu o tome što zapravo znači „rješenje jednadžbe”. Korištenjem takvih postupaka učitelj stvara učionicu kao

zajednicu učenja u kojoj se naglasak stavlja na argumentaciju i razumijevanje, a ne isključivo na dobivanje točnog rezultata.

Unatoč tome, analiza 108 sati nastave algebre u SAD-u koju je provela Litke [33] pokazuje da nastava matematike i dalje u velikoj mjeri ostaje učiteljski usmjerena, s malo prilika za aktivno uključivanje učenika u matematički diskurs i razvoj dubljeg razumijevanja, odnosno potencijal diskursa se ne iskorištava u dovoljnoj mjeri

Iz svega navedenoga razvidno je da istraživanja posljednja dva desetljeća ukazuju da diskursne metode poučavanja, poput objašnjavanja vlastitog razmišljanja, opravdavanja postupaka, uspoređivanja strategija i vođene matematičke rasprave, značajno doprinose razumijevanju linearnih jednadžbi [26], [27], [33]. Kako bi poučavanje jednadžbi u školama bilo učinkovitije, potrebno je sustavno educirati učitelje o diskursnim metodama. Time se omogućuje unaprjeđivanje nastavnih praksi i dugoročna izgradnja razredne kulture u kojoj učenici uče kroz raspravu, argumentaciju i zajedničko konstruiranje znanja.

III. PLAN ISTRAŽIVANJA

A. Cilj istraživanja

Glavni cilj istraživanja je ispitati učinak diskursne nastave na razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja učenika šestog razreda o linearnim jednadžbama s jednom nepoznicom te na promjene u praksi učitelja nakon edukacije.

Edukacija učitelja usmjerena je na učinkovite diskursne prakse u nastavi matematike i na poučavanje linearnih jednadžbi tako da se iterativno razvija i konceptualno i proceduralno znanje. Istraživanje želi utvrditi u kojoj mjeri takve prakse doprinose razumijevanju pojma jednakosti i razvoju učinkovitih proceduralnih strategija te kako se odražavaju na učiteljske postupke, od odabira zadataka do vođenja matematičkog razgovora. Na taj se način provjerava može li diskursna nastava, u odnosu na tradicionalni pristup, ponuditi održiv model za unaprjeđenje kvalitete učenja i poučavanja matematike kao i profesionalnog razvoja učitelja.

B. Istraživačka pitanja

U skladu s navedenim ciljem istraživanje će se voditi sljedećim istraživačkim pitanjima:

1. Kako edukacija učitelja o diskursnoj nastavi utječe na njihovo poučavanje linearnih jednadžbi?

2. Kakav je učinak diskursne nastave na konceptualno znanje učenika u odnosu na tradicionalnu nastavu?
3. Kakav je učinak diskursne nastave na proceduralno znanje učenika u odnosu na tradicionalnu nastavu?

C. Edukacija učitelja

Uspješna provedba svakog novog pristupa u obrazovanju uvelike ovisi o kvaliteti profesionalnog razvoja učitelja. Kada je riječ o diskursnoj nastavi matematike, uloga učitelja posebno je naglašena jer upravo oni oblikuju komunikacijske obrasce u učionici, biraju vrste pitanja, odlučuju o razini uključenosti učenika i kreiraju kulturu matematičkog razgovora. Dosadašnja istraživanja jasno pokazuju da učiteljski diskurs, način na koji se postavljaju pitanja i vrednuju učenikovi odgovori te korištenje različitih reprezentacija, presudno utječu na to hoće li učenici matematiku doživjeti kao mehaničko izvršavanje postupaka ili kao područje smislenih pojmovnih odnosa [7], [20], [34].

U hrvatskim učionicama i dalje prevladava učiteljski usmjeren komunikacijski obrazac, pri čemu učitelj govori znatno više od učenika, dok je prostor za objašnjenja i pitanja učenika u raspravi ograničen. Istraživanja provedena u nastavi Hrvatskoga jezika potvrđuju snažnu ulogu učitelja u vođenju interakcije i u učionici i u online okruženju [35]. Dodatni izazov donose podaci iz PISA 2022 istraživanja [36] prema kojima je kod hrvatskih učenika mjerljivo prisutan strah od matematike ($HR = 0,11$; $OECD$ prosjek = $0,17$), uz zabrinutost oko težine nastavnog gradiva i mogućnosti dobivanja loše ocjene. Također, podaci iz ovog istraživanja pokazuju da učenici u prosjeku samo oko polovice vremena tijekom nastave matematike aktivno sudjeluju u raspravama i postavljaju pitanja kada ne razumiju gradivo [36]. Istraživanja na studentskoj populaciji u Hrvatskoj također potvrđuju da sudjelovanje u raspravama ne ovisi samo o individualnim čimbenicima poput samopouzdanja i straha od pogreške, nego i o razrednoj klimi i ponašanju učitelja [37]. To znači da je komunikacijska kultura učionice ključna za oblikovanje sudjelovanja i spremnosti učenika da preuzmu aktivniju ulogu. S druge strane, kurikulum nastavnog predmeta Matematika eksplicitno promiče sudjelovanje u raspravama kao poželjan ishod učenja, naglašavajući jednakost pristupa i participacije svih učenika [9].

Kao što naglašava MDI okvir, diskurs u nastavi matematike treba promatrati kroz više dimenzija: jasno isticanje objekta učenja, korištenje primjera i zadataka koji otvaraju prostor za raspravu, učiteljski govor koji potiče objašnjavanje te sustavno uključivanje učenika u zajedničko građenje značenja

[7]. Upravo ove dimenzije mogu poslužiti kao orijentacija za planiranje edukacije učitelja.

