Ljuban Dedić

VEKTORSKI PROSTORI

skripta

21.02.2007

Sadržaj

Predgovor

Ova skripta je napisana s namjerom da pomogne studentima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Splitu pri polaganju kolegija **Vektorski prostori 1** i **2**. U njoj se proučavaju, s manjim iznimkama, konačno dimenzionalni vektorski prostori nad poljem realnih, odnosno kompleksnih brojeva. Podijeljena je na sedam poglavlja.

U prvom poglavlju se ponavljaju neke osnovne definicije i tvrdnje iz linearne algebre u svrhu uvođenja i standardiziranja oznaka. Sve tvrdnje iz ovog poglavlja su dane u obliku primjera.

U drugom poglavlju je izložen funkcionalni račun operatora na konačno dimenzionalnom prostoru korištenjem Jordanove forme, te preformuliran u terminima rezolvente. Dan je i Jordanov aditivni i multiplikativni rastav operatora na konačno dimenzionalnom kompleksnom prostoru.

U trećem poglavlju se razmatraju normirani i unitarni prostori, uglavnom konačno dimenzionalni, te Banachove algebre. Razmatraju se i razne norme, spektralni radius, formula spektralnog radiusa, te proučavaju osnovna svojstva kontrakcija, strogih kontrakcija i izometrija.

U četvrtom poglavlju se proučavaju normalni operatori na realnim i kompleksnim euklidskim prostorima, dokazuje se spektralni teorem, uvodi spektralni uređaj na hermitskim operatorima, te polarni rastav. Nadalje, daju se neka osnovna svojstva singularnih brojeva i uvodi Schmidtov rastav operatora.

U petom poglavlju se proučavaju klasične linearne grupe i djelovanje tih grupa na topološkim mnogostrukostima. Uvodi se pojam homogenog prostora i pomoću njega opisuju Grassmannove mnogostrukosti, Stiefelove mnogostrukosti, mnogostrukosti parcijalnih izometrija, kao i neke druge klasične topološke mnogostrukosti.

Šesto poglavlje je posvećeno tenzorskim, simetričnim i antisimetričnim produktima konačno dimenzionalnih vektorskih prostora te operatora na takvim prostorima. Posvećena je posebna pozornost euklidskim prostorima te operatorima na euklidskim prostorima.

U posljednjem poglavlju se proučavaju tenzorske, simetrične, antisimetrične i Cliffordove algebre te daju primjene osnovnih svojstava ovih algebra u matematičkoj analizi na konačno dimenzionalnim realnim prostorima, kao što su: derivacije viših redova, diferencijalne forme, harmonijski polinomi, antikomutacijske relacije, spinori, anihilacijski i kreacijski operatori, operatori položaja i impulsa, Cliffordova derivacija, algebra prostora-vremena, Maxwellove jednadžbe i drugi primjeri iz fizike.

Poglavlje 1

Uvod

DEFINICIJA 1.1 *Neka je* $(X, +)$ *Abelova grupa i* $\mathbb{K}$ *polje. Ako je zadana operacija* $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ *takva da vrijedi:*

(1) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$

(2) $(\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in X$

(3) $\alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in X$

(4) $1 \cdot x = x$, $x \in X$

onda se X *zove* ***vektorski prostor nad poljem*** $\mathbb{K}$. *Element vektorskog prostora se zove* ***vektor****, a element polja* ***skalar****.*

DEFINICIJA 1.2 *Neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{K}$. *Kažemo da je* X ***konačno dimenzionalan*** *ako postoji* $n \in \mathbb{N}$ *i vektori* $e_1, \ldots, e_n \in X$ *takvi da se svaki* $x \in X$ *može prikazati u obliku* $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, *za neke* $\alpha_i \in \mathbb{K}$. *Ako je ovaj prikaz jedinstven za svaki* $x \in X$ *onda se uređena* n*-torka* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *zove* ***baza*** *od* X*, a broj* n *se zove* ***dimenzija*** *od* X *nad* $\mathbb{K}$ *i pišemo* $n = \dim X$. *Ako* X *nije konačno dimenzionalan onda kažemo da je* X *beskonačno dimenzionalan i pišemo* $\dim X = \infty$.

U daljem tekstu smatramo da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Također smatramo da je X konačno dimenzionalan, osim ako nije rečeno drukčije.

DEFINICIJA 1.3 *Neka su* X *i* Y *vektorski prostori nad* $\mathbb{K}$ *i* $A : X \to Y$. *Kažemo da je* A ***linearni operator*** *ako vrijedi*

(1) $A(x + y) = Ax + Ay$, $x, y \in X$

(2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$

Skup svih linearnih operatora $A : X \to Y$ *označavamo sa* $L(X, Y)$. *Uvodimo posebne oznake* $L(X) = L(X, X)$ *i* $X^* = L(X, \mathbb{K})$. *Skup* X^* *zovemo* ***dual*** *od* X*, a njegov element zovemo* ***linearni funkcional****.*

DEFINICIJA 1.4 *Neka su X, Y vektorski prostori nad $\mathbb{C}$ i $A : X \to Y$. Kažemo da je A* ***antilinearni operator*** *ako vrijedi:*
(1) $A(x + y) = Ax + Ay$, $x, y \in X$
(2) $A(\alpha x) = \overline{\alpha} Ax$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$
Skup svih antilinearnih operatora $A : X \to Y$ označavamo sa $L^a(X, Y)$ i uvodimo posebnu oznaku $L^a(X) = L^a(X, X)$.

Zamijetimo da su $L(X, Y)$ i $L^a(X, Y)$ vektorski prostori uz operacije:
(a) $(A + B)x = Ax + Bx$, $x \in X$
(b) $(\alpha A)x = \alpha Ax$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$
pri čemu je $\dim L(X, Y) = \dim L^a(X, Y) = \dim X \dim Y$ i $\dim X^* = \dim X$.

PRIMJERI 1.5

(1) Neka je $\mathbb{K}^n$ skup svih vektora stupaca s koordinatama iz $\mathbb{K}$. Tada je $\mathbb{K}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n, uz uobičajne operacije s vektorima stupcima.
(2) Neka je $gl_n(\mathbb{K})$ skup svih matrica reda n s koeficijentima iz $\mathbb{K}$. Tada je $gl_n(\mathbb{K})$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n^2, uz uobičajne operacije s matricama. Nadalje, $gl_n(\mathbb{K})$ je također **algebra** nad $\mathbb{K}$.
(3) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Tada je $L(X)$ algebra nad $\mathbb{K}$, a množenje u $L(X)$ je kompozicija linearnih opratora. Ako je $A \in L(X)$ onda kažemo da je A **invertibilan** ili **regularan** ako postoji $B \in L(X)$ tako da je $AB = BA = I$, gdje je $I \in L(X)$ jedinični operator tj. $Ix = x$, $x \in X$. Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i

$$L^*(X) = L(X) + L^a(X) = \{A + B; A \in L(X), B \in L^a(X)\}$$

onda je $L^*(X)$ algebra uz standardne operacije. Naime, produkt linearnog i antilinearnog operatora je antilinearan, dok je produkt dva antilinearna operatora linearan. Nadalje, $\dim L^*(X) = 2 \dim L(X)$.
(4) Neka su X i Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$. Kažemo da su X i Y **izomorfni** ako postoji bijekcija $A \in L(X, Y)$. Vektorski prostori X i Y su izomorfni ako i samo ako je $\dim X = \dim Y$.
(5) Svaki vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ je ujedno vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i vrijedi $\dim_{\mathbb{R}} X = 2 \dim_{\mathbb{C}} X$.
(6) Ako su X i Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$ i $Z = X \times Y$, onda je Z vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ uz **koordinatne operacije** i $\dim Z = \dim X + \dim Y$.
(7) Neka je $\mathbb{K}[x]$ skup svih **polinoma** u varijabli x, s koeficijentima iz $\mathbb{K}$. Tada je $\mathbb{K}[x]$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$. Nadalje, $\mathbb{K}[x]$ je algebra nad $\mathbb{K}$ uz uobičajne operacije s polinomima.

(8) Neka je $\mathbb{K}(x)$ skup svih racionalnih funkcija s koeficijentima iz $\mathbb{K}$. Tada je $\mathbb{K}(x)$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $\dim \mathbb{K}(x) = \infty$. Nadalje, $\mathbb{K}(x)$ je polje i $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}(x)$. Polje $\mathbb{K}(x)$ se zove **polje razlomaka prstena** $\mathbb{K}[x]$ budući da svaki element iz $\mathbb{K}(x)$ ima oblik f/g, za neke $f, g \in \mathbb{K}[x]$, $g \neq 0$.
(9) Analogno kao u primjerima (7) i (8) definiramo **algebru** $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ **polinoma od** n **varijabla** i polje $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$, pri čemu vrijede analogna svojstva. Ako je $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ onda kažemo da je f k-**homogen** ako vrijedi $f(tx) = t^k f(x)$, $t \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\tau \in \mathbb{K}^n$. Ovdje smo identificirali polinom f s funkcijom $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definiranu tim polinomom. To je moguće budući da je $\mathbb{K}$ beskonačno polje, dok za konačna polja nije moguće.

U daljem uvodimo **skraćenu oznaku** $\mathbb{K}\langle n\rangle = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ i $\mathbb{K}_k\langle n\rangle$ za skup svih k-**homogenih polinoma** iz $\mathbb{K}\langle n\rangle$. Lako se provjeri da je $\mathbb{K}_k\langle n\rangle$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $\dim \mathbb{K}_k\langle n\rangle = \binom{n+k-1}{k}$. Specijalno je $\mathbb{K}_0\langle n\rangle = \mathbb{K}$. Nadalje, budući da je $\mathbb{K}_k\langle n\rangle \cap \mathbb{K}_m\langle n\rangle = \{0\}$, $k \neq m$, algebra $\mathbb{K}\langle n\rangle$ je **direktna suma** svih podprostora $\mathbb{K}_k\langle n\rangle$, za $k \geq 0$, pa pišemo $\mathbb{K}\langle n\rangle = \sum_{k\geq 0} \mathbb{K}_k\langle n\rangle$. Dakle, svaki $f \in \mathbb{K}\langle n\rangle$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku

$$f = \sum_{k\geq 0} f_k, \ f_k \in \mathbb{K}_k\langle n\rangle, \ k \geq 0$$

pri čemu je suma konačna tj. samo konačno f_k je različito od nule.

Vektor $\omega \in \mathbb{N}_0^n \subset \mathbb{R}^n$ se zove **multiindeks** ako su njegove koordinate iz $\mathbb{N}_0$. Za multiindekse $\omega, \eta \in \mathbb{N}_0^n$ uvodimo oznake: $\omega! = \omega_1! \cdots \omega_n!$, $|\omega| = \omega_1 + \cdots + \omega_n$, $\binom{\omega}{\eta} = \binom{\omega_1}{\eta_1} \cdots \binom{\omega_n}{\eta_n}$, $x^\omega = x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Za $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ definiramo polinom $h_\omega : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sa $h_\omega(x) = x^\omega = x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n}$. Polinom h_ω se zove **monom**. Ako je $|\omega| = k$ onda je $h_\omega \in \mathbb{K}_k\langle n\rangle$. Nadalje, $\{h_\omega; |\omega| = k\}$ je baza u $\mathbb{K}_k\langle n\rangle$ pa se svaki $f \in \mathbb{K}_k\langle n\rangle$ može napisati, na jedinstven način, u obliku $f = \sum_{|\omega|=k} \alpha_\omega h_\omega$ tj. $f(x) = \sum_{|\omega|=k} \alpha_\omega x^\omega$, $x \in \mathbb{K}^n$.

Ako je $f \in \mathbb{K}\langle n\rangle$ onda postoje jedinstveni $\alpha_\omega \in \mathbb{K}$ takvi da je $f = \sum_\omega \alpha_\omega h_\omega$, tj. $f(x) = \sum_\omega \alpha_\omega x^\omega$, $x \in \mathbb{K}^n$, **pri čemu je suma konačna**. Koeficijente α_ω možemo lako izračunati koristeći **parcijalne derivacije**

$$\partial^\omega f(x) = \partial_1^{\omega_1} \cdots \partial_n^{\omega_n} f(x), \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = 1, \ldots, n$$

tako da na koncu dobijemo $f(x) = \sum_\omega \frac{1}{\omega!} \partial^\omega f(0) x^\omega$, što je ustvari razvoj od f u **Taylorov red** oko 0.

DEFINICIJA 1.6 *Neka je $A \in gl_n(\mathbb{K})$, $A = [a_{ij}]$.*
(1) *Matricu $A^\tau = [a_{ji}]$ zovemo **transponirana matrica** od A.*
(2) *Matricu $A^* = [\overline{a}_{ji}]$ zovemo **adjungirana matrica** od A.*
(3) *Skalar $\det A = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ zovemo **determinanta** od A, a sumira se po svim permutacijama σ od $\{1, \ldots, n\}$, gdje je ε_σ predznak od σ.*

(4) *Skalar* $\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ *zovemo* ***trag*** *od* A.
(5) *Skalar* $\operatorname{per} A = \sum_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ *zovemo* ***permanenta*** *od* A, *a sumira se kao u* (3).

PRIMJERI 1.7

(1) $A \mapsto A^\tau$ je linearni operator, $(AB)^\tau = B^\tau A^\tau$ i $(A^\tau)^\tau = A$, pa kažemo da je transponiranje **involucija** algebre $gl_n(\mathbb{K})$, ili **antiautomorfizam** reda 2.
(2) $A \mapsto A^*$ je antilinearan operator ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(AB)^* = B^*A^*$ i $(A^*)^* = A$, pa kažemo da je $*$ involucija algebre $gl_n(\mathbb{K})$, ili antilinearni antiautomorfizam reda 2.
(3) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\operatorname{tr} I = n$. Nadalje, tr je linearni funkcional na $gl_n(\mathbb{K})$.
(4) $\det(AB) = \det A \det B$, $\det I = 1$
(5) Permanenta ima sljedeća svojstva:
(a) $\operatorname{per} A^\tau = \operatorname{per} A$, $\operatorname{per} A^* = (\operatorname{per} A)^-$
(b) per je invarijantna na permutacije redaka i stupaca.
(c) $\operatorname{per}(\alpha A) = \alpha^n \operatorname{per} A$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
(d) Formula $\operatorname{per}(AB) = \operatorname{per}(BA)$ općenito ne vrijedi kao što pokazuje sljedeći primjer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $\operatorname{per} A = 1$, $\operatorname{per} B = 6$, $\operatorname{per} AB = 30$, $\operatorname{per} BA = 22$.
(e) Formula $\operatorname{per}(TAT^{-1}) = \operatorname{per} A$ općenito ne vrijedi.
(f) per je linearna po svakom retku i svakom stupcu.
(g) Ako je $A = [a_{ij}]$ i A_{ij} podmatrica od A koja se dobije izbacivanjem i-tog retka i j-tog stupca, onda je

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \operatorname{per} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{per} A_{ij}$$

Ovom formulom možemo, na ekvivalentan način, definirati permanentu.
(6) Neka su $a, b \in \mathbb{K}^n$ i $A = ab^\tau = [a_i b_j] \in gl_n(\mathbb{K})$. Tada vrijedi formula $\operatorname{per} A = n! a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n$. Dakle, matrica A može biti singularna i $\operatorname{per} A \neq 0$. Ako je u matrici jedan stupac (ili redak) jednak 0 onda je $\operatorname{per} A = 0$.
(7) Neka je $A \in gl_n(\mathbb{K})$ matrica čiji su svi elementi su jednaki 1, osim onih na dijagonali koji su jednaki $\lambda \in \mathbb{K}$. Stavimo $P_n(\lambda) = \operatorname{per} A$, pri čemu je $P_0(\lambda) = 1$ i $P_1(\lambda) = \lambda$. Tada vrijedi

$$P_n(\lambda) = n! \sum_{k=1}^n \tfrac{1}{k!} (\lambda - 1)^k$$

PRIMJERI 1.8

(1) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $\dim X = n$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza u X, $x \in X$, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $x_i \in \mathbb{K}$. Definiramo $\varphi_e : X \to \mathbb{K}^n$ formulom $\varphi_e(x) = (x_1, \ldots, x_n)^\tau$. Tada je φ_e izomorfizam vektorskih prostora.
(2) Ako su e, u baze u X i $T = \varphi_u^{-1}\varphi_e$ onda je $T \in L(X)$ regularan operator i $Te_i = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Operator T se zove **operator prijelaza iz baze** e **u bazu** u. Ako je $A \in L(X)$ onda se $A_e = \varphi_e A \varphi_e^{-1} \in gl_n(\mathbb{K})$ zove **matrica od** A **u bazi** e. Nadalje, vrijedi $T_e = T_u = \varphi_e \varphi_u^{-1}$ i $A_u = T_e^{-1} A_e T_e$.
(3) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i Y neprazan skup. Nadalje, neka je $\Phi : gl_n(\mathbb{K}) \to Y$ funkcija za koju vrijedi

$$\Phi(TAT^{-1}) = \Phi(A), \ A, T \in gl_n(\mathbb{K}), \ \det T \neq 0$$

Tada definiramo funkciju $\tilde{\Phi} : L(X) \to Y$ sa $\tilde{\Phi}(A) = \Phi(A_e)$, gdje je e bilo koja baza u X. Funkcija $\tilde{\Phi}$ je dobro definirana, zbog gornjeg svojstva od Φ, pa kažemo da smo **matričnu funkciju** Φ **proširili na operatore**. Obično radi jednostavnosti pišemo $\tilde{\Phi} = \Phi$. Primjeri ovakve funkcije su: $\Phi = \det$ i $\Phi = \mathrm{tr} : gl_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Ako je $A \in L(X)$ onda definiramo **determinantu** i **trag operatora** A formulom $\det A = \det A_e$, $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, A_e$, gdje je e bilo koja baza u X, i ova definicija ne zavisi od baze. Kako funkcija $\Phi = \mathrm{per} : gl_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ nema traženo svojstvo zaključujemo da se permanenta operatora ne može definirati.
(4) Preslikavanje $A \mapsto A_e$ je izomorfizam algebra $L(X)$ i $gl_n(\mathbb{K})$, $\dim X = n$, tj. vrijedi:
(a) $(A + B)_e = A_e + B_e$, $A, B \in L(X)$
(b) $(\alpha A)_e = \alpha A_e$, $\alpha \in \mathbb{K}$
(c) $(AB)_e = A_e B_e$
(d) $A_e = 0$ ako i samo ako $A = 0$

DEFINICIJA 1.9 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ vektorski prostori nad $\mathbb{K}$. Ako je $\varphi : X_1 \times \cdot \cdot \times X_n \to \mathbb{K}$ linearna po svakoj varijabli onda se φ zove* ***multilinearni funkcional****. Posebno, za $n = 2$ se φ zove* ***bilinearni funkcional****. Skup svih multilinearnih funkcionala $f : X_1 \times \cdot \cdot \times X_n \to \mathbb{K}$ označavamo sa $L(X_1, \ldots, X_n, \mathbb{K})$.*

PRIMJERI 1.10

(1) $L(X_1, \ldots, X_n, \mathbb{K})$ je vektorski prostor uz operacije:
(a) $(\varphi + \psi)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \psi(x_1, \ldots, x_n)$
(b) $(\alpha\varphi)(x_1, \ldots, x_n) = \alpha\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha \in \mathbb{K}$
i dimenzija ovog prostora je jednaka produktu $\dim X_1 \cdots \dim X_n$. Vidi Poglavlje 6.

(2) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i X^* dual od X. Tada je funkcija $\varphi : X \times X^* \to \mathbb{K}$ definirana sa $\varphi(x, f) = f(x)$, $x \in X$, $f \in X^*$, bilinearni funkcional. Uvodimo dodatnu oznaku $(x|f) = f(x) = \varphi(x, f)$.
(3) Neka su X, Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X, Y)$. Tada se operator $A^* \in L(Y^*, X^*)$ definiran formulom $(Ax|f) = (x|A^*f)$, $x \in X$, $f \in Y^*$, zove **dualni operator** od A. Nadalje, preslikavanje $A \mapsto A^*$ je izomorfizam vektorskih prostora.
(4) Kao specijalni slučaj od (3) za $X = Y$ je $A \mapsto A^*$ izomorfizam vektorskih prostora $L(X)$ i $L(X^*)$ i vrijedi $(AB)^* = B^*A^*$, $A, B \in L(X)$. Ovo znači da je preslikavanje $A \mapsto A^*$ **antiizomorfizam** algebra $L(X)$ i $L(X^*)$. Specijalno vrijede sljedeća svojstva:
(a) $\det A^* = \det A$
(b) $\operatorname{tr} A^* = \operatorname{tr} A$
(c) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, $\det A \neq 0$
(5) Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza u X, $x \in X$, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Definiramo funkcional $e_i^* \in X^*$ sa $e_i^*(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi:
(a) $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ je baza u X^* i zovemo je **dualna baza** od e
(b) $f = f(e_1)e_1^* + \cdots + f(e_n)e_n^*$, $f \in X^*$
(c) $(A^*)_{e^*} = (A_e)^\tau$, $A \in L(X)$

DEFINICIJA 1.11 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Tada se vektorski prostor X_c nad $\mathbb{C}$ definiran sa $X_c = X + iX = \{x + iy; x, y \in X\}$, s koordinatnim zbrajanjem i množenjem sa skalarom*

$$(\alpha_1 + i\alpha_2)(x + iy) = \alpha_1 x - \alpha_2 y + i(\alpha_1 y + \alpha_2 x),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ x, y \in X$$

zove ***kompleksifikacija*** *od X. Ako je $A \in L(X)$ onda se operator $A_c \in L(X_c)$ definiran sa $A_c(x+iy) = Ax+iAy$, $x, y \in X$, zove* ***kompleksifikacija*** *operatora A.*

PRIMJERI 1.12 Neka su X i A iz prethodne definicije. Tada vrijedi:

(1) $\dim X_c = \dim X$
(2) $\dim_{\mathbb{R}} X_c = 2 \dim X$
(3) $(\mathbb{R}^n)_c = \mathbb{C}^n$, $gl_n(\mathbb{R})_c = gl_n(\mathbb{C})$, $L(X)_c = L(X_c)$
(4) $\det A_c = \det A$, $\operatorname{tr} A_c = \operatorname{tr} A$
(5) $(X^*)_c = (X_c)^*$
(6) $(A + B)_c = A_c + B_c$, $(\alpha A)_c = \alpha A_c$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(AB)_c = A_cB_c$
(7) $A_c = 0$ ako i samo ako $A = 0$
Dakle, $A \mapsto A_c$ je **monomorfizam algebra** nad $\mathbb{R}$.

DEFINICIJA 1.13 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$.*
(1) *Polinom $p_A(x) = \det(xI - A)$ se zove* ***svojstveni*** *ili* ***karakteristični polinom*** *od A.*
(2) *Skup $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C}; p_A(z) = 0\}$ se zove* ***spektar*** *od A.*
(3) *Ako je $\alpha \in \mathbb{K}$ i $x \in X$, $x \neq 0$, tako da je $Ax = \alpha x$, onda se α zove* ***svojstvena vrijednost*** *od A, a x se zove* ***svojstveni vektor*** *pridružen α.*
(4) *Polinom μ_A minimalnog stupnja, s vodećim koeficijentom 1, za kojeg vrijedi $\mu_A(A) = 0$, se zove* ***minimalni polinom*** *od A.*
(5) *Kažemo da su operatori (odnosno matrice) A i B* ***slični*** *(odnosno* ***slične****) ako postoji regularan operator (odnosno regularna matrica) T tako da vrijedi $A = TBT^{-1}$.*

PRIMJERI 1.14

(1) $\sigma(A) \neq \varnothing$ i $\sigma(A)$ sadrži najviše $n = \dim X$ elemenata.
(2) Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ svojstvena vrijednost onda je $\lambda \in \sigma(A)$. Vrijedi i obrat za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dok za $\mathbb{R}$ ne vrijedi obrat. Obrat će vrijediti i za $\mathbb{R}$ ako je $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C}; \mu_A(z) = 0\}$
(4) $p_A(A) = 0$ (**Hamilton-Cayleyjev teorem**).
(5) μ_A dijeli p_A
(6) $p_{AB} = p_{BA}$, dok $\mu_{AB} = \mu_{BA}$ ne vrijedi općenito.
(7) $\sigma(AB) = \sigma(BA)$, $\sigma(TAT^{-1}) = \sigma(A)$, $\det T \neq 0$
Funkcije $\Phi(A) = \sigma(A)$ i $\Phi(A) = p_A$ imaju svojstvo iz 1.8 (3).
(8) Slični operatori imaju isti spektar, minimalni i karakteristični polinom.
(9) Ako je $f \in \mathbb{K}[x]$ i $A \in L(X)$, $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$ onda definiramo operator $f(A) \in L(X)$ sa $f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k$. Ako je $\delta : \mathbb{K}[x] \to L(X)$, $\delta(f) = f(A)$ onda δ ima sljedeća svojstva:
(a) $\delta(1) = I$, $\delta(id) = A$
(b) δ je **homomorfizam algebra**
(c) $\ker \delta = \{f; \delta(f) = 0\}$ je **ideal** u $\mathbb{K}[x]$ i vrijedi $\ker \delta = \mu_A \mathbb{K}[x] = \{\mu_A f; f \in \mathbb{K}[x]\}$
(d) $\operatorname{im} \delta = \{f(A); f \in \mathbb{K}[x]\}$ je podalgebra od $L(X)$
(e) Ako je $\partial \mu_A = m$ onda je $\dim(\operatorname{im} \delta) = m$ i $\{I, A, \ldots, A^{m-1}\}$ je baza u algebri $\operatorname{im} \delta$.
(10) Ako je $A \in L(X)$ regularan operator onda postoji jedinstven polinom $f \in \mathbb{K}[x]$, $\partial f < \partial \mu_A$, tako da je $A^{-1} = f(A)$.