Međunarodna literatura snažno naglašava važnost profesionalnog razvoja učitelja za implementaciju diskursne nastave. Dogbey [38] pokazuje da učitelji koji su sudjelovali u programima usmjerenima na poticanje inventiranih strategija učenika, tj. strategija rješavanja matematičkih problema koje razvijaju sami učenici, a nisu unaprijed zadane od strane učitelja ili iz udžbenika, i raspravu o njima, razvijaju osjetljivost za prepoznavanje vrijednosti različitih rješenja i aktivno uključuju učenike u proces argumentiranja. Chen i suradnici [39] su istražili učinkovitost profesionalnog razvoja temeljenog na video-analizi i zaključili da učitelji kroz zajedničko promatranje i refleksiju video-zapisa vlastite i tuđe nastave razvijaju sofisticiranije strategije postavljanja pitanja i vođenja dijaloga. Ovi nalazi jasno upućuju na potrebu da edukacija učitelja bude interaktivna i refleksivna, a ne samo informativna. Učitelji trebaju imati priliku vidjeti primjere uspješnih diskursnih praksi, analizirati ih, diskutirati o njima te planirati i uvježbavati vlastite postupke.

Polazište za edukaciju učitelja u ovom istraživanju jest spoznaja da hrvatski obrazovni kontekst nosi specifične izazove, od učiteljski usmjerene komunikacije do povišene razine matematičke anksioznosti kod učenika, ali i da postoji jasna kurikulumska i istraživačka podloga koja promiče veću participaciju i dijalog u nastavi. Međunarodna istraživanja pružaju snažne dokaze da diskursna nastava pozitivno djeluje na razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja, a profesionalni razvoj učitelja ključan je za promjenu prakse. Edukacija koju ovo istraživanje predviđa stoga ima dvostruku svrhu: osnažiti učitelje da koriste učinkovite diskursne prakse i omogućiti učenicima da aktivnim sudjelovanjem u matematičkom razgovoru razvijaju i konceptualno i proceduralno znanje.

Planirana edukacija učitelja osmišljena je kao kombinacija teorijskih i praktičnih modula u obliku predavanja i radionica. Struktura edukacije oblikovana je tako da omogućí postupno upoznavanje učitelja s konceptom diskursne nastave, razvijanje novih scenarija poučavanja linearnih jednadžbi te refleksiju vlastite prakse.

Edukacija će se provoditi u četiri međusobno povezana modula prije početka same intervencije u nastavi. Svaki modul trajat će po četiri sata, što čini ukupno 16 sati edukacije. Organizacija je zamišljena kao interaktivni online program, pri čemu će se teorijski sadržaji i praktične radionice provoditi u virtualnom okruženju koje omogućuje suradnju, razmjenu iskustava i zajedničku analizu nastavnih primjera, a ovakav oblik rada osigurava uključivanje učitelja iz različitih dijelova Hrvatske. Odabir trajanja temelji se na istraživanjima koja pokazuju da

programi srednje duljine (16–30 sati) omogućuju mjerljive učinke na učiteljsko ponašanje i ishode učenika. Ni i suradnici [40] proveli su intervenciju u Hong Kongu s 28 sati edukacije i pokazali značajne promjene u učiteljskim praksama, dok su Yimman Legesse i Kelkay [10] u programu od 6 sati zabilježili kratkoročne pomake, uz naglasak da je za dugotrajnije promjene nužna dulja edukacija učitelja. Durkin i suradnici [20] izvještavaju o 35 sati edukacije u sklopu ljetnog programa, što je omogućilo dublje promjene u praksi. U usporedbi s tim modelima, predloženo trajanje od 16 sati u ovom istraživanju predstavlja uravnotežen pristup jer je trajanje edukacije dovoljno dugo da omogućí upoznavanje teorije, analizu prakse i izradu vlastitih scenarija, ali i izvedivo u hrvatskom školskom kontekstu.

Cjelokupna edukacija završava prije početka intervencije u razredima, čime se osigurava da učitelji eksperimentalne skupine ulaze u provedbu već pripremljeni i osnaženi.

Umjesto isključivo frontalnog predavanja naglasak je na aktivnom uključivanju učitelja kroz analizu pisanih transkripata učioničkog dijaloga i scenarija preuzetih iz istraživanja i literature, raspravu o učiteljskim pitanjima i interakcijama [41], modeliranje i uvježbavanje diskursnih praksi u manjim grupama [38] i kolektivnu izradu scenarija poučavanja u skladu s MDI okvirom [7]. Edukacija će se sastojati od 4 modula: teorijski temelj, analiza prakse, radionice za izradu scenarija poučavanja, refleksija i evaluacija. U prvom modulu učitelji će se upoznati s pojmom diskursne nastave, razlikama između proceduralnog i konceptualnog znanja s naglaskom na linearne jednadžbe, te pregledom istraživanja koja potvrđuju učinkovitost ovih pristupa. U drugom modulu zajednički će proučavati i raspravljati o pisanim transkriptima učioničkog diskursa, primjerima zadataka i pitanja koji potiču različite diskursne prakse, te analizirati scenarije poučavanja linearnih jednadžbi. Tijekom trećeg modula učitelji će u skupinama ili parovima, ovisno o broju, razviti planove za poučavanje linearnih jednadžbi koji uključuju učinkovite diskursne prakse. U četvrtom modulu učitelji će testirati osmišljene aktivnosti unutar edukacije, tj. u simuliranim uvjetima, voditi refleksivne bilješke i ponovno se sastati radi evaluacije i dorade praksi. Tek nakon završetka svih modula, kreće se u eksperimentalnu fazu intervencije s učenicima.

Struktura edukacije koja kombinira teoriju i praksu osigurava iterativno učenje (pokušaj – refleksija – dorada) i omogućuje učiteljima da uče jedni od drugih. Prema istraživanjima, ovakav model vodi do dugotrajnijih promjena u praksi jer učitelji ne ostaju na usvajanju novog znanja, već ga odmah prevode u vlastitu nastavnu praksu [38], [39].