DEFINICIJA 1.15 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $J \in L^a(X)$ takav da je $J^2 = I$. Tada se J zove* ***konjugiranje*** *na X.*

PRIMJERI 1.16

(1) Neka je J konjugiranje na X i $X_1 = \{x \in X; Jx = x\}$. Tada se X_1 zove J-**realni podprostor** od X. Nadalje, vrijedi $X = X_1 + iX_1 = \{x + iy; x, y \in X_1\}$ pa se svaki $x \in X$ može napisati u obliku $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in X_1$, pri čemu je $Jx = x_1 + J(ix_2) = x_1 - ix_2$. Vektor x_1 se zove J-**realni dio** od x, a x_2 J-**imaginarni dio** od x i vrijedi $x_1 = \frac{1}{2}(x + Jx)$, $x_2 = \frac{1}{2i}(x - Jx)$.
(2) Neka je e baza u X, $x \in X$, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Definiramo $J : X \to X$ sa $Jx = \bar{x}_1e_1 + \cdots + \bar{x}_ne_n$. Tada je J konjugiranje na X i J-realni podprostor od X je $X_1 = \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_n$. Nadalje, vrijedi $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$, gdje je $J_0 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $J_0z = \bar{z}$. Specijalno je $X_1 = \varphi_e^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Ovaj J_0 se zove **standardno konjugiranje** na $\mathbb{C}^n$. Kažemo da je $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$ konjugiranje na X **definirano bazom** e.
(3) Svako konjugiranje J na X je definirano nekom bazom e u X, tj. postoji baza e u X da je $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$.
(4) Ako je J konjugiranje i $A \in L(X)$ regularan, onda je AJA^{-1} također konjugiranje na X. Ako su J_1 i J_2 dva konjugiranja onda su ona **slična** tj. $J_1 = AJ_2A^{-1}$ za neki regularni $A \in L(X)$.
(5) Ako je $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$ konjugiranje na X i $A \in L(X)$ regularan operator onda je $AJA^{-1} = J$ ako i samo ako je matrica A_e realna tj. $A_e \in gl_n(\mathbb{R})$, $n = \dim X$. Može se pokazati da sva konjugiranja na X čine plohu u $L^a(X)$ i dimenzija te plohe je n^2. Vidi Poglavlje 5.
(6) Neka je J_0 standardno konjugiranje na $\mathbb{C}^n$. Svako drugo konjugiranje J na $\mathbb{C}^n$ ima oblik $J = AJ_0A^{-1}$ za neku regularnu matricu $A \in gl_n(\mathbb{C})$. Vidi Poglavlje 5.
(7) Neka je J konjugiranje na X i $A \in L(X)$. Tada se A može napisati, na jedinstven način, u obliku $A = A_1 + iA_2$ pri čemu je $A_1 = \frac{1}{2}(A + JAJ)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A - JAJ)$. Nadalje, A_1 i A_2 komutiraju sa J i J-realni podprostor X_1 od X je invarijantan na A_1 i A_2. Specijalno je $JAJ = A_1 - iA_2$. Zamijetimo da je $A \mapsto JAJ$ konjugiranje na $L(X)$. Kažemo da je ovo konjugiranje **inducirano** konjugiranjem J na X. Naravno, postoje konjugiranja na $L(X)$ koja nisu inducirana nikakvim konjugiranjem na X.
(8) Neka je X_1 J-realni podprostor od X. Tada je X_1 vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $\dim_{\mathbb{R}} X_1 = \dim_{\mathbb{C}} X$. Definiramo preslikavanje $\varphi : X \to X_1 \dot{+} X_1$ sa $\varphi(x + iy) = (x, y)^\tau$. Tada se φ zove J-**dekompleksifikacija** od X. Ako je $A = A_1 \dot{+} A_2 \in L(X)$ kao u (7) onda definiramo

$$\Phi : L(X) \to L(X_1 \dot{+} X_2),\ \Phi(A_1 + iA_2) = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

pri čemu ova matrica ima operatorske elemente. Tada je $\varphi(Ax) = \Phi(A)\varphi(x)$, $x \in X$, $A \in L(X)$. Operator Φ se zove J-**dekompleksifikacija** od $L(X)$ i za njega vrijedi:

(a) $\Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, $A, B \in L(X)$
(b) $\Phi(\lambda A) = \lambda\Phi(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(c) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$, $A, B \in L(X)$

DEFINICIJA 1.17 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ proizvoljne dimenzije i $\nu : X \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ funkcija sa svojstvima:*
(1) $\nu(x) = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$
(2) $\nu(\alpha x) = |\alpha|\, \nu(x)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$
(3) $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$, $x, y \in X$ (***relacija trokuta***)
*Tada se ν zove **norma** na X, a uređeni par (X, ν) se zove **normirani prostor**. Kažemo da je niz (x_n) iz X **Cauchyjev** ako vrijedi*

$$\nu(x_n - x_m) \to 0, \; n, m \to \infty$$

*Kažemo da niz (x_n) **konvergira prema** $x \in X$ ako vrijedi*

$$\nu(x_n - x) \to 0, \; n \to \infty$$

*Lako se vidi da je svaki konvergentni niz Cauchyjev. Kažemo da je (X, ν) **potpun prostor** ako je svaki Cauchyjev niz iz X konvergentan. Potpun normiran prostor se zove **Banachov prostor**.*

DEFINICIJA 1.18 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ proizvoljne dimenzije i $(.|.) : X \times X \to \mathbb{K}$ funkcija sa svojstvima:*
(1) $(x|x) \geq 0$, $x \in X$, *i* $(x|x) = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$
(2) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$
(3) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$, $x, y, z \in X$
(4) $(x|y) = \overline{(y|x)}$, $x, y \in X$
*Tada se funkcija $(.|.)$ zove **skalarni produkt** na X, a uređeni par $(X, (.|.))$ se zove **unitarni prostor**. Lako se vidi da je funkcija*

$$\nu : X \to [0, \infty), \; \nu(x) = (x|x)^{1/2}$$

*norma na X. Kažemo da je ν **generirana skalarnim produktom**. Ako je (X, ν) potpun prostor onda se $(X, (.|.))$ zove **Hilbertov prostor**. Konačno dimenzionalni Hilbertov prostor se zove **euklidski prostor**. Ako su $x, y \in X$ i $(x|y) = 0$ onda kažemo da su x i y **okomiti** ili **ortogonalni**.*

PRIMJERI 1.19

(1) Ako je (X, ν) normiran prostor onda vrijedi $|\nu(x) - \nu(y)| \leq \nu(x-y)$, $x, y \in X$. Skup $S_\nu = \{x \in X; \nu(x) = 1\}$ zovemo **jedinična sfera** u normi ν, a skup $D_\nu = \{x \in X; \nu(x) < 1\}$ **jedinični disk** u normi ν. Ako je $a \in X$

i $r > 0$ onda se $rS_\nu + a = \{x \in X; \nu(x-a) = r\}$ zove sfera radiusa r sa središtem u a, dok se $rD_\nu + a = \{x \in X; \nu(x-a) < r\}$ zove otvoreni disk radiusa r sa središtem u a.

Ako je $Y \subset X$ neprazan podskup onda kažemo da je Y **ograničen** ili **omeđen** ako postoji $r > 0$ takav da je $\nu(x) < r$, za svaki $x \in Y$, tj. ako je Y sadržan u nekom disku rD_ν.

(2) Ako je $(X, (.|.))$ unitarni prostor onda vrijedi

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y),\ x, y \in X$$

i ova nejednakost se zove **Cauchy-Schwarzova nejednakost.** Također vrijedi identiteta

$$\nu(x+y)^2 + \nu(x-y)^2 = 2\nu(x)^2 + 2\nu(y)^2,\ x, y \in X$$

gdje je $\nu(x) = (x|x)^{1/2}$, i ona se zove **relacija paralelograma**.

(3) Polje $\mathbb{K}$ je unitarni prostor nad samim sobom, a skalarni produkt je dan sa $(x|y) = x \cdot \overline{y}$, $x, y \in \mathbb{K}$ pa je $\nu(x) = (x|x)^{1/2} = (x \cdot \overline{x})^{1/2} = |x|$ norma na $\mathbb{K}$. Nadalje, $\mathbb{K}$ je euklidski prostor dimenzije 1.

(4) $\mathbb{K}^n$ je unitarni prostor sa skalarnim produktom $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$. Normu

$$\nu(x) = (x|x)^{1/2} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$$

zovemo **standardna euklidska norma** i označavamo je sa $\nu(x) = \|x\|$. Dakle, $(\mathbb{K}^n, (.|.))$ je euklidski prostor dimenzije n. Nadalje, niz (x_n) iz $\mathbb{K}^n$ konvergira prema $x \in \mathbb{K}^n$ ako i samo ako sve koordinate od x_k konvergiraju prema odgovarajućim koordinatama od x.

(5) $gl_n(\mathbb{K})$ je euklidski prostor sa skalarnim produktom $(A|B) = \operatorname{tr} AB^*$, $A, B \in gl_n(\mathbb{K})$. Norma $\nu(A) = (A|A)^{1/2}$ se zove **standardna euklidska norma** na $gl_n(\mathbb{K})$ i nju označavamo sa $\|A\|_2$, dok je oznaka $\|A\|$ rezervirana za tzv. spektralnu normu. Vidi Poglavlje 3.

(6) $\mathbb{K}^n$ je Banachov prostor s normom

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$$

gdje je $p \in [1, \infty)$, a također i s normom $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Nadalje, vrijedi formula

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,\ x \in \mathbb{K}^n$$

(7) $\mathbb{K}[x]$ je normiran prostor s normom

$$\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p\, dt)^{1/p}$$

gdje je $p \in [1, \infty)$, a također i s normom $\|f\|_\infty = \max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t)|$ i on nije Banachov, budući da nije potpun. $\mathbb{K}[x]$ je unitarni sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

(8) Neka je $K \subset \mathbb{K}^n$ kompaktan i neprazan skup i $C(K)$ vektorski prostor svih neprekidnih funkcija $f : K \to \mathbb{K}$. Tada je $C(K)$ Banachov prostor s normom $\|f\| = \max\limits_{x \in K} |f(x)|$.
(9) Neka su ν_1 i ν_2 norme na X. Kažemo da su ν_1 i ν_2 **ekvivalentne** ako postoje $m > 0$ i $M > 0$ tako da vrijedi

$$m\nu_1(x) \le \nu_2(x) \le M\nu_1(x), \; x \in X$$

Svake dvije norme na konačno dimenzionalnom prostoru su ekvivalentne. Svaki konačno dimenzionalni normirani prostor je Banachov. Svaki konačno dimenzionalni unitarni prostor je euklidski.
(10) Neka je $\mathbb{R}\langle n\rangle$ vektorski prostor svih polinoma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kao u 1.5. Ako je $f \in \mathbb{R}\langle n\rangle$, $f(x) = \sum_\omega \alpha_\omega x^\omega$, onda definiramo **diferencijalni operator** $f(\partial) : \mathbb{R}\langle n\rangle \to \mathbb{R}\langle n\rangle$ sa $f(\partial) = \sum_\omega \alpha_\omega \partial^\omega$. Tada je formulom

$$(f|g) = f(\partial)g(0), \; f, g \in \mathbb{R}\langle n\rangle$$

definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}\langle n\rangle$ i vrijedi:

(a) $(h_\omega|h_\eta) = 0$, $\omega \ne \eta$, $\omega, \eta \in \mathbb{N}_0^n$

(b) $(h_\omega|h_\omega) = \omega!$, $\omega \in \mathbb{N}_0^n$

(c) Ako je $f \in \mathbb{R}_k\langle n\rangle$ i $g \in \mathbb{R}_m\langle n\rangle$, $k \ne m$, onda je $(f|g) = 0$, što znači da su $\mathbb{R}_k\langle n\rangle$ i $\mathbb{R}_m\langle n\rangle$ **okomiti**. Dakle, $\mathbb{R}\langle n\rangle = \sum_{k \ge 0} \mathbb{R}_k\langle n\rangle$ i ova suma je **ortogonalna**. $\mathbb{R}\langle n\rangle$ nije Hilbertov budući da nije potpun.

(d) ako je $a \in \mathbb{R}^n$ i $a^* \in \mathbb{R}_1\langle n\rangle$, $a^*(x) = (a|x)$, onda je $a^{*k} \in \mathbb{R}_k\langle n\rangle$ i

$$a^{*k} = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} a^\omega h_\omega$$

(e) $(a^{*k}|h_\omega) = k!a^\omega$, za $|\omega| = k$

(f) $(a^{*k}|b^{*k}) = k!\,(a|b)^k$, $a, b \in \mathbb{R}^n$

(g) $(f|a^{*k}) = k!f(a)$, $f \in \mathbb{R}_k\langle n\rangle$

(11) Ako je $(X, (.|.))$ nepotpun unitarni prostor onda se on može **upotpuniti** tj. postoji Hilbertov prostor $(\overline{X}, (.|.))$ koji sadrži X i X je gust u $\overline{X}$. Ovaj $\overline{X}$ je jedinstven do na izomorfizam i zove se **upotpunjenje** od X. Opišimo upotpunjenje $\overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$ od $\mathbb{R}\langle n\rangle$. $\overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$ se sastoji od svih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

oblika $f(x) = \sum_\omega \alpha_\omega x^\omega$, $\alpha_\omega \in \mathbb{R}$, pri čemu je $\sum_\omega \omega!\alpha_\omega^2 < \infty$. Ako su $f, g \in \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$ i $f(x) = \sum_\omega \alpha_\omega x^\omega$, $g(x) = \sum_\omega \beta_\omega x^\omega$, onda je

$$(f|g) = \sum_\omega \omega!\alpha_\omega\beta_\omega$$

Npr. funkcija $f = \exp a^*$ tj. $f(x) = \exp(a|x)$ je u $\overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$. Naime,

$$\exp a^* = \sum_{k\geq 0} \tfrac{1}{k!}a^{*k} = \sum_\omega \tfrac{1}{\omega!}a^\omega h_\omega$$

iz čega dobijemo $(\exp a^*|\exp b^*) = \exp(a|b)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Također je

$$(f|\exp a^*) = f(a),\ a \in \mathbb{R}^n,\ f \in \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$$

(12) Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup pozitivnog volumena i $p \geq 1$. Tada je formulom

$$\|x\|_{K,p} = (\int_K |(x|\,y)|^p dy)^{1/p}$$

definirana norma na $\mathbb{R}^n$ i za nju vrijedi

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_{K,p} = \|x\|_{K,\infty} = \max_{y\in K} |(x|y)|$$

DEFINICIJA 1.20 *Uvodimo sljedeće standardne oznake i nazive:*
(1) $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in gl_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$ ***opća linearna grupa.***
(2) $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in gl_n(\mathbb{C}); \det A \neq 0\}$ ***opća linearna grupa.***
(3) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); \det A = 1\}$ ***specijalna linearna grupa.***
(4) $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); \det A = 1\}$ ***specijalna linearna grupa.***
(5) $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); AA^* = I\}$ ***unitarna grupa.***
(6) $SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\}$ ***specijalna unitarna grupa***.
(7) $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); AA^\tau = I\}$ ***ortogonalna grupa.***
(8) $SO(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\}$ ***specijalna ortogonalna grupa***.
(9) $sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in gl_n(\mathbb{R}); \operatorname{tr} A = 0\}$ ***Liejeva algebra*** *od* $SL_n(\mathbb{R})$.
(10) $sl_n(\mathbb{C}) = \{A \in gl_n(\mathbb{C}); \operatorname{tr} A = 0\}$ ***Liejeva algebra*** *od* $SL_n(\mathbb{C})$.
(11) $u(n) = \{A \in gl_n(\mathbb{C}); A^* = -A\}$ ***Liejeva algebra*** *od* $U(n)$.
(12) $su(n) = \{A \in u(n); \operatorname{tr} A = 0\}$ ***Liejeva algebra*** *od* $SU(n)$.
(13) $o(n) = so(n) = \{A \in gl_n(\mathbb{R}); A^\tau = -A\}$ ***Liejeva algebra*** *od* $SO(n)$.

DEFINICIJA 1.21 (a) *Neka je $A \in gl_n(\mathbb{R})$. Kažemo da je A:*
(1) ***normalna*** *ako vrijedi* $AA^\tau = A^\tau A$
(2) ***simetrična*** *ako vrijedi* $A^\tau = A$
(3) ***antisimetrična*** *ako vrijedi* $A^\tau = -A$
(4) ***ortogonalna*** *ako vrijedi* $AA^\tau = I$

(5) ***projektor*** *ako vrijedi* $A^\tau = A = A^2$
(6) ***parcijalna izometrija*** *ako vrijedi* $AA^\tau A = A$
(b) *Neka je* $A \in gl_n(\mathbb{C})$. *Kažemo da je A:*
(1) ***normalna*** *ako vrijedi* $AA^* = A^*A$
(2) ***hermitska*** *ako vrijedi* $A^* = A$
(3) ***antihermitska*** *ako vrijedi* $A^* = -A$
(4) ***unitarna*** *ako vrijedi* $AA^* = I$
(5) ***projektor*** *ako vrijedi* $A^* = A = A^2$
(6) ***parcijalna izometrija*** *ako vrijedi* $AA^*A = A$

PRIMJERI 1.22

(1) Provjeriti da su skupovi iz Definicije 1.20 označeni velikim slovima zaista grupe, a skupovi označeni malim slovima Liejeve algebre nad $\mathbb{R}$ u odnosu na **komutator** $[A, B] = AB - BA$. Naime, $gl_n(\mathbb{R})$ je **asocijativna algebra s jedinicom** uz obično matrično množenje i **Liejeva algebra** uz komutator. Ona je Liejeva algebra od $GL_n(\mathbb{R})$. Slično vrijedi za $\mathbb{C}$. Veza između neke ovakve grupe i njezine Liejeve algebre je sljedeća: ako je A iz algebre i

$$\exp A = \sum_{k\geq 0} \tfrac{1}{k!}A^k$$

onda ovaj red konvergira i $\exp tA$ je u grupi za svaki $t \in \mathbb{R}$. Dvije različite grupe mogu imati istu Liejevu algebru npr. $O(n)$ i $SO(n)$. Vidi Poglavlje 5.
(2) Može se pokazati da su sve grupe iz 1.20 glatke plohe u $GL_n(\mathbb{K})$ i njihova dimenzija je jednaka dimenziji njihove Liejeve algebre, kao vektorskog prostora nad $\mathbb{R}$. Vidi Poglavlje 5. Specijalno vrijedi:
(a) $\dim GL_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim GL_n(\mathbb{C}) = 2n^2$
(b) $\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$, $\dim SL_n(\mathbb{C}) = 2n^2 - 1$
(c) $\dim U(n) = n^2$, $\dim SU(n) = n^2 - 1$
(d) $\dim O(n) = \dim SO(n) = \binom{n}{2}$
(3) Neka je $T_n(\mathbb{K})$ skup svih regularnih **gornjih trokutastih** matrica iz $gl_n(\mathbb{K})$ i $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ skup svih gornjih trokutastih matrica iz $gl_n(\mathbb{K})$. Tada je $T_n(\mathbb{K})$ grupa, a $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ je njezina Liejeva algebra. Naći im dimenzije.

PRIMJERI 1.23

(1) Neka je $A \in L(X)$ i A^* dualni operator. Tada je $\sigma(A^*) = \sigma(A)$, $\mu_{A^*} = \mu_A$ i $p_{A^*} = p_A$.
(2) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$. Tada je $\sigma(A_c) = \sigma(A)$, $\mu_{A_c} = \mu_A$ i $p_{A_c} = p_A$.
(3) Neka su X, Y vektorski prostori nad $\mathbb{C}$, J_1 konjugiranje na X, J_2 konjugiranje na Y. Tada vrijedi:

(a) $L^a(X,Y) = L(X,Y)J_1 = \{AJ_1; A \in L(X,Y)\}$
(b) $L^a(X,Y) = J_2L(X,Y) = \{J_2A; A \in L(X,Y)\}$
(c) $L^a(X) = L(X)J_1 = J_1L(X)$

(4) Neka su X, Y vektorski prostori nad $\mathbb{C}$ i $L^*(X,Y)$ vektorski prostor svih linearnih operatora $A : X \to Y$, gdje su X i Y shvaćeni kao vektorski prostori nad $\mathbb{R}$. Tada je $L^*(X,Y) = L(X,Y) + L^a(X,Y)$ i ova suma je direktna. Dakle, svaki operator $A \in L^*(X,Y)$ se može napisati u obliku $A = B + CJ$, gdje je J neko fiksno konjugiranje na X, a $B, C \in L(X,Y)$.

(5) Neka je $(X, (.|.))$ unitarni prostor nad $\mathbb{R}$ i X_c kompleksifikacija od X. Tada je formulom

$$(x + iy|x' + iy') = (x|x') + (y|y') + i[(y|x') - (x|y')]$$

dan skalarni produkt na X_c i njegova restrikcija na X je jednaka starom skalarnom produktu tj. X je unitarni podprostor od X_c.

(6) U Definiciji 1.9 smo definirali prostor $L(X_1, \dots, X_n, \mathbb{K})$ svih multilinearnih funkcionala. Analogno se definira prostor svih **multilinearnih operatora** $L(X_1, \dots, X_n, X)$, gdje je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, tj. preslikavanje $A : X_1 \times \cdots \times X_n \to X$ je multilinearni operator ako je on linearan po svakoj varijabli. Vrijedi formula

$$\dim L(X_1, \dots, X_n, X) = \dim X_1 \cdots \dim X_n \cdot \dim X.$$

Vidi Poglavlje 6.

(7) Neka je $A \in gl_n(\mathbb{K})$ matrica sa stupcima $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Tada je preslikavanje $A \mapsto (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$ izomorfizam vektorskih prostora. Ako identificiramo ova dva prostora onda su preslikavanja $A \mapsto \det A$, $A \mapsto \operatorname{per} A$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$ multilinearni funkcionali.

(8) $gl_n(\mathbb{K})$ je izomorfna sa $\mathbb{K}^{n^2}$ (kao vektorski prostor) pa su det i per polinomi od n^2 varijabli tj. $\det, \operatorname{per} \in \mathbb{K}\langle n^2\rangle$. Nadalje, ovi polinomi su n-homogeni tj. det,per $\in \mathbb{K}_n\langle n^2\rangle$. Analogno je $\operatorname{tr} \in \mathbb{K}_1\langle n^2\rangle$. Za njih vrijedi:
(a) $(\det | \operatorname{per}) = (\det | \operatorname{tr}) = (\operatorname{per} | \operatorname{tr}) = 0$
(b) $(\det | \det) = (\operatorname{per} | \operatorname{per}) = n!$
(c) $(\operatorname{tr} | \operatorname{tr}) = n$

Poglavlje 2

Funkcionalni račun

2.1 Poluprosti i nilpotentni operatori

Vektorski prostori koje razmatramo u ovom poglavlju su konačno dimezionalni, osim ako nije rečeno drukčije.

DEFINICIJA 2.1 (1) *Neka je X vektorski prostor, $Y \subset X$ podprostor i $A \in L(X)$. Kažemo da je Y* ***invarijantan*** *na A ako je $AY \subset Y$. Tada definiramo operator $A_0 = A|Y \in L(Y)$ i kažemo da A* ***inducira*** *A_0 na Y ili da je A_0 induciran sa A na Y.*
(2) *Ako $A \in L(X)$ ima netrivijalan invarijantan podprostor $Y \subset X$ (tj. $Y \neq \{0\}$, $Y \neq X$) onda kažemo da je A* ***reducibilan****.*
(3) *Neka su $Y_1, Y_2 \subset X$ netrivijalni invarijantni podprostori od X, $A_1 = A|Y_1$, $A_2 = A|Y_2$ i $Y_1 \dot{+} Y_2 = X$ (direktna suma). Tada kažemo da je A* ***potpuno reducibilan*** *i pišemo $A = A_1 \dot{+} A_2$.*

PROPOZICIJA 2.2 (1) *Neka je $X_1 \subset X$ netrivijalni invarijantni podprostor od $A \in L(X)$. Tada u X postoji baza e takva da je*

$$A_e = \begin{bmatrix} A_{1e} & * \\ 0 & * \end{bmatrix},\ A_1 = A|X_1$$

(2) *Neka je $A \in L(X)$ potpuno reducibilan, $A = A_1 \dot{+} A_2$, $A_1 = A|X_1$, $A_2 = A|X_2$, $X_1 \dot{+} X_2 = X$. Tada u X postoji baza e takva da je A_e* ***kvazidijagonalna*** *matrica tj.*

$$A_e = \begin{bmatrix} A_{1e} & 0 \\ 0 & A_{2e} \end{bmatrix}$$

Dokaz (1) Neka je $n = \dim X$, $k = \dim X_1$, $1 \leq k \leq n-1$, i $(e_1, \ldots, e_k)$ baza u X_1. Uzmimo $e_{k+1}, \ldots, e_n \in X$ tako da je $e = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ baza u X. Tada je e tražena baza.
(2) Neka je $k = \dim X_1$, $l = \dim X_2$, $k + l = n$, $(e_1, \ldots, e_k)$ baza u X_1, $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ baza u X_2. Tada je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ tražena baza od X. ■

KOROLAR 2.3 *Neka je $Y \subset X$ netrivijalan podprostor od X i $L'(X) = \{A \in L(X) : AY \subset Y\}$. Tada je $L'(X)$ podalgebra od $L(X)$ i preslikavanje $A \mapsto A_0 = A|Y$, $A \in L'(X)$ je homomorfizam sa $L'(X)$ na $L(Y)$ tj. vrijedi:*
(1) $(A + B)_0 = A_0 + B_0$, $A, B \in L'(X)$
(2) $(\alpha A)_0 = \alpha A_0$, $\alpha \in \mathbb{K}$
(3) $(AB)_0 = A_0 B_0$

Dokaz Evidentan. ■

DEFINICIJA 2.4 (1) *Kažemo da je operator $A \in L(X)$* ***poluprost*** *ako u X postoji baza e takva da je A_e dijagonalna matrica.*
(2) *Kažemo da je matrica $A \in gl_n(\mathbb{K})$* ***poluprosta*** *ako je A slična dijagonalnoj matrici.*
(3) *Kažemo da je operator $A \in L(X)$ (odnosno matrica $A \in gl_n(\mathbb{K})$)* ***nilpotentan*** *(odnosno* ***nilpotentna****) ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A^k = 0$. Najmanji ovakav k se zove* ***indeks nilpotentnosti*** *od A.*

PROPOZICIJA 2.5 (1) *$A \in L(X)$ je poluprost ako i samo ako je A_e poluprosta za svaku bazu e u X.*
(2) *$A \in L(X)$ je nilpotentan ako i samo ako je A_e nilpotentna za svaku bazu e u X.*

Dokaz (1) Neka su e i $u = Te$ baze u X, $T \in L(X)$, $\det T \neq 0$. Tada je $A_u = T_e^{-1} A_e T_e$. Dakle, A_e je slična dijagonalnoj matrici ako i samo ako je A_u slična dijagonalnoj matrici. (2) Evidentno. ■

PROPOZICIJA 2.6 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Tada vrijedi:*
(1) *$A \in L(X)$ ima invarijantni podprostor X_0, $\dim X_0 = 1$.*
(2) *Postoji baza e u X takva da je A_e gornja trokutasta matrica.*

Dokaz (1) Neka je $\lambda_1 \in \sigma(A)$. Tada postoji $e_1 \in X$, $e_1 \neq 0$, takav da je $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ pa je $\mathbb{C}e_1$ invarijantan podprostor dimenzije 1.
(2) Operatori $A, B \in L(X)$ su slični ako i samo ako su slične matrice A_e i B_e za svaku bazu e u X. Nadalje, svaka matrica $M \in gl_n(\mathbb{C})$ je slična gornjoj trokutastoj matrici, pri čemu su dijagonalni elementi iz $\sigma(M)$. Ovo se dokazuje iteracijom tvrdnje (1). ■

PRIMJERI 2.7

(1) Ako je $A \in L(X)$ poluprost i nilpotentan onda je $A = 0$. Nadalje, 0 je jedini nilpotentni operator indeksa 1.
(2) Neka su $a, b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ i $A = ab^\tau$. Ako je $(a|b) \neq 0$ onda je A poluprosta. Ako je $(a|b) = 0$ onda je A nilpotentna indeksa 2.
(3) Neka je $J = e_1 e_2^\tau + \cdots + e_{n-1} e_n^\tau \in gl_n(\mathbb{K})$ tj. J ima jedinice na prvoj dijagonali iznad glavne, a sve ostale nule. Tada je J nilpotentna matrica indeksa n i zove se **elementarna Jordanova klijetka reda n.** Nadalje, vrijedi:
(a) $p_J(x) = \mu_J(x) = x^n$, $\sigma(J) = \{0\}$
(b) Ako je $f \in \mathbb{K}[x]$ onda je

$$f(J) = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(0) J^k$$

(c) $J^\tau J = I - e_1 e_1^\tau$ i $JJ^\tau = I - e_n e_n^\tau$ su projektori.
(d) J je parcijalna izometrija.
(e) $U = J \pm e_n e_1^\tau$ je ortogonalna matrica i $J = UJ^\tau J$.
(4) Neka je $X = \{f \in \mathbb{K}[x]; \partial f \leq n\}$ i $D \in L(X)$, $Df = f'$, operator deriviranja na X.
(a) Polinomi $e_0, \ldots, e_n \in X$, $e_k(x) = x^k/k!$, $k = 0, \ldots, n$, čine bazu e u X i $\dim X = n + 1$.
(b) Ako je $f \in X$ onda je $f = f(0)e_0 + \cdots + f^{\langle n \rangle}(0)e_n$.
(c) Za operator D vrijedi $De_0 = 0$, $De_1 = e_0, \ldots, De_n = e_{n-1}$ pa je $D_e = J$ elementarna Jordanova klijetka reda $n + 1$.
(5) Ako je $A \in L(X)$ nilpotentan onda je:
(a) $p_A(x) = x^n$, $n = \dim X$
(b) $\mu_A(x) = x^k$, gdje je k indeks nilpotentnosti od A
(c) $\sigma(A) = \{0\}$, $\det A = 0$, $\operatorname{tr} A = 0$
(6) Ako operatori $A, B \in L(X)$ komutiraju onda vrijedi:
(a) Ako su A i B nilpotentni onda su $A + B$, AB također nilpotentni.
(b) Ako su A i B poluprosti onda su $A + B$, AB također poluprosti.
Tvrdnje ne vrijede bez pretpostavke da operatori A i B komutiraju.