Edukacija će obuhvatiti učinkovite diskursne prakse koje istraživanja prepoznaju kao ključne za unaprijeđenje razumijevanja učenika: jasno isticanje objekta učenja, korištenje zadataka koji otvaraju prostor za raspravu, te postavljanje pitanja koja potiču objašnjavanje i opravdavanje [7], [41]. Poseban naglasak bit će na tome kako učitelji mogu povezivati jezik, modele i simboličke zapise u poučavanju linearnih jednadžbi, jer upravo ta povezanost omogućuje razvoj i konceptualnog i proceduralnog znanja [42]. Važan dio edukacije bit će posvećen i učiteljskim komunikacijskim postupcima kojima se otvara prostor za veće sudjelovanje učenika. Istraživanja pokazuju da nastava u kojoj učenici imaju priliku argumentirati, postavljati pitanja i raspravljati o različitim pristupima povećava njihovu fleksibilnost u rješavanju problema i razumijevanje pojma jednakosti [20], [30]. Učitelji će također raditi na razvijanju osjetljivosti za afektivnu dimenziju diskursa, tj. na tome kako komunikacijski obrasci u razredu utječu na emocionalni doživljaj matematike. To uključuje osjećaj sigurnosti učenika pri iznošenju ideja, njihovo samopouzdanje, spremnost na rizik u učenju i razinu matematičke anksioznosti. Budući da su u hrvatskom kontekstu izraženi strah i zabrinutost povezani s matematikom [36], u edukaciji će se naglašavati važnost stvaranja klime u kojoj se vrednuje pokušaj i objašnjenje, a ne samo točan rezultat. Takva atmosfera pridonosi ne samo kognitivnom, nego i motivacijskom razvoju učenika. Na taj način učitelji će tijekom edukacije stjecati konkretne alate za oblikovanje okruženja za učenje u kojem se učenici osjećaju sigurno izražavati svoje ideje, postavljati pitanja i sudjelovati u matematičkim raspravama bez straha od pogreške i reakcije vršnjaka ili učitelja.

Jedan od središnjih dijelova edukacije bit će usmjeren na učiteljska pitanja i obrasce interakcije, jer upravo oni određuju kvalitetu diskursa u učionici. Istraživanja pokazuju da tip pitanja koje učitelj postavlja značajno utječe na to hoće li učenici ostati pasivni ili će se aktivno uključiti u objašnjavanje i argumentiranje [11], [12], [41]. U edukaciji će se osobito razlikovati dvije vrste pitanja koje se često suprotstavljaju: usmjeravajuća i fokusirajuća. Kod usmjeravajućeg pristupa učitelj vodi učenika nizom pitanja prema unaprijed određenom rješenju što često rezultira time da učenici izvršavaju upute bez razumijevanja. Suprotno tome, fokusirajuća pitanja traže od učenika da obrazlože vlastite postupke, opravdaju ih i usporede s drugim mogućim rješenjima. Primjeri fokusirajućih pitanja koje će učitelji vježbati u edukaciji uključuju: „*Možeš li objasniti zašto si odabrao tu operaciju?*“, „*Kako znaš da je tvoj rezultat točan?*“ ili „*Postoji li drugi način rješavanja?*“ [41]. Poseban naglasak u edukaciji bit će i na osvještavanju i izbjegavanju obrazaca interakcije tipa IRE (inicijacija–odgovor–evaluacija), gdje učitelj nakon učenikovog odgovora

odmah daje potvrdu ili odbacivanje. Takav obrazac brzo zatvara razgovor i ograničava prilike za argumentaciju. Učitelji će, umjesto toga, vježbati strategije za proširivanje rasprave poput poticanja drugih učenika da komentiraju ili nadopune odgovor, zadržavanja učenika u objašnjavanju umjesto brzog prelaska na idući zadatak, te zajedničke izgradnje značenja unutar razreda [7], [20]. S tim ciljem će se tijekom edukacije provoditi analiza pisanih transkripata učioničkih razgovora i zadataka koji ilustriraju razliku između usmjeravajućih i fokusirajućih pitanja. Učitelji će raditi suradnički, raspravljati o učincima različitih pitanja na učeničko razmišljanje i zatim preoblikovati pitanja tako da potiču dublje objašnjavanje. Cilj ovog dijela edukacije jest da učitelji steknu osjetljivost na vlastite obrasce interakcije i razviju bazu pitanja koja ne samo da vode učenike prema rješenju, nego i otvaraju prostor za razumijevanje, argumentaciju i međusobno nadovezivanje učenika. Na taj način pitanja postaju alat za razvoj i proceduralnog i konceptualnog znanja.

Treći sadržaj edukacije usmjeren je na to kako učitelji mogu uravnoteženo razvijati i proceduralno i konceptualno znanje učenika u području linearnih jednadžbi. Istraživanja pokazuju da se ova dva oblika znanja ne razvijaju odvojeno, već su u dinamičnom odnosu jer procedura može voditi dubljem razumijevanju, a razumijevanje pojmova može olakšati izbor i primjenu učinkovitih postupaka [10], [20]. U edukaciji će se učitelji upoznavati s primjerima zadataka i nastavnih postupaka u kojima se ta povezanost jasno vidi. Poseban naglasak bit će na diskursnim strategijama koje pomažu učenicima da sami otkriju vezu između postupka i pojma. Na primjer, nakon rješavanja jednadžbe primjenom inverzne metode učitelj može pitati „*Zašto je dozvoljeno oduzeti isti broj s obje strane?*“, čime povezuje postupak s pojmom jednakosti dok pri korištenju balansnog modela može potaknuti raspravu o tome što znači ravnoteža i kako se simbolički zapis jednadžbe može interpretirati kao uravnotežena vaga. Uloga edukacije nije samo u predstavljanju metoda, nego i u poticanju učitelja da razmišljaju kako odabrati zadatke koji podržavaju obje dimenzije znanja. Učitelji će tijekom edukacije raditi i na preoblikovanju zadataka tako da oni ne vode isključivo mehaničkom računanju, nego otvaraju prostor za pitanja „zašto“ i „kako“, čime se procedura povezuje s konceptom. Time se gradi nastava u kojoj učenici ne samo da znaju postupke, nego razumiju i matematičke ideje koje ti postupci odražavaju.