LEMA 2.8 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Ako je $A \in L(X)$ nilpotentan operator indeksa p onda je $p \leq n$.*

Dokaz Kako je $A^{p-1} \neq 0$ postoji $e \in X$, $e \neq 0$, takav da je $A^{p-1}e \neq 0$. Dokažimo da su vektori e, Ae, $A^2e, \ldots,$ $A^{p-1}e$ linearno nezavisni, iz čega slijedi $p \leq n$. Neka je $\alpha_0 e + \alpha_1 Ae + \cdots + \alpha_{p-1} A^{p-1} e = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Pomnožimo ovu relaciju sa A^{p-1}. Dobijemo $\alpha_0 A^{p-1} e = 0$ pa je $\alpha_0 = 0$. Pomnožimo sada sa A^{p-2}. Dobijemo $\alpha_1 A^{p-1}e = 0$ pa je $\alpha_1 = 0$. Nastavljajući ovako dobijemo $\alpha_i = 0$, $i = 0, \dots, p-1$. ■

LEMA 2.9 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Ako je $A \in L(X)$ nilpotentan operator indeksa n onda u X postoji baza e takva da je A_e elementarna Jordanova klijetka reda n.*

Dokaz Neka je $e \in X$ takav da je $A^{n-1}e \neq 0$. Po prethodnoj lemi su vektori $e_1 = A^{n-1}e$, $e_2 = A^{n-2}e, \dots, e_{n-1} = Ae$, $e_n = e$ linearno nezavisni pa čine bazu u X. Budući da je $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = e_1, \dots,$ $Ae_n = e_{n-1}$ matrica od A u ovoj bazi je upravo elemetnarna Jordanova klijetka reda n. ■

KOROLAR 2.10 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n.*

(1) *Svi nilpotentni operatori $A \in L(X)$ indeksa n su slični.*

(2) *Sve nilpotentne matrice $A \in gl_n(\mathbb{K})$ indeksa n su slične elementarnoj Jordanovoj klijetki reda n.*

TEOREM 2.11 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $B \in L(X)$ nilpotentan operator indeksa $p < n$. Tada postoje podprostori $X_1, \dots, X_m$ u X takvi da je*

(1) $X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_m$

(2) $n \geq \dim X_1 \geq \dim X_2 \geq \cdots \geq \dim X_m \geq 1$

i X_i je invarijantan na B, $i = 1, \dots, m$. Nadalje, $B_i = B|X_i$ je nilpotentan indeksa $\dim X_i$ *i $B = B_1 \dot{+} \cdots \dot{+} B_m$.*

Dokaz Kako je $B^p = 0$, $B^{p-1} \neq 0$, postoji $e \in X$ takav da je $B^{p-1}e \neq 0$. Označimo sa X_1 podprostor generiran vektorima e, $Be, \dots,$ $B^{p-1}e$. Tada je X_1 invarijantan na B, $\dim X_1 = p$. Nadalje, za dualni operator B^* vrijedi $B^{*p} = 0$, $B^{*p-1} \neq 0$ pa postoji $f \in X^*$ da je $(e|B^{*p-1}f) \neq 0$. Neka je Y_1 podprostor od X^* generiran sa f, B^*f,.., $B^{*p-1}f$. Tada je Y_1 invarijantan na B^* i $\dim Y_1 = p$. Stavimo

$$X' = Y_1^{\perp} = \{x \in X; f(x) = 0, f \in Y_1\}$$

Tada je $\dim X' = n - \dim Y_1 = n - p$. Dokažimo da je $BX' \subset X'$. Za $x \in X'$ i $g \in Y_1$ iz $B^*g \in Y_1$ slijedi $(Bx|g) = (x|B^*g) = 0$, tj. $Bx \in X'$. Dokažimo da je $X_1 \cap X' = \{0\}$. Ako je $x \in X_1 \cap X'$ onda je

$$x = \alpha_0 e + \alpha_1 Be + \cdots + \alpha_{p-1}B^{p-1}e$$

pa dobijemo $B^{p-1}x = \alpha_0 B^{p-1}e$. Sada je

$$0 = (x|B^{*p-1}f) = (B^{p-1}x|f) = \alpha_0(B^{p-1}e|f)$$

pa je $\alpha_0 = 0$. Slično je $B^{p-2}x = \alpha_1 B^{p-1}e$ pa dobijemo

$$(x|B^{*p-2}f) = (B^{p-2}x|f) = \alpha_1(B^{p-1}e|f) = 0$$

tj. $\alpha_1 = 0$. Nastavljajući ovu proceduru dobijemo $\alpha_i = 0$, $i = 0, \ldots, p-1$ tj. $x = 0$ što znači $X_1 \cap X' = \{0\}$. Kako je $\dim X_1 + \dim X' = p + n - p = n$ dobijemo $X = X_1 \dot{+} X'$. Stavimo sada $B_1 = B|X_1$, $B' = B|X'$. Tada je $B = B_1 \dot{+} B'$. Budući da je $B^p = B_1^p \dot{+} B'^p = 0 \dot{+} 0 = 0$, slijedi $B'^p = 0$ što znači da je B' nilpotentan nekog indeksa $p' \leq p$. Ako je $p' = \dim X'$ stavljamo $X_2 = X'$ i $B_2 = B'$ pa je dokaz gotov i $m = 2$.
Ako je $p' < \dim X'$ ponovimo cijelu proceduru s operatorom B' i prostorom X' pa iteracijom dobijemo tvrdnju. ■

KOROLAR 2.12 *Neka je B iz prethodnog teorema. Tada postoji baza e u X takva da je $B_e = J_{k_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J_{k_m}$, $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 1$, gdje je J_k elementarna Jordanova klijetka reda k. Za $k = 1$ stavljamo $J_1 = 0$.*
Matrica B_e se zove ***Jordanova klijetka****.*

Dokaz Operator $B_i = B|X_i$ je nilpotentan indeksa $\dim X_i$ pa postoji baza od X_i takva da B_i u ovoj bazi ima matricu J_{k_i}, $i = 1, \ldots, m$. Skupimo sve ove baze zajedno pa dobijemo bazu e u X s traženim svojstvom. ■

KOROLAR 2.13 *Nilpotentni operatori B_1 i $B_2 \in L(X)$ su slični ako i samo ako imaju istu Jordanovu klijetku.*

LEMA 2.14 *Neka je $A \in L(X)$ i $\mu_A(x) = \mu_1(x)\mu_2(x)$ faktorizacija od μ_A na relativno proste polinome stupnja barem 1, s vodećim koeficijentom 1. Tada vrijedi:*

(1) $X = X_1 \dot{+} X_2$, *gdje je* $X_1 = \ker \mu_1(A)$, $X_2 = \ker \mu_2(A)$
(2) $A = A_1 \dot{+} A_2$, *gdje je* $A_1 = A|X_1$, $A_2 = A|X_2$
(3) $\mu_1 = \mu_{A_1}$, $\mu_2 = \mu_{A_2}$

Dokaz Rastavljajući $1/\mu_A$ na parcijalne razlomke dobijemo polinome f_1, f_2 takve da je

$$\frac{1}{\mu_A} = \frac{f_2}{\mu_1} + \frac{f_1}{\mu_2}$$

odnosno $f_1\mu_1 + f_2\mu_2 = 1$ pa je $f_1(A)\mu_1(A) + f_2(A)\mu_2(A) = I$. Za $x \in X$ stavimo $x_1 = f_2(A)\mu_2(A)x$, $x_2 = f_1(A)\mu_1(A)x$ pa dobijemo $x = x_1 + x_2$. Kako je $\mu_A(A) = 0$ dobijemo $\mu_1(A)x_1 = f_2(A)\mu_1(A)\mu_2(A)x = f_2(A)\mu_A(A)x = 0$ i slično $\mu_2(A)x_2 = 0$. Neka je $X_1 = \ker \mu_1(A)$, $X_2 = \ker \mu_2(A)$. Tada su X_1, X_2 invarijantni na A. Dokažimo da je $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Za $x \in X_1 \cap X_2$ je $\mu_1(A)x = \mu_2(A)x = 0$ pa je $Ix = 0$ tj. $x = 0$. Dakle, $X = X_1 \dot{+} X_2$. Stavimo

$A_1 = A|X_1$, $A_2 = A|X_2$. Još ostaje dokazati $\mu_i = \mu_{A_i}$, $i = 1, 2$. Za $x_1 \in X_1$ je $x_1 = f_2(A)\mu_2(A)x$ pa je $\mu_1(A)x_1 = 0$ tj. $\mu_1(A_1)x_1 = 0$. Dakle, $\mu_1(A_1) = 0$. Ako je $f \in \mathbb{K}[x]$ takav da je $f(A_1) = 0$, $f \neq 0$, onda je $f(A)\mu_2(A) = 0$ pa μ_1 dijeli $f\mu_2$. Kako su μ_1 i μ_2 relativno prosti μ_1 dijeli f što znači $\mu_1 = \mu_{A_1}$. ■

TEOREM 2.15 *Neka je $A \in L(X)$ i $\mu_A = \mu_1 \cdots \mu_m$ faktorizacija na relativno proste faktore stupnja bar 1, s vodećim koeficijentom 1. Tada vrijedi:*
(1) $X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_m$, *gdje je* $X_i = \ker \mu_i(A)$, $i = 1, \ldots, m$
(2) $A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_m$, *gdje je* $A_i = A|X_i$, $i = 1, \ldots, m$
(3) $\mu_i = \mu_{A_i}, i = 1, \ldots, m$

Dokaz Slijedi iteracijom iz prethodne leme. ■

TEOREM 2.16 *Neka je $A \in L(X)$ i $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{p_1} \cdots (x - \lambda_m)^{p_m}$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ različiti. Tada vrijedi:*
(1) $X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_m$, $X_k = \ker(A - \lambda_k I)^{p_k}$, $k = 1, \ldots, m$
(2) $A = (\lambda_1 I_1 + B_1) \dot{+} \cdots \dot{+} (\lambda_m I_m + B_m)$, *gdje je B_k nilpotentan operator na X_k indeksa p_k i $B_k = A_k - \lambda_k I_k$, $A_k = A|X_k$, $k = 1, \ldots, m$.*

Dokaz Primijenimo prethodni teorem na $\mu_k(x) = (x - \lambda_k)^{p_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Ovi polinomi su relativno prosti zbog različitosti od $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Nadalje, operator $B_k = A_k - \lambda_k I_k$ je nilpotentan indeksa p_k zbog $B_k^{p_k} = \mu_k(A_k) = 0$, $k = 1, \ldots, m$. ■

DEFINICIJA 2.17 *Neka je $A \in gl_n(\mathbb{C})$, $A = (\lambda_1 I_1 + J_1) \dot{+} \cdots \dot{+} (\lambda_m I_m + J_m)$, gdje su $\lambda_k \in \mathbb{C}$ i J_k Jordanove klijetke, $k = 1, \ldots, m$. Tada se matrica A zove* ***Jordanova matrica****.*

KOROLAR 2.18 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$. Tada postoji baza e u X takva da je A_e Jordanova matrica.*

Dokaz Polinom μ_A se može faktorizirati $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{p_1} \cdots (x - \lambda_m)^{p_m}$, gdje su $\lambda_k \in \sigma(A)$ različiti i $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$. Sada primijenimo prethodni teorem i izaberimo u svakom X_k bazu tako da B_k ima Jordanovu klijetku u toj bazi. Skupivši sve ove baze zajedno dobijemo traženu bazu od X. ■

KOROLAR 2.19 *Neka je $A \in gl_n(\mathbb{C})$. Tada je A slična Jordanovoj matrici koju zovemo* ***Jordanova forma*** *od A.*

NAPOMENA 2.20 Teorem 2.16 i Korolari 2.18 i 2.19 ne vrijede za realne prostore i realne matrice. Naime, polje $\mathbb{R}$ nije **algebarski zatvoreno** pa se minimalni polinom ne može faktorizirati kao u Teoremu 2.16. Ako operator $A \in L(X)$, gdje je X realni vektorski prostor, ima realan spektar onda se μ_A može faktorizirati kao u Teoremu 2.16 pa sve tri tvrdnje vrijede za ovaj operator. Ako barem jedan element iz $\sigma(A)$ nije realan onda tvrdnje ne vrijede.

2.2 Operatorske funkcije

TEOREM 2.21 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $\dim X = n$, $A \in L(X)$ i $\sigma(A) \subset D(0,r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$. Ako je $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$* ***holomorfna funkcija*** *i $f(z) = \sum \alpha_k z^k$ onda red $\sum \alpha_k A^k$ konvergira u $L(X)$ i njegovu sumu označavamo sa $f(A)$.*

Dokaz Neka je e baza u X takva da je A_e Jordanova matrica

$$A_e = (\lambda_1 I_1 + J_1) \dotplus \cdots \dotplus (\lambda_m I_m + J_m)$$

Nadalje, neka je $S_p(z) = \sum\limits_{j=0}^{p} \alpha_j z^j$, $S_p(A) = \sum\limits_{j=0}^{p} \alpha_j A^j$. Budući da je

$$(\lambda I + J)^j = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \lambda^{j-m} J^m = \sum_{m=0}^{j} [\tfrac{1}{m!}(z^j)^{(m)} J^m]|_{z=\lambda}$$

i $J^n = 0$ dobijemo

$$\begin{aligned}
S_p(A)_e &= \sum_{j=0}^{p} \alpha_j A_e^j = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j (\sum_{k=1}^{m} \dotplus (\lambda_k I_k + J_k))^j \\
&= \sum_{j=0}^{p} \alpha_j \sum_{k=1}^{m} \dotplus (\lambda_k I_k + J_k)^j \\
&= \sum_{k=1}^{m} \dotplus \sum_{j=0}^{p} [\alpha_j z^j I_k + \cdots + \alpha_j \tfrac{(z^j)^{(n-1)}}{(n-1)!} J_k^{n-1}]|_{z=\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \dotplus (S_p(\lambda_k) I_k + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)!} S_p^{(n-1)}(\lambda_k) J_k^{n-1})
\end{aligned}$$

Po teoremu o konvergenciji holomorfnih funkcija vrijedi $S_p^{(m)}(\lambda_k) \to f^{(m)}(\lambda_k)$, $p \to \infty$, $m, k \in \mathbb{N}$, pa prešavši na limes kad $p \to \infty$ dobijemo

$$f(A)_e = f(A_e) = \sum_{k=1}^{m} \dotplus (f(\lambda_k) I_k + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda_k) J_k^{n-1})$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 2.22 *U uvjetima prethodnog teorema vrijedi*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$$

Dokaz Za svaki operator $A \in L(X)$ vrijedi $\sigma(A) = \sigma(A_e)$, za svaku bazu e u X. Ako uzmemo bazu e takvu da je A_e Jordanova matrica onda po prethodnom teoremu zaključujemo da je $f(A)_e = f(A_e)$ gornja trokutasta matrica s dijagonalnim elementima $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_m)$ pa slijedi tvrdnja. ■

PRIMJERI 2.23 Ako je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijela funkcija tj. holomorfna na cijelom $\mathbb{C}$, onda su uvjeti prethodnog teorema ispunjeni za svaki $A \in L(X)$ pa za $f(z) = \sum \alpha_k z^k$ red $\sum \alpha_k A^k$ konvergira za svaki operator $A \in L(X)$ i pišemo $f(A) = \sum \alpha_k A^k$. Kao specijalni slučaj ove tvrdnje dobijemo:

(a) $\exp A = \sum\limits_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$

(b) $\sin A = \sum\limits_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$

(c) $\cos A = \sum\limits_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$

(d) $\exp(iA) = \cos A + i \sin A$

Analogne tvrdnje vrijede i za hiperbolne funkcije *ch* i *sh*.

NAPOMENA 2.24 Preslikavanje $f \mapsto f(A)$ se zove **funkcionalni račun** za A. Popularno kažemo da smo u funkciji f **umjesto varijable** z **uvrstili operator** A. Naravno, ovo se ne može primijeniti na svaku funkciju f. Jedan od glavnih problema funkcionalnog računa je naći maksimalnu klasu funkcija f za koje postoji operator $f(A)$. Do sada smo riješili ovaj problem parcijalno: za polinome i cijele funkcije, zatim za holomorfne funkcije na nekom disku koji sadrži $\sigma(A)$. Sljedeća definicija proširuje funkcionalni račun $f \mapsto f(A)$ na maksimalnu klasu funkcija.

DEFINICIJA 2.25 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in L(X)$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{p_1} \cdots (x - \lambda_m)^{p_m}$ i e baza u X u kojoj A ima Jordanovu matricu*

$$A_e = \sum_{k=1}^{m} \dot{+} (\lambda_k I_k + J_k)$$

Nadalje, neka je $F[A]$ skup svih funkcija $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ za koje postoje brojevi

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \ldots, f^{(p_k-1)}(\lambda_k), \; k = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

Uređeni skup svih ovih brojeva označimo sa $O(f)$. Ako je $f \in F[A]$ onda definiramo operator $f(A)$ sa

$$f(A)_e = f(A_e) = \sum_{k=1}^{m} \dot{+} (f(\lambda_k) I_k + \cdots + \tfrac{1}{(p_k-1)!} f^{(p_k-1)}(\lambda_k) J_k^{p_k-1})$$

NAPOMENA 2.26 Ako su svi brojevi (2.1) jednaki 0 tj. $O(f) = 0$ onda je $f(A) = 0$. Ako je $O(f) = O(g)$ onda je $f(A) = g(A)$. Ako je f holomorfna na nekom disku koji sadrži $\sigma(A)$ onda iz dokaza Teorema 2.21 zaključujemo da je $f(A)$ iz tog teorema u skladu s ovom definicijom. Nadalje, $F[A]$ je maksimalna klasa funkcija za koje se može definirati $f(A)$. Ako je X realan prostor i $A \in L(X)$ onda definiramo $F[A] = \{f \in F[A_c]; O(f) \text{ realan}\}$ pa je $f(A) \in L(X)$, za $f \in F[A]$. Na taj način dobijemo realni funkcionalni račun.

Zamijetimo da je $F[A]$ algebra nad K. Kažemo da niz (f_n) iz $F[A]$ konvergira prema $f \in F[A]$ ako vrijedi $O(f_n) \to O(f)$, $n \to \infty$, tj.

$$f_n^{(s)}(\lambda_k) \to f^{(s)}(\lambda_k),\ k = 1, \ldots, m,\ s = 0, \ldots, p_k - 1$$

TEOREM 2.27 *Neka je $\delta : F[A] \to L(X)$, $\delta(f) = f(A)$. Tada je δ homomorfizam algebra i vrijedi $\delta(1) = I$, $\delta(id) = A$. Nadalje, δ je neprekidan tj. ako niz (f_n) iz $F[A]$ konvergira prema $f \in F[A]$ onda niz $(\delta(f_n))$ iz $L(X)$ konvergira prema $\delta(F) \in L(X)$.*

Dokaz Prvi dio tvrdnje slijedi neposredno iz definicije, a drugi iz teorema konvergencije holomorfnih funkcija. Naime, svaka funkcija $f \in F[A]$ je restrikcija neke holomorfne funkcije na $\sigma(A)$. ■

KOROLAR 2.28 (Teorem o preslikavanju spektra)
Ako je $f \in F[A]$ onda je $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Dokaz Isti kao u Korolaru 2.22. ■

TEOREM 2.29 *Neka je $A \in L(X)$, $\partial\mu_A = m$ i $f \in F[A]$. Tada postoji jedinstven polinom $P \in \mathbb{K}[x]$, $\partial P < m$, takav da vrijedi $f(A) = P(A)$.*

Dokaz Ako su P_1, P_2 dva ovakva polinoma onda je $P_1(A) - P_2(A) = f(A) - f(A) = 0$ pa je $P_1 - P_2$ djeljiv s μ_A. Kako je $\partial(P_1 - P_2) < m = \partial\mu_A$ dobijemo $P_1 - P_2 = 0$ tj. $P_1 = P_2$.

Prvo pretpostavimo da ovakav polinom P postoji i izvedimo neka njegova nužna svojstva. Neka je

$$\mu_A(z) = (z - \lambda_1)^{p_1} \cdots (z - \lambda_s)^{p_s},\ p_1 + \cdots + p_s = m = \partial\mu_A$$

Ovdje smo pretpostavili da je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ onda prijeđemo na kompleksifikacije X_c i A_c.

Razvijajući P/μ_A u parcijalne razlomke dobijemo

$$\frac{P(z)}{\mu_A(z)} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\alpha_{k1}}{z-\lambda_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(z-\lambda_k)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{kp_k}}{(z-\lambda_k)^{p_k}}\right) \tag{2.2}$$

Označimo sa γ_k pozitivno orijentiranu kružnicu sa središtem u λ_k koja, osim λ_k, ne obilazi ostale točke iz $\sigma(A)$. Po teoremu o residuumu je

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} (z - \lambda_k)^{j-1} \frac{P(z)}{\mu_A(z)} dz,\ j = 1, \ldots, p_k,\ k = 1, \ldots, s$$

Budući da je λ_k pol reda p_k od P/μ_A iz (2.2) dobijemo

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(p_k-1)!} \lim_{z\to\lambda_k} [(z-\lambda_k)^{p_k} \frac{P(z)}{\mu_A(z)}]^{(p_k-j)} \tag{2.3}$$

Dokažimo sada egzistenciju ovakvog polinoma P. Prvo definiramo brojeve

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(p_k-1)!} \lim_{z\to\lambda_k} [(z-\lambda_k)^{p_k} \frac{f(z)}{\mu_A(z)}]^{(p_k-j)} \tag{2.4}$$

a onda definiramo polinom P sa

$$P(z) = \mu_A(z) \sum_{k=1}^{s} (\frac{\alpha_{k1}}{z-\lambda_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(z-\lambda_k)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{kp_k}}{(z-\lambda_k)^{p_k}}) \tag{2.5}$$

Sada za polinom P dobijemo

$$P^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k),\ j = 0, 1, \ldots, p_{k-1},\ k = 1, \ldots, s,$$

što po 2.25 znači da je $P(A) = f(A)$. ■

LEMA 2.30 (Lagrange-Sylvester)
Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ različiti kompleksni brojevi, $p_1, \ldots, p_s$ proizvoljni prirodni brojevi i β_{kj}, $j = 1, \ldots, p_k$, $k = 1, \ldots, s$, proizvoljni kompleksni brojevi. Tada potoji jedinstven polinom $P \in \mathbb{C}[x]$ takav da je $\partial P < m = p_1 + \cdots + p_s$ i

$$P^{(j-1)}(\lambda_k) = \beta_{kj},\ j = 1, \ldots, p_k,\ k = 1, \ldots, s \tag{2.6}$$

*Polinom P se zove **Lagrange-Sylvesterov polinom** zadan uvjetom (2.6). Ako su svi $p_i = 1$ onda se P zove **Lagrangeov interpolacijski polinom** zadan uvjetom: $P(\lambda_k) = \beta_{k1}$, $k = 1, \ldots, s$.*

Dokaz Neka je $\mu(z) = (z-\lambda_1)^{p_1} \cdots (z-\lambda_k)^{p_k}$. U relaciju (2.4) iz dokaza prethodnog teorema uvrstimo μ umjesto μ_A, izvršimo naznačene operacije i u rezultatu zamijenimo $f^{(q-1)}(\lambda_k)$ sa β_{kq}. Pomoću brojeva β_{kq} i polinoma μ izračunavamo brojeve α_{kq} iz (2.4) i pomoću njih definiramo polinom (2.5). Za taj polinom vrijedi (2.3). Odavde i iz (2.4) (ispisanog pomoću β_{kq}) dobijemo $\beta_{kj} = P^{(j-1)}(\lambda_k)$, $j = 1, \ldots, p_k$, $k = 1, \ldots, s$. Time smo dokazali da ovakav polinom postoji. Nadalje, iz (2.3) slijedi da su koeficijenti od P određeni jednoznačno pomoću brojeva $P^{(j-1)}(\lambda_k)$ pa je P jedinstven. ■

TEOREM 2.31 *Neka je $A \in L(X)$ i $\mu_A(z) = (z-\lambda_1)^{p_1} \cdots (z-\lambda_s)^{p_s}$. Tada postoje jedinstveni linearno nezavisni operatori P_{kj}, $j = 1, \ldots, p_k$, $k = 1, \ldots, s$, koji su polinomi od A, tako da za svaki $f \in F[A]$ vrijedi*

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} [f(\lambda_k)P_{k1} + f'(\lambda_k)P_{k2} + \cdots + f^{(p_k-1)}(\lambda_k)P_{kp_k}]$$

Dokaz Neka je P polinom iz Teorema 2.29 tj. $P(A) = f(A)$. Ako iz formule (2.4) iz dokaza Teorema 2.29, uvrstimo α_{kj} u (2.5) i grupiramo sve članove uz istu derivaciju od f onda se (2.5) može prepisati u obliku

$$P(z) = \sum_{k=1}^{s} [f(\lambda_k)g_{k1}(z) + f'(\lambda_k)g_{k2}(z) + \cdots + f^{(p_k-1)}(\lambda_k)g_{kp_k}(z)]$$

gdje su g_{kj} neki polinomi, $\partial g_{kj} < m = \partial\mu_A$, i oni ne zavise od f nego samo od μ_A. Po Lemi 2.30 zaključujemo da je g_{kj} Lagrange-Sylvesterov polinom definiran uvjetima: $g_{kj}^{(j-1)}(\lambda_k) = 1$, dok je $g_{kj}^{(m)}(\lambda_r) = 0$, $r \neq k$, $m \neq j-1$ tj. samo jedan pripadni broj je 1, a svi ostali su 0. Iz ovoga slijedi nezavisnost polinoma g_{kj}, $j = 1, \ldots, p_k$, $k = 1, \ldots, s$. Definiramo sada operatore P_{kj} sa

$$P_{kj} = g_{kj}(A), \ j = 1, \ldots, p_k, \ k = 1, \ldots, s$$

Kako su polinomi g_{kj} nezavisni i imaju stupanj strogo manji od $m = \partial\mu_A$ zaključujemo da su operatori P_{kj} također nezavisni. ∎

PRIMJERI 2.32 Prethodni teorem je **osnovni teorem funkcionalnog računa**. On daje efektivni način računanja $f(A)$ ako je poznat polinom μ_A. Naime, u formulu iz teorema uvrštavamo razne funkcije $f \in F[A]$, shvaćajući P_{kj} kao nepoznate varijable, pa dobijemo sustav jednadžbi za operatore P_{kj}.