Prema nalazima projekta METE [42], balansna metoda ključna je za razumijevanje pojma jednakosti. Ona učenicima omogućuje da jednadžbu shvate kao ravnotežu dviju strana, a svaka operacija na jednoj strani mora biti praćena istom operacijom

na drugoj. Edukacija će uključivati praktične zadatke u kojima učitelji koriste vizualne modele, poput vage i algebarskih pločica, i potiču raspravu o tome što znači „očuvanje ravnoteže“. Rasprava će uključivati pitanja poput: „Što se događa s vagom ako uklonimo uteg samo s jedne strane?“ ili „Zašto je potrebno isti broj dodati/oduzeti s obje strane?“. Ovakva pitanja otvaraju prostor za izgradnju konceptualnog razumijevanja jednakosti. S druge strane, u hrvatskoj praksi često prevladava inverzna metoda, gdje se postupak temelji na primjeni inverznih operacija radi izolacije nepoznanice. Na primjer, u jednadžbi $3x + 7 = 19$ prvo oduzmemo 7, a zatim podijelimo s 3. Ova metoda razvija proceduralnu fluentnost i brzinu rješavanja zadataka. U edukaciji će se naglašavati da inverzna metoda nije pogrešna, već da ima vrijednost za proceduralno znanje, ali da je bez konceptualne podloge učenici doživljavaju mehanički. Edukacija će uključivati zadatke u kojima se ista jednadžba rješava i balansnom i inverznom metodom. Učitelji će zatim vježbati vođenje rasprave o tome kada je balansna metoda korisna (npr. za uvod i vizualizaciju pojma jednakosti), kada je inverzna metoda brža i učinkovitija (npr. za složenije jednadžbe) te kontinuirano naglašavati ekvivalentnost početne jednadžbe i jednadžbe dobivene djelovanjem dozvoljenim potezima na nju. Takva diskusija pomaže razvijati proceduralnu fleksibilnost učenika, što istraživanja ističu kao važan pokazatelj dubinskog matematičkog razumijevanja [20]. Rittle-Johnson i Star [26] naglašavaju da usporedba metoda rješavanja i razgovor o njima razvija sposobnost učenika da odaberu najprikladniju strategiju u određenom kontekstu. Poseban naglasak bit će na vrsti pitanja kojima se dvije metode povezuju te će učitelji na ovaj način učitelji stjecati vještine kako pretvoriti poučavanje linearnih jednadžbi u dijaloški proces, a ne samo niz proceduralnih koraka. Osim toga, u edukaciji će se koristiti pristupi preuzeti iz istraživanja o opravdavanju postupaka i zaključaka. Morgan i suradnici [34] ističu da profesionalni razvoj treba naglašavati ne samo izvođenje postupaka, već i poticanje učenika da opravdaju i objasne svoja rješenja.

Edukacija učitelja u ovom istraživanju nije zamišljena kao jednokratno prenošenje informacija, već kao proces profesionalnog razvoja u kojem učitelji postupno mijenjaju vlastite nastavne prakse. Dogbey [38] naglašava važnost stvaranja prostora u kojem učitelji mogu promišljati o strategijama učenika i njihovim objašnjenjima jer rezultira mijenjanjem njihove uloge na način da od prenositelja znanja postaju voditelji zajedničkog građenja matematičkih ideja. Chen i suradnici [39] su pokazali da je učinkovit oblik profesionalnog razvoja onaj u kojem učitelji imaju priliku analizirati primjere učioničkog diskursa, u njihovom slučaju kroz video-zapise s nastave, a u ovom istraživanju kroz dostupne pisane transkripte, i zajednički promišljati o tome kako pitanja i interakcije utječu

na učenje. Ova vrsta kolektivne refleksije povećava osjetljivost učitelja na kvalitetu vlastitog diskursa. Ni i suradnici [40] proveli su 28-satnu intervenciju u Hong Kongu i dokazali da se učiteljski diskurs može sustavno mijenjati na način da se smanjuje sklonost brzom evaluiranju odgovora, a povećava poticanje učenika da komentiraju i da se nadovezuju na tuđe ideje. Takve promjene u učiteljskoj praksi bile su povezane i s većim uključivanjem učenika u rasprave.

Važan element profesionalnog razvoja je i refleksija kroz pisane dnevnike i bilješke. U edukaciji će učitelji voditi kratke refleksivne zapise nakon primjene pripremljenih scenarija u simuliranim uvjetima s kolegama koji također sudjeluju u edukaciji. Time se omogućuje praćenje vlastitog napretka, ali i dijeljenje iskustava s kolegama u grupi. Konačni cilj ovog dijela edukacije jest osnažiti učitelje da razviju trajnu refleksivnu praksu kako bi učinkovito prepoznavali kvalitetne diskursne postupke, planirali ih u svojim scenarijima, evaluirali njihovu provedbu i na temelju toga unaprjeđivali vlastito poučavanje. Takav pristup osigurava da edukacija ne ostane izolirano iskustvo, nego poticaj za dugoročnu promjenu u profesionalnom razvoju učitelja.

Cilj planirane edukacije je, dakle, osnažiti učitelje za primjenu konkretnih scenarija poučavanja linearnih jednadžbi koji povezuju konceptualno i proceduralno znanje kroz učinkovite diskursne prakse, ali i potaknuti promjenu njihove uloge od prenositelja znanja prema facilitatorima matematičkog razgovora te stvarateljima poticajnog i sigurnog okruženja u kojem se učenici osjećaju slobodno aktivno sudjelovati, postavljati pitanja i iznositi vlastita mišljenja, čime se otvara put prema održivijem modelu učenja i poučavanja matematike u skladu s kurikularnim smjernicama i potrebama učenika.

D. Intervencija u nastavi

Intervencija se provodi nakon završetka edukacije učitelja kako bi se ispitalo na koji način osposobljavanje za diskursne prakse utječe na poučavanje linearnih jednadžbi i na ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda kod učenika. Struktura intervencije temelji se na usporedbi postignuća učenika eksperimentalne skupine učitelja, koji nakon edukacije primjenjuju naučene strategije, i postignuća učenika kontrolne skupine učitelja, koji nastavljaju poučavati prema svojim uobičajenim metodama.

U istraživanju će sudjelovati učitelji matematike koji predaju šestim razredima osnovne škole. Planira se uključivanje najmanje šest učitelja u eksperimentalnu i šest u kontrolnu skupinu, pri čemu će svaki učitelj raditi s jednim ili dva razreda. Uzorak će obuhvatiti razrede različitih školskih sredina

(urbane i ruralne škole) kako bi se osigurala raznolikost konteksta. Učenici će u prosjeku biti u dobi od 12 godina.