(1) Neka je $A \in L(X)$ takav da je $\mu_A(z) = z^2 - z$, npr. neka je A projektor. Tada je $\sigma(A) = \{0, 1\}$ pa je $f(A) = f(0)P_1 + f(1)P_2$, $f \in F[A]$. Da bismo našli P_1 i P_2 stavimo prvo $f(z) = 1$, a zatim $f(z) = z$. Dobijemo $I = P_1 + P_2$, $A = P_2$, pa je $f(A) = f(0)(I - A) + f(1)A$.
(2) Neka su a, $b \in \mathbb{R}^n$ i $A = ab^\tau$. Tada je $\mu_A(z) = z^2 - (a|b)z$, $\sigma(A) = \{0, (a|b)\}$. Postupajući kao u (1), za $(a|b) \neq 0$ dobijemo

$$f(A) = f(0)(I - \tfrac{1}{(a|b)}A) + \tfrac{f((a|b))}{(a|b)}A, \ f \in F[A]$$

dok za $(a|b) = 0$ vrijedi $f(A) = f(0)I + f'(0)A$, $f \in F[A]$.
(3) Ako je $A \in L(X)$ i $\mu_A(z) = z^2 - 1$, onda je $\sigma(A) = \{-1, 1\}$ i

$$f(A) = \tfrac{1}{2}f(-1)(I - A) + \tfrac{1}{2}f(1)(I + A), \ f \in F[A]$$

(4) Ako je $A \in L(X)$ i $\mu_A(z) = (z - \alpha)(z - \beta)$ onda je

$$f(A) = \tfrac{f(\alpha)}{\alpha-\beta}(A - \beta I) + \tfrac{f(\beta)}{\beta-\alpha}(A - \alpha I), \ \alpha \neq \beta$$

dok za $\alpha = \beta$ imamo $f(A) = f(\alpha)I + f'(\alpha)(A - \alpha I)$.
(5) Ako u prethodnom teoremu zamijenimo μ_A nekim polinomom μ takvim da je $\mu(A) = 0$ onda će dobiveni rezultat za $f(A)$ biti isti za svaki polinom f, s time što će u izrazu za $f(A)$ biti članova koji su ustvari jednaki nula. Međutim, za ostale $f \in F[A]$ će se tražiti postojanje još nekih derivacija što f ne mora imati, ali će operatori uz te dodatne derivacije biti jednaki nuli.

TEOREM 2.33 (Dunfordov integral)
Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in L(X)$, f holomorfna na nekoj okolini Ω od $\sigma(A)$ i γ zatvorena krivulja u Ω koja obilazi $\sigma(A)$ jedanput u pozitivnom smijeru. Tada vrijedi:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - A)^{-1} f(z)\,dz$$

Dokaz Po prethodnom teoremu za funkciju $g(w) = 1/(z-w)$, $z \notin \sigma(A)$, vrijedi

$$g(A) = (zI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{z-\lambda_k}P_{k1} + \cdots + \frac{(p_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{p_k}}P_{kp_k}\right)$$

Budući da je f holomorfna na Ω vrijedi

$$f^{(j-1)}(\lambda_k) = \frac{(j-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-\lambda_k)^j} f(z)\,dz,\ j \in \mathbb{N},\ k = 1, \ldots, s$$

pa dobijemo

$$\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-\lambda_k}P_{k1} + \cdots + \frac{(p_k-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-\lambda_k)^{p_k}}P_{kp_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{1}{z-\lambda_k}P_{k1} + \cdots + \frac{(p_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{p_k}}P_{kp_k}\right) f(z)\,dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - A)^{-1} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

TEOREM 2.34 *Neka je $A \in L(X)$, f holomorfna na okolini od $\sigma(A)$, g holomorfna na okolini od $\sigma(f(A))$ i $h = g \circ f$. Tada je $h \in F[A]$ i*

$$h(A) = g(f(A))$$

Dokaz Neka je Ω **područje**, tj. otvoren i povezan skup, koje sadrži $\sigma(f(A))$ i takvo da je g holomorfna na okolini od $\overline{\Omega}$. Kako je $\sigma(f(A)) \subset \Omega$ postoji područje Ω' da je $\sigma(A) \subset \Omega'$, f holomorfna na okolini od $\overline{\Omega'}$ i $f\left(\overline{\Omega'}\right) \subset \Omega$. Odavde slijedi da je h holomorfna na okolini od $\overline{\Omega'}$ pa je $h \in F[A]$.

Kako je funkcija $\zeta \mapsto 1/(z - f(\zeta))$ holomorfna na Ω' po prethodnom teoremu je

$$(zI - f(A))^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega'} \frac{1}{z-f(\zeta)}(\zeta I - A)^{-1}d\zeta$$

Sada ponovo po prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} g(f(A)) &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} (zI - f(A))^{-1} g\,(z)\,dz \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} (\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega'} (\zeta I - A)^{-1} \tfrac{d\zeta}{z - f(\zeta)}) g\,(z)\,dz \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega'} (\zeta I - A)^{-1} (\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \tfrac{1}{z - f(\zeta)} g\,(z)\,dz) d\zeta \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega'} (\zeta I - A)^{-1} g\,(f\,(\zeta))\,d\zeta \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega'} (\zeta I - A)^{-1} h\,(\zeta)\,d\zeta = h\,(A) \end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

PRIMJERI 2.35

(1) Neka je $A \in L\,(X)$ i $\sigma\,(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z-1| < 1\}$. Budući da vrijedi formula $\log z = \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{1}{k} (z-1)^k$, $|z-1| < 1$, uvrštavanjem A umjesto z dobijemo

$$\log A = \sum_{k\geq 1} (-1)^k \tfrac{1}{k} (A - I)^k$$

Zbog $\exp\log A = A$ definiramo **potenciju** $A^\alpha = \exp\,(\alpha \log A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Specijalno je $A^{1/k}$ **k-ti korijen** iz A.

(2) Neka je A iz (1). Budući da je $(1+z)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} z^k$, $|z| < 1$, uvrštavanjem A umjesto $1+z$ dobijemo

$$A^\alpha = \sum_{k\geq 0} \tbinom{\alpha}{k} (A - I)^k$$

Ovako definirani A^α je jednak onom iz (1).

(3) Neka je $A \in L\,(X)$ i $\sigma\,(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$. Budući da za $\operatorname{Re} z > 0$ vrijedi $1/z = \int_0^\infty \exp\,(-tz)\,dt$ dobijemo

$$A^{-1} = \int\limits_0^\infty \exp\,(-tA)\,dt$$

(4) Neka je $A \in L\,(X)$ i $\sigma\,(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada po (3) dobijemo

$$(\alpha I - A)^{-1} = \int\limits_0^\infty \exp\,[t\,(A - \alpha I)]\,dt$$

(5) Neka je $A \in L\,(X)$ i $\sigma\,(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$. Tada je

$$\Gamma\,(A) = \int\limits_0^\infty e^{-t} \exp\,[(A - I)\log t]\,dt$$

gamma funkcija od A i vrijedi $\Gamma(A+I) = A\Gamma(A)$. Koristeći **analitičko produljenje** od Γ na $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$ možemo definirati $\Gamma(A)$ za svaki operator $A \in L(X)$ za kojeg je $\sigma(A) \subset \Omega$.

DEFINICIJA 2.36 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$. Tada se funkcija $R_A : \mathbb{C}\backslash\sigma(A) \to L(X)$, $R_A(z) = (zI - A)^{-1}$ zove* ***rezolventa*** *operatora A.*

TEOREM 2.37 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in L(X)$ i $m = \partial\mu_A$. Tada postoji jedinstven polinom $h \in \mathbb{C}[x,z]$ stupnja $m-1$ po obje varijable, takav da vrijedi*

$$R_A(z) = h(A,z)/\mu_A(z), \;\; z \notin \sigma(A)$$

Dokaz Razvijajući $\mu_A(x)$ u Taylorov red oko $z \in \mathbb{C}$ dobijemo

$$\mu_A(x) = \sum_{k=0}^{m} \tfrac{1}{k!}\mu_A^{(k)}(z)(x-z)^k$$

pa je

$$\mu_A(x) - \mu_A(z) = (x-z)\sum_{k=1}^{m} \tfrac{1}{k!}\mu_A^{(k)}(z)(x-z)^{k-1}$$

Dakle, za polinom

$$h(x,z) = \sum_{k=1}^{m} \tfrac{1}{k!}\mu_A^{(k)}(z)(x-z)^{k-1}$$

vrijedi

$$h(x,z) = (\mu_A(x) - \mu_A(z))/(x-z)$$

pa je h je polinom od dvije varijable stupnja $m-1$ po obje i $h(x,z) = h(z,x)$. Ako u formulu $\mu_A(x) - \mu_A(z) = (x-z)h(x,z)$ uvrstimo A umjesto x dobijemo $-\mu_A(z)I = (A - zI)h(A,z)$. Ako je $z \notin \sigma(A)$ onda je $(zI-A)^{-1}\mu_A(z) = h(A,z)$ iz čega slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 2.38 (1) *R_A je racionalna funkcija za svaki $A \in L(X)$.*

(2) *R_A je holomorfna na $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$*

(3) *$\sigma(A)$ je* ***skup polova*** *od R_A. Točka $\lambda \in \sigma(A)$ je* ***pol reda*** *k, gdje je k red od λ kao nule od μ_A*

(4) *$h(A,z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$*

(5) *∞ je* ***uklonjivi singularitet*** *od R_A, pa ako definiramo $R_A(\infty) = 0$ onda je R_A holomorfna u okolini od ∞.*

Dokaz (1) i (2) slijede neposredno iz prethodnog teorema. (3) slijedi iz prethodnog teorema i (4), dok (4) slijedi iz činjenice da je h polinom stupnja $m-1$ po obje varijable pa je $h(A,z)\neq 0$ budući da je $m=\partial\mu_A$. (5) slijedi iz evidentne formule $\lim\limits_{z\to\infty} R_A(z)=0$. ∎

PRIMJERI 2.39

(1) Razvoj rezolvente u **Laurentov red** oko ∞ je dan sa

$$R_A(z)=\tfrac{1}{z}(I-\tfrac{1}{z}A)^{-1}=\sum_{k\geq 0}\tfrac{1}{z^{k+1}}A^k$$

Specijalno je $\operatorname*{Res}\limits_{\infty} R_A=-I$.

(2) Razvoj rezolvente u **Taylorov red** oko $z_0\in\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ je dan sa:

$$\begin{aligned}R_A(z)&=((z-z_0)\,I+(z_0I-A))^{-1}\\&=R_A(z_0)\,(I+(z-z_0)\,R_A\,(z_0))^{-1}\\&=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\,R_A\,(z_0)^{k+1}\,(z-z_0)^k\end{aligned}$$

i ovaj red konvergira za $|z-z_0|<|z_0-\lambda_0|$, gdje je $\lambda_0\in\sigma\,(A)$ točka iz $\sigma\,(A)$ najbliža točki z_0. Specijalno dobijemo

$$R_A^{(k)}(z)=(-1)^k\,k!R_A\,(z)^{k+1}\,,\ z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(A),\ k\in\mathbb{N}_0$$

(3) Po Korolaru 2.38 je $h\,(A,z)\neq 0$ za svaki $z\in\mathbb{C}$. Dakle, polinom $h\,(A,z)$ s operatorskim koeficijentima nema niti jedne nule u $\mathbb{C}$. Usporediti ovo s osnovnim teoremom algebre.

(4) Vrijedi formula

$$R_A(z)-R_A(z')=(z'-z)R_A(z)R_A(z'),\ z,z'\in\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$$

i zovemo je **rezolventna jednadžba**. Iz nje slijedi $R_A'(z)=-R_A(z)^2$.

(5) Ako je $A\in L\,(X)$ nilpotentan operator indeksa k onda je

$$R_A\,(z)=\tfrac{1}{z}I+\tfrac{1}{z^2}A+\cdots+\tfrac{1}{z^k}A^{k-1},\ z\neq 0$$

(6) Ako je $A\in L\,(X)$ operator ranga 1 onda je $\mu_A\,(z)=z^2-z\operatorname{tr}A$. Nadalje, ako je $\operatorname{tr}A\neq 0$ onda je A poluprost i

$$R_A(z)=\tfrac{1}{z}(I-\tfrac{1}{\operatorname{tr}A}A)+\tfrac{1}{(z-\operatorname{tr}A)\operatorname{tr}A}A$$

Ako je $\operatorname{tr}A=0$ onda je A nilpotentan indeksa 2.

PROPOZICIJA 2.40 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$. Tada je A poluprost ako i samo ako μ_A ima sve nule prvog reda.*

Dokaz Neka je $\mu_A(z) = (z-\lambda_1)^{p_1} \cdots (z-\lambda_s)^{p_s}$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ različiti. Po Teoremu 2.15 je $A = A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_s$, gdje su $A_k = A|X_k$, i $X_k = \ker(A-\lambda_k I)^{p_k}$, $k = 1, \ldots, s$. Nadalje, A je poluprost ako i samo ako su svi A_k poluprosti. Budući da je $\mu_{A_k}(z) = (z-\lambda_k)^{p_k}$ zaključujemo da je A_k poluprost ako i samo ako je $p_k = 1$ tj. $A_k = \lambda_k I_k$, za svaki k. ■

2.3 Jordanov rastav

TEOREM 2.41 (Jordanov rastav)
Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$. Tada postoje jedinstveni operatori $P, N \in L(X)$, koji su polinomi od A, takvi da vrijedi:
(1) *P je poluprost, a N je nilpotentan*
(2) *$A = P + N$*
*Operator P se zove **poluprosti dio** od A, a N **nilpotentni dio** od A. Rastav $A = P + N$ se zove **Jordanov rastav** od A. Specijalno je $PN = NP$.*

Dokaz Ako u Teoremu 2.31 stavimo $f(x) = x$ onda dobijemo

$$A = \lambda_1 P_{11} + \cdots + \lambda_s P_{s1} + P_{12} + \cdots + P_{s2}$$

pa ako definiramo $P = \lambda_1 P_{11} + \cdots + \lambda_s P_{s1}$ i $N = P_{12} + \cdots + P_{s2}$ onda vrijedi $A = P+N$. Neka je e baza u X takva da je $A_e = (\lambda_1 I_1 + J_1) \dotplus \cdots \dotplus (\lambda_m I_m + J_m)$ Jordanova matrica. Tada je $P_e = \lambda_1 I_1 \dotplus \cdots \dotplus \lambda_m I_m$ i $N_e = J_1 \dotplus \cdots \dotplus J_m$, što znači da je P poluprost, a N nilpotentan. Ostale tvrdnje slijede iz 2.31. ■

KOROLAR 2.42 *Neka je $A = P + N$ iz prethodnog teorema i $\mu_A(z) = (z-\lambda_1)^{p_1} \cdots (z-\lambda_s)^{p_s}$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \sigma(A)$ različiti. Tada vrijedi:*
(1) $\mu_P(z) = (z-\lambda_1) \cdots (z-\lambda_s)$
(2) $\mu_N(z) = z^p$, $p = \max_s p_s$
(3) $\sigma(A) = \sigma(P)$, $\sigma(N) = \{0\}$
(4) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} P$, $\det A = \det P$

Dokaz Tvrdnje slijede iz dokaza prethodnog teorema. ■

NAPOMENA 2.43 Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$. Ako je A poluprost onda je $\sigma(A)$ realan i μ_A i ima sve nule prvog reda. Međutim, ako μ_A ima sve nule prvog reda, a $\sigma(A)$ nije realan onda A nije poluprost, ali je A_c poluprost. Ako je $\sigma(A)$ realan onda A ima Jordanov rastav u $L(X)$.