Trajanje intervencije nije strogo unaprijed zadano, već se prilagođava godišnjem izvedbenom kurikulumu i planiranju učitelja. Predviđen raspon je od 6 do 12 nastavnih sati, što pokriva obradu linearnih jednadžbi u šestom razredu. Time se uzima u obzir različita dinamika poučavanja među učiteljima, ali se osigurava dovoljno nastavnog vremena da se mogu uočiti učinci primjene diskursnih praksi.

Učitelji u eksperimentalnoj skupini provodit će nastavu linearnih jednadžbi koristeći pripremljene nastavne scenarije i materijale izrađene tijekom edukacije. Ovi scenariji uključuju balansnu i inverznu metodu, vođene rasprave o ekvivalentnosti, korištenje vizualnih modela i učiteljska pitanja koja potiču objašnjavanje i opravdavanje. Učitelji će se poticati na prilagodbu scenarija vlastitom stilu rada, ali uz očuvanje osnovnih diskursnih načela. U kontrolnoj skupini učitelji će nastavu izvoditi prema vlastitim uobičajenim metodama, bez unaprijed pripremljenih scenarija. Time se osigurava usporedba između diskursno usmjerene i tradicionalno usmjerene nastave.

E. Instrumenti i prikupljanje podataka

Kako bi se istražili učinci edukacije i intervencije, primijenit će se kombinacija kvantitativnih i kvalitativnih instrumenata. Ovaj pristup omogućuje dublje razumijevanje promjena u učenikom znanju i učiteljskoj praksi te triangulaciju podataka iz različitih izvora.

1. Pre-test i post-test za učenike

Za učenike će biti izrađeni pre-test i post-test, usklađeni s odgojno-obrazovnim ishodima prema kurikulumu nastavnog predmeta Matematike [4]. Testovi će sadržavati zadatke koji mjere i konceptualno znanje (razumijevanje jednakosti, sposobnost objašnjavanja postupaka, uočavanje odnosa među članovima jednadžbe) i proceduralno znanje (točno izvođenje postupaka, brzina i točnost u rješavanju jednadžbi). Korištenjem istih tipova zadataka u pre-testu i post-testu mjerit će se napredak učenika tijekom intervencije.

2. Učiteljski dnevnik

Svi učitelji, i u eksperimentalnoj i u kontrolnoj skupini, vodit će učiteljske refleksivne dnevnike. Eksperimentalna skupina usmjeravat će se na refleksiju o primjeni diskursnih praksi, učeničkim reakcijama i preprekama u vođenju rasprava. Kontrolna skupina bilježit će tijekom nastavnih sati, korištene metode i opažanja o učenikovom sudjelovanju, ali bez eksplicitnog fokusiranja na

diskurs. Time se dobiva komparativni uvid u učiteljska iskustva u dvjema skupinama.

3. Upitnici za učitelje

Planira se i primjena upitnika za učitelje. Prvi dio upitnika odnosit će se na stavove i uvjerenja vezane uz diskursnu nastavu. Drugi dio obuhvatit će načine poučavanja linearnih jednadžbi i preferenciju određenih metoda. Treći dio bavit će se procjenama važnosti konceptualnog i proceduralnog znanja, odnosno ravnoteže između njih. Upitnici će se primijeniti u tri faze: prije edukacije, nakon edukacije i nakon završetka intervencije. Na ovaj način pratit će se promjena u stavovima i uvjerenjima učitelja kroz cijeli tijek istraživanja. Time se ne procjenjuje samo utjecaj na učeničke ishode učenja, nego i promjene u učiteljskoj praksi i stavovima. Učitelji iz kontrolne skupine ispunit će upitnike istovremeno s provođenjem post-testa za učenike.

4. Polustrukturirani intervjui

Kako bi se dublje razumjeli razlozi učiteljskih odabira i iskustava, s manjim brojem učitelja iz obje skupine provest će se polustrukturirani intervjui nakon završetka intervencije. Intervjui će se fokusirati na sljedeća pitanja: Kako su učitelji doživjeli primjenu diskursnih praksi (eksperimentalna skupina) ili nastavu linearnih jednadžbi na uobičajen način (kontrolna skupina)? Koje su prepreke i poticaji za implementaciju diskursne nastave u redovnom kurikulumu? Na koji način su učenici reagirali na različite nastavne pristupe? Na ovaj način intervencija omogućuje višeslojno prikupljanje podataka koje je i kvantitativno i kvalitativno.

5. Promatranje nastave

Kao dodatni instrument, u nekoliko razreda provest će se strukturirano promatranje nastavnih sati. Promatranja će se temeljiti na unaprijed definiranim kategorijama kao što su: broj i tip učiteljskih pitanja, duljina učenikovih odgovora, učestalost opravdavanja postupaka. Ovaj podatak poslužit će za triangulaciju nalaza iz testova, upitnika i dnevnika.

F. Plan analize podataka

Analiza prikupljenih podataka provodit će se kombinacijom kvantitativnih i kvalitativnih metoda, kako bi se obuhvatili i učinci intervencije na znanje učenika i promjene u učiteljskoj praksi.

1. Analiza testova učenika

Rezultati pre-testa i post-testa koristit će se za procjenu učinka intervencije na konceptualno i proceduralno znanje učenika. Za svaku skupinu (eksperimentalnu i kontrolnu) izračunat će se aritmetičke sredine i standardne devijacije rezultata,

posebno za konceptualno i za proceduralno znanje. Usporedba napretka između skupina provest će se korištenjem t-testa za zavisne uzorke (pre-post unutar iste skupine) i t-testa za nezavisne uzorke (razlike između eksperimentalne i kontrolne skupine).

2. Analiza učiteljskih dnevnika

Dnevnici će se analizirati kvalitativno. Kodiranje će obuhvatiti kategorije kao što su: tipovi korištenih pitanja (usmjeravajuća, otvorena), obrasci interakcije (učitelj–učenik, učenik–učenik), refleksije o učeničkoj participaciji, prepreke i uspjesi u primjeni diskursnih praksi. Usporedba eksperimentalne i kontrolne skupine omogućit će uvid u to kako se različiti pristupi poučavanju odražavaju na opažanja učitelja i dinamiku u razredu.

3. Analiza upitnika za učitelje

Podaci iz upitnika analizirat će se deskriptivnom statistikom (frekvencije, prosjeci, standardne devijacije) i inferencijalnom statistikom (usporedbe skupina, korelacijske analize). Analizirat će se promjene u stavovima i uvjerenjima učitelja o diskursnoj nastavi, o načinima poučavanja linearnih jednadžbi i o ravnoteži konceptualnog i proceduralnog znanja. Posebna pažnja posvetit će se longitudinalnoj usporedbi odgovora u tri faze (prije edukacije, nakon edukacije i nakon intervencije), što omogućuje praćenje pomaka u stavovima kroz vrijeme.

4. Analiza intervjua

Polustrukturirani intervjui transkribirat će se i analizirati metodom kvalitativne analize sadržaja. Fokus će biti na identifikaciji percepcije učitelja o izvedivosti diskursne nastave, doživljenim preprekama i olakšavajućim čimbenicima, opažanjima o reakcijama učenika na različite nastavne pristupe. Ovi podaci koristit će se za dublje razumijevanje nalaza iz kvantitativne analize i kontekstualizaciju razlika između eksperimentalne i kontrolne skupine.

5. Analiza promatranja nastave

Podaci iz promatranja kvantificirat će se kroz unaprijed definirane kategorije (npr. broj učiteljskih pitanja, duljina učenikovih odgovora). Analiza će se temeljiti na frekvencijama i usporedbama između skupina, a kombinirat će se i s kvalitativnim opisima iz promatračkih bilješki.

6. Triangulacija podataka

Rezultati kvantitativnih i kvalitativnih analiza integrirat će se metodom triangulacije, što omogućuje provjeru konzistentnosti nalaza i dobivanje cjelovitije slike o učincima intervencije.

Time se povezuje promjena u učeničkim ishodima s promjenom u učiteljskoj praksi i stavovima, što omogućuje pouzdanije zaključke o učinkovitosti diskursne nastave.

IV. OČEKIVANI REZULTATI I DOPRINOS

Očekuje se da će učenici u eksperimentalnoj skupini pokazati značajno veći napredak u konceptualnom znanju i proceduralnom znanju u odnosu na kontrolnu skupinu. Također se predviđa da će učitelji nakon edukacije pokazivati promjenu u praksi u smislu češćeg korištenja fokusirajućih pitanja, otvaranje prostora za učeničke rasprave i uravnoteženje balansne i inverzne metode u poučavanju linearnih jednadžbi. Rezultati će time potvrditi da diskursna nastava može istodobno unaprijediti učeničke ishode i profesionalne kompetencije učitelja.

A. Znanstveni doprinos

Očekivani znanstveni doprinos istraživanja obuhvaća više aspekata. Za početak, ono pruža empirijske dokaze o učinku diskursne nastave u hrvatskom obrazovnom kontekstu, gdje je istraživanja o matematičkom diskursu ne postoje. Ovo istraživanje popunjava tu prazninu i pridonosi međunarodnoj literaturi usporedbom nalaza iz različitih kulturnih i obrazovnih konteksta.

Nadalje, istraživanje integrira mjerenje konceptualnog i proceduralnog znanja učenika, čime se izravno ispituje njihova međuovisnost. U većini dosadašnjih istraživanja vezanih uz linearne jednadžbe naglasak je stavljen ili na konceptualno ili na proceduralno znanje, a većina tih studija provodila se sa starijim učenicima koji su, prema Piagetovoj teoriji kognitivnog razvoja, već dosegli formalno-operacijsku fazu mišljenja. U toj razvojnoj fazi učenici posjeduju sposobnost apstraktnog zaključivanja i sustavne primjene logičkih pravila, što olakšava razumijevanje algebarskih pojmova. Za razliku od toga, predloženo istraživanje usmjerava se na učenike šestog razreda koji se tek nalaze na prijelazu iz konkretno-operacijske u formalno-operacijsku fazu, čime se unosi dodatna preciznost u istraživanje učinaka diskursne nastave.

Također, eksperimentalno-kontrolni dizajn s višestrukim izvorima podataka pridonosi metodološkoj raznolikosti u području. Takva triangulacija osigurava veću pouzdanost nalaza i mogućnost dubljeg razumijevanja procesa učenja i poučavanja.

Osim toga, istraživanje doprinosi razvoju okvira za edukaciju učitelja u diskursnim praksama. Dok su međunarodna istraživanja pokazala da profesionalni razvoj može mijenjati učiteljske komunikacijske obrasce i povećati učenikovo sudjelovanje, u

hrvatskom kontekstu još uvijek nije sustavno ispitano koje su strategije najprimjenjivije i najučinkovitije. Očekuje se da će rezultati ovog istraživanja omogućiti prilagodbu globalnih spoznaja lokalnim uvjetima.

B. Stručni doprinos

Istraživanje će rezultirati razvojem programa edukacije učitelja koji se temelji na učinkovitom korištenju diskursnih praksi u nastavi matematike. Taj program može poslužiti kao model za buduće oblike stručnog usavršavanja, a sadržavat će jasne upute, primjere scenarija poučavanja i zadatke prilagođene hrvatskom kontekstu. Time se učiteljima pruža konkretan alat koji mogu odmah primijeniti u svojoj praksi. Istraživanje će pridonijeti i izradi nastavnih materijala za poučavanje linearnih jednadžbi. Materijali će uključivati zadatke koji omogućuju usporednu primjenu balansne i inverzne metode, aktivnosti koje potiču objašnjavanje i opravdavanje postupaka, kao i predložena učiteljska pitanja za vođenje rasprave. Takvi materijali mogu pomoći učiteljima da uspostave ravnotežu između konceptualnog i proceduralnog znanja, što se u praksi često pokazuje izazovnim.

Rezultati istraživanja osigurati će preporuke za implementaciju diskursne nastave u hrvatskom školskom sustavu. U skladu s kurikulumom nastavnog predmeta Matematike [9], koji naglašava sudjelovanje u raspravama i argumentiranje kao ključne ishode učenja, ovo istraživanje pokazat će konkretne načine kako te ciljeve ostvariti u učionici. Preporuke će se odnositi na organizaciju nastavnih sati, tipove zadataka i pitanja, te na učiteljske komunikacijske strategije.

Ovo istraživanje može pridonijeti i profesionalnom razvoju učitelja u širem smislu. Sudjelovanjem u intervenciji, učitelji će kroz vođenje dnevnika i upitnika razviti refleksivne vještine, što potiče dugoročnu promjenu u načinu promišljanja o nastavi. Takve refleksivne prakse mogu se prenijeti i na druge teme u matematici, čime se osnažuje učiteljska profesionalna zajednica.

V. ZAKLJUČAK

Diskursna nastava predstavlja pristup koji učenicima omogućuje da matematičke pojmove i postupke ne usvajaju mehanički, već ih razumiju kroz razgovor, objašnjavanje i argumentaciju. U takvom se okruženju znanje gradi zajednički, kroz uspoređivanje različitih strategija i promišljanje o značenju matematičkih odnosa. Time se ostvaruje ravnoteža između konceptualnog i proceduralnog znanja, a učenici razvijaju fleksibilnost i dublje razumijevanje matematičkih ideja.

Predloženi plan istraživanja usmjeren je na ispitivanje učinka diskursne nastave na razvoj znanja učenika o linearnim jednadžbama te na promjene u učiteljskoj praksi nakon edukacije o diskursnim strategijama. Očekuje se da će ovakav pristup pridonijeti osnaživanju učitelja u vođenju matematičkog dijaloga, povećanju učeničkog angažmana i unaprjeđenju kvalitete poučavanja matematike.

VI. LITERATURA

- [1] J. Hiebert and P. Lefevre, "Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis," in *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, J. Hiebert, Ed. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1986, pp. 1–27.
- [2] B. Rittle-Johnson and M. Schneider, "Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics," in *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, R. C. Kadosh and A. Dowker, Eds. Oxford: Oxford University Press, 2015, pp. 1108–1134, doi: 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014.
- [3] J. R. Star, "Reconceptualizing procedural knowledge," *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 36, no. 5, pp. 404–411, 2005.
- [4] M. Schneider, B. Rittle-Johnson, and J. R. Star, "Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge," *Developmental Psychology*, vol. 47, no. 6, pp. 1525–1538, 2011, doi: 10.1037/a0024997.
- [5] A. Hickendorff, K. Torbeyns, J. R. Star, B. Rittle-Johnson, and L. Verschaffel, "Mathematical flexibility: Theoretical background and measurement," *ZDM – Mathematics Education*, vol. 54, pp. 1–15, 2022.
<https://doi.org/10.5964/jnc.10085>
- [6] J. R. Star, D. Tuomela, N. Joglar-Prieto, P. Hästö, R. Palkki, M. Á. Abánades, *et al.*, "Exploring students' procedural flexibility in three countries," *International Journal of STEM Education*, vol. 9, art. 4, 2022, doi: 10.1186/s40594-021-00322-y.
- [7] J. Adler and E. Ronda, "A framework for describing Mathematics Discourse in Instruction (MDI) and interpreting differences in teaching," *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, vol. 19, no. 3, pp. 237–254, 2015, doi: 10.1080/10288457.2015.1089677

- [8] A. Sfard, „*Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*“. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008, doi: 10.1017/CBO9780511499944
- [9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja RH, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, NN 7/2019. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
- [10] M. Yimam Legesse and A. D. Kelkay, “Evaluation of the effects of discourse-based mathematics instruction on eleventh grade students’ conceptual and procedural understanding of probability and statistics,” *Cogent Education*, vol. 9, no. 1, 2022. doi: 10.1080/2331186X.2021.2007742
- [11] O.-L. Ng, Y. Ni, L. Shi, W. W. Y. Tam, and A. C. Cheung, “Linking changes in teacher discourse behaviors to changes in student learning outcomes in Hong Kong mathematics classrooms,” *Asian Journal for Mathematics Education*, vol. 4, no. 1, pp. 56–83, 2025, doi: 10.1177/27527263241308028
- [12] S. Hennessy, E. Calcagni, A. Leung, and N. Mercer, “An analysis of the forms of teacher–student dialogue that are most productive for learning,” *Language and Education*, vol. 37, no. 2, pp. 186–211, 2023, doi: 10.1080/09500782.2021.1956943
- [13] C. Howe, S. Hennessy, N. Mercer, M. Vrikki, L. Wheatley, et al., “Teacher–student dialogue during classroom teaching: Does it really impact on student outcomes?,” *Journal of the Learning Sciences*, vol. 28, no. 4–5, pp. 462–512, 2019.
- [14] C. O’Connor, S. Michaels, “Supporting teachers in taking up productive talk moves: The long road to professional learning at scale,” *International Journal of Educational Research*, vol. 97, pp. 166–175, 2019, doi: 10.1016/j.ijer.2017.11.003.
- [15] F. Ç. Demirci and A. Baki, “Characterizing mathematical discourse according to classroom interactions,” *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, vol. 19, no. 7, pp. 1–15, 2023, <https://doi.org/10.33902/JPR.202321852>
- [16] P. Gustafsson, “Productive mathematical whole-class discussions: A mixed-method approach exploring the potential of multiple-choice tasks supported by a classroom response system,” *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 22, pp. 861–884, 2024, doi: 10.1007/s10763-023-10402-w.
- [17] B. Rittle-Johnson, R. S. Siegler, and M. W. Alibali, “Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process,” *Journal of Educational Psychology*, vol. 93, no. 2, pp. 346–362, Jun. 2001, doi: 10.1037/0022-0663.93.2.346.
- [18] M. Mukhtar, M. Firdaus, and M. B. Darari, “The development of mathematics discourse-based learning to improve teacher students’ procedural and conceptual understanding of multivariable calculus,” in *Proc. 10th Annu. Int. Seminar on Trends in Science and Science Education (AISTSSE)*, FMIPA Univ. Negeri Medan, Indonesia, Oct. 10, 2023, pp. 403–410, doi: 10.2478/9788367405782-050.
- [19] S. Y. Mok, C. S. Hämmerle, C. Rüede, and F. C. Staub, “How do professional development programs on comparing solution methods and classroom discourse affect students’ achievement in mathematics? The mediating role of students’ subject matter justifications,” *Learning and Instruction*, vol. 82, p. 101668, 2022, doi: 10.1016/j.learninstruc.2022.101668.
- [20] K. Durkin, B. Rittle-Johnson, J. R. Star, and A. Loehr, “Comparing and discussing multiple strategies: An approach to improving algebra instruction,” *Journal of Experimental Education*, pp. 1–21, 2021, doi: 10.1080/00220973.2021.1903377.
- [21] M. Otten, M. van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis, J. Boom, and A. Heinze, “Are physical experiences with the balance model beneficial for students’ algebraic reasoning? An evaluation of two learning environments for linear equations,” *Education Sciences*, vol. 10, no. 6, p. 163, 2020, doi: 10.3390/educsci10060163.
- [22] J. Piaget and B. Inhelder, *The Psychology of the Child*. New York: Basic Books, 1969.
- [23] L. S. Vygotsky, *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.
- [24] N. M. McNeil, L. Grandau, E. J. Knuth, M. W. Alibali, A. C. Stephens, S. Hattikudur, and D. E. Krill, “Middle-School Students’ Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can’t Help,” *Cognition and Instruction*, vol. 24, no. 3, pp. 367–385, 2006.
- [25] M. Schneider, S. Rittle-Johnson, J. Star, and R. Van der Maas, “Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge,” *Developmental Psychology*, vol. 47, no. 6, pp. 1525–1538, 2011, doi: 10.1037/a0024997

- [26] B. Rittle-Johnson and J. R. Star, "Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations," *Journal of Educational Psychology*, vol. 99, no. 3, pp. 561–574, 2007. doi: 10.1037/0022-0663.99.3.561
- [27] K. Durkin, B. Rittle-Johnson, J. R. Star, and A. Loehr, "Comparing and Discussing Multiple Strategies: An Approach to Improving Algebra Instruction," *The Journal of Experimental Education*, pp. 1–21, 2021, doi: 10.1080/00220973.2021.1903377.
- [28] B. H. Ngu and H. P. Phan, "Comparing Balance and Inverse Methods on Learning Conceptual and Procedural Knowledge in Equation Solving: A Cognitive Load Perspective," *Pedagogies: An International Journal*, vol. 10, no. 2, pp. 152–170, 2015, doi: 10.1080/1554480X.2015.1047836.
- [29] A. S. Salifu, "The Effects of Balance Model and Algebra Tiles Manipulative in Solving Linear Equations in One Variable," *European Journal of Science, Mathematics and Education*, vol. 10, no. 1, pp. 47–59, 2022. <https://doi.org/10.30935/conmaths/12028>
- [30] E. Emre-Akdoğan, "The genesis of routines: Mathematical discourses on the equal sign and variables," *Electronic Journal for Research in Science and Mathematics Education*, vol. 27, no. 1, pp. 77–94, 2023. <https://ejrsme.icrsme.com/article/view/22063>
- [31] S. Dohle and S. Prediger, "Disentangling discourse practices and language means for developing conceptual understanding: The case of pre-algebraic equivalence," in *Proceedings of the ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*, 2020, pp. 89–96. <https://hal.science/hal-02970540>
- [32] R. R. Rasid, B. K. F. Caballero, R. E. Moleño, and W. A. Coronado, "Discursive styles in teaching algebra and students' conceptual understanding during pandemic (Covid-19)," *International Journal of Science and Management Studies (IJSMS)*, vol. 5, no. 1, pp. 48–56, Jan.–Feb. 2022, doi: 10.51386/25815946/ijms-v5i1p106.
- [33] E. Litke, "The nature and quality of algebra instruction: Using a content-focused observation tool as a lens for understanding and improving instructional practice," *Cognition and Instruction*, vol. 37, no. 1, pp. 29–55, 2019, doi: 10.1080/07370008.2019.1616740.
- [34] C. Morgan, T. Craig, M. Schütte, and D. Wagner, "Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field," *ZDM Mathematics Education*, vol. 46, no. 6, pp. 843–853, 2014. doi: 10.1007/s11858-014-0624-9
- [35] D. Sunara-Jozek and K. Franjo, "Usporedba komunikacije učenik–učitelj tijekom nastave Hrvatskoga jezika u školi i nastavi na daljinu u osnovnoškolskom obrazovanju," *Napredak*, vol. 162, no. 3–4, pp. 325–342, 2021.
- [36] NCVVO, *PISA 2022 – Nacionalno izvješće za Hrvatsku*. Zagreb: Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, 2023.
- [37] M. Šušak, *Factors that Affect Classroom Participation*. RIT Croatia, 2019. <https://repository.rit.edu/theses/9370>
- [38] J. Dogbey, "Supporting elementary school teachers to enhance their mathematics instruction through invented strategies and classroom discourse," *Asian Journal for Mathematics Education*, vol. 4, no. 1, pp. 3–30, 2025, doi: 10.1177/27527263251318090
- [39] G. Chen, C. K. K. Chan, K. K. H. Chan, S. N. Clarke, and L. B. Resnick, "Efficacy of video-based teacher professional development for increasing classroom discourse and student learning," *Journal of the Learning Sciences*, vol. 29, no. 4–5, pp. 642–680, 2020, doi: 10.1080/10508406.2020.1783269.
- [40] Y. Ni, L. Shi, A. Cheung, G. Chen, O. Ng, and J. Cai, "Implementation and efficacy of a teacher intervention in dialogic mathematics classroom discourse in Hong Kong primary schools," *International Journal of Educational Research*, vol. 107, p. 101758, 2021, doi: 10.1016/j.ijer.2021.101758
- [41] M. Herbel-Eisenmann and M. Breyfogle, "Questioning our patterns of questioning," *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 10, no. 9, pp. 484–489, 2005.
- [42] P. Andrews and J. Sayers, "Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary," *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 31, no. 4, pp. 476–488, 2012, doi: 10.1016/j.jmathb.2012.07.002.