DEFINICIJA 2.44 *Kažemo da je operator $A \in L(X)$* ***unipotentan*** *ako je $A - I$ nilpotentan.*

TEOREM 2.45 (Jordanov multiplikativni rastav)
Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$ regularan operator. Tada postoje jedinstveni $P, U \in L(X)$, koji su polinomi od A, takvi da vrijedi:
(1) *P je poluprost, a U je unipotentan*
(2) $A = PU = UP$
Operator P se zove ***poluprosti dio*** *od A, a U* ***unipotentni dio*** *od A. Rastav $A = PU$ se zove* ***Jordanov multiplikativni rastav*** *od A.*

Dokaz Neka je $A = P + N$ Jordanov rastav od A. Kako je $\det A = \det P \neq 0$ definiramo operator $U = I + P^{-1}N$. Tada je U unipotentan i $A = P + N = P(I + P^{-1}N) = PU$. Ostale tvrdnje slijede iz Teorema 2.41 ■

TEOREM 2.46 *Neka je $A \in L(X)$, $n = \dim X$ i $A = P + N$ Jordanov rastav od A. Ako je f holomorfna na nekoj okolini od $\sigma(A)$ onda vrijedi*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(P) N^k$$

Dokaz Tvrdnju je dovoljno dokazati za polinome. Nadalje, kako je gornja formula linearna po f tvrdnju je dovoljno dokazati za polinome oblika $f(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Za taj polinom vrijedi $f^{(k)}(z) = \binom{m}{k} k! z^{m-k}$, $0 \leq k \leq m$, pa je

$$A^m = (P + N)^m = \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} P^{m-k} N^k$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 2.47 *Neka je $A = P + N$ Jordanov rastav od A. Tada vrijedi*
(1) *$F[A] \subset F[P]$ i za $f \in F[A]$ je $f(P)$ poluprosti dio od $f(A)$*
(2) *Ako je $\det A \neq 0$ onda je $\det P \neq 0$ i P^{-1} je poluprosti dio od A^{-1}*

Dokaz Slijedi iz prethodnog teorema. ■

KOROLAR 2.48 *Neka su $A, B \in L(X)$ i $A = P_1 + N_1$, $B = P_2 + N_2$ Jordanovi rastavi. Ako A i B komutiraju onda vrijedi:*
(1) *$P_1 + P_2$ je poluprosti dio od $A + B$, a $N_1 + N_2$ nilpotentni dio od $A + B$*
(2) *$P_1 P_2$ je poluprosti dio od AB, a $P_1 N_2 + N_1 P_2 + N_1 N_2$ je nilpotentni dio od AB*

KOROLAR 2.49 *Neka je $A \in L(X)$ unipotentan operator i $f \in F[A]$. Tada vrijedi:*

(1) $p_A(z) = (z-1)^n$, $n = \dim X$

(2) $\sigma(A) = \{1\}$, $\operatorname{tr} A = n$, $\det A = 1$

(3) *Poluprosti dio od A je I i A^{-1} je unipotentan.*

(4) *Vrijedi formula*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(1)(A-I)^k$$

(5) *$f(A)$ je unipotentan ako i samo ako je $f(1) = 1$*

(6) *$f(A)$ je nilpotentan ako i samo ako je $f(1) = 0$*

PROPOZICIJA 2.50 *Neka je $A \in L(X)$ i $p_A(z) = (z-\lambda_1)^{n_1} \cdots (z-\lambda_s)^{n_s}$. Tada za svaki $f \in F[A]$ vrijedi:*

(1) $\det f(A) = f(\lambda_1)^{n_1} \cdots f(\lambda_s)^{n_s}$

(2) $\operatorname{tr} f(A) = n_1 f(\lambda_1) + \cdots + n_s f(\lambda_s)$

Dokaz Slijedi iz teorema o preslikavanju spektra korištenjem Jordanove matrice od A. ■

KOROLAR 2.51 *Neka je $A \in L(X)$ poluprost i $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. Tada postoje poluprosti operatori $P_1, \ldots, P_s \in L(X)$ takvi da vrijedi:*

(1) $P_i P_j = 0$, $i \neq j$, $P_i^2 = P_i$, $i, j = 1, \ldots, s$

(2) $P_1 + \cdots + P_s = I$

(3) $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_s P_s$

(4) $f(A) = f(\lambda_1) P_1 + \cdots + f(\lambda_s) P_s$, $f \in F[A]$

(5) $\det f(A) = f(\lambda_1)^{\operatorname{tr} P_1} \cdots f(\lambda_s)^{\operatorname{tr} P_s}$

(6) $\operatorname{tr} f(A) = \operatorname{tr} P_1 f(\lambda_1) + \cdots + \operatorname{tr} P_s f(\lambda_s)$

Dokaz Slijedi iz Teorema 2.31 i Propozicije 2.50. ■

PRIMJERI 2.52

(1) Ako je $A = P + N$ Jordanov rastav i $\dim X = n$ onda je

$$R_A(z) = R_P(z)(I - R_P(z)N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} R_P(z)^{k+1} N^k$$

(2) Ako je $A \in L(X)$ unipotentan i $\dim X = n$ onda je

$$R_A(z) = ((z-1)I - (A-I))^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{(z-1)^{k+1}} (A-I)^k$$

(3) Ako je $A \in L(X)$ operator ranga 1 i $n = \dim X$ onda vrijedi:
(a) $\det f(A) = f(0)^{n-1} f(\operatorname{tr} A)$
(b) $\operatorname{tr} f(A) = (n-1)f(0) + f(\operatorname{tr} A)$
(4) Ako je $A \in L(X)$, $A^2 = A$ i $n = \dim X$ onda vrijedi:
(a) $\operatorname{tr} A \in \mathbb{N}_0$ i A je poluprost.
(b) $\det f(A) = f(0)^{n-\operatorname{tr} A} f(1)^{\operatorname{tr} A}$
(c) $\operatorname{tr} f(A) = (n - \operatorname{tr} A)f(0) + \operatorname{tr} A f(1)$
(5) Ako je $A \in L(X)$, $A^2 = I$ i $n = \dim X$ onda je A je poluprost i

$$\det f(A) = f(-1)^{k_1} f(1)^{k_2}, \;\; \operatorname{tr} f(A) = k_1 f(-1) + k_2 f(1)$$

gdje su $k_1 = \frac{1}{2}(n - \operatorname{tr} A) \in \mathbb{N}_0$, $k_2 = \frac{1}{2}(n + \operatorname{tr} A) \in \mathbb{N}_0$.
(6) Neka je $X = \{f \in \mathbb{K}[x]\,; \partial f \leq n\}$ i $A \in L(X)$ operator definiran sa

$$Af(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$$

Tada je A poluprost i za $f \in F[A]$ vrijedi:
(a) $\sigma(A) = \{\frac{1}{k}; k = 1, \ldots, n+1\}$
(b) $\det A = \frac{1}{(n+1)!}$
(c) $\operatorname{tr} A = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$
(d) $\det f(A) = \prod\limits_{k=0}^{n} f(\frac{1}{k+1})$, $\operatorname{tr} f(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{1}{k+1})$
(e) A je regularan i $A^{-1}f(x) = f(x) + xf'(x)$

PROPOZICIJA 2.53 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ i*

$$P_\lambda = \operatorname{Res}_\lambda R_A, \qquad N_\lambda = \operatorname{Res}_\lambda \left[(z-\lambda)\, R_A\,(z)\right]$$

onda vrijedi:
(1) *P_λ je poluprost, a N_λ je nilpotentan*
(2) *$P = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$ je poluprosti dio od A*
(3) *$N = \sum_\lambda N_\lambda$ je nilpotentni dio od A*

Dokaz Neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. Tada iz dokaza Teorema 2.33 slijedi

$$R_A(z) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{1}{z-\lambda_k} P_{k1} + \frac{1}{(z-\lambda_k)^2} P_{k2} + \cdots + \frac{(p_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{p_k}} P_{kp_k}\right)$$

što je razvoj u parcijalne razlomke od R_A. Izraz pod sumom je glavni dio Laurentova reda od R_A oko točke λ_k. Prema tome je $\operatorname*{Res}_{\lambda_k} R_A = P_{k1}$ i $\operatorname*{Res}_{\lambda_k} [(z-\lambda_k)\, R_A(z)] = P_{k2}$ pa tvrdnja slijedi iz dokaza Teorema 2.41. ■

KOROLAR 2.54 *U uvjetima prethodne propozicije vrijedi:*

(1) $P_\lambda P_\mu = 0$, *za* $\lambda \neq \mu$, *i* $\sum_\lambda P_\lambda = I$

(2) $P_\lambda N_\lambda = N_\lambda$, $\lambda \in \sigma(A)$

(3) $N_\lambda = P_\lambda (A - \lambda I)$, $\lambda \in \sigma(A)$

KOROLAR 2.55 *Za svaki* $f \in F[A]$ *vrijedi*

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda) N_\lambda^k$$

gdje je $m(\lambda)$ *indeks nilpotentnosti od* $N_\lambda = P_\lambda (A - \lambda I)$.

Dokaz Ovo je drugi zapis formule iz Teorema 2.31 u terminima od 2.53. ∎

PRIMJERI 2.56

(1) Budući da je R_A racionalna funkcija suma svih njezinih residuuma je jednaka 0 tj. $\sum_\lambda \operatorname*{Res}_\lambda R_A + \operatorname*{Res}_\infty R_A = 0$, što znači $\sum_\lambda P_\lambda - I = 0$.

(2) $R_A(z)$ je poluprost operator ako i samo ako je $N_\lambda = 0$, $\lambda \in \sigma(A)$. Dakle, A je poluprost ako i samo ako je $R_A(z)$ poluprost za neki z.

(3) Ako je f polinom onda je $f(A)$ regularan operator ako i samo ako su f i μ_A relativno prosti polinomi.

(4) Neka je $N(X)$ skup svih nilpotentnih operatora iz $L(X)$ i $U(X)$ skup svih unipotentnih operatora iz $L(X)$ i $n = \dim X$. Tada je $U(X) = I + N(X)$. Nadalje, $\exp : N(X) \to U(X)$ i $\log : U(X) \to N(X)$ su bijekcije i

$$\exp N = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k!} N^k, \quad \log U = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (U - I)^k$$

(5) $\operatorname*{Res}_\infty [z^k R_A(z)] = -A^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

(6) Po teoremu o residuumu, za $f \in F[A]$ vrijede formule

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname*{Res}_\lambda [f(z) R_A(z)] = -\operatorname*{Res}_\infty [f(z) R_A(z)] = \operatorname*{Res}_0 [\tfrac{1}{z^2} f(\tfrac{1}{z}) R_A(\tfrac{1}{z})]$$

DEFINICIJA 2.57 *Neka je* $\mathcal{A} \subset L(X)$ *neprazan skup. Tada se skup*

$$\mathcal{A}' = \{A \in L(X); AB = BA \text{ za svaki } B \in \mathcal{A}\}$$

zove ***komutant*** *skupa* $\mathcal{A}$, *a skup* $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')'$ *se zove* ***bikomutant*** *od* $\mathcal{A}$.

PROPOZICIJA 2.58 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\mathcal{A}'$ *i* $\mathcal{A}'$ *su podalgebre od* $L(X)$ *i one sadrže* I

(2) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \supset \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{A}'' \subset \mathcal{B}''$

(3) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$

(4) $L(X)' = \mathbb{K}I$, $L(X)'' = L(X)$

(5) $\mathcal{A}''$ *je najmanja podalgebra od* $L(X)$ *koja sadrži* $\mathcal{A} \cup \{I\}$

(6) $(T\mathcal{A}T^{-1})' = T\mathcal{A}'T^{-1}$, $\det T \neq 0$

(7) $(T\mathcal{A}T^{-1})'' = T\mathcal{A}''T^{-1}$

Dokaz Prva tri svojstva su evidentna. (4) Neposredni račun. (5) Slijedi iz (2). Operatori A i B komutiraju ako i samo ako TAT^{-1} i TBT^{-1} komutiraju za svaki $T \in L(X)$, $\det T \neq 0$. Odavde slijede (6) i (7). ■

KOROLAR 2.59 *Neka je* $A \in L(X)$, $\dim X = n$ *i* $\partial\mu_A = m$. *Tada vrijedi:*

(1) $\{A\}'' = \{f(A); f \in F[A]\} = \{f(A); f \in \mathbb{K}[x]\}$

(2) $\dim \{A\}'' = m$

(3) *Ako je* A *nilpotentan indeksa* n *onda je*

$$\{A\}' = \{A\}'' = \{\lambda I + A\}' = \{\lambda I + A\}'', \ \lambda \in \mathbb{K}$$

(4) $\{A\}' = \{A\}''$ *ako i samo ako* $\mu_A = p_A$.

Dokaz (1) i (2) slijede iz (5) iz prethodne propozicije. (3) Kako je $\{A\}'_e = \{A_e\}'$ i $\{A\}''_e = \{A_e\}''$, za svaku bazu e u X, tvrdnju je dovoljno dokazati za elementarnu Jordanovu klijetku, a to se provjeri neposredno. (4) Neka je e baza u X takva da je A_e Jordanova matrica

$$A_e = (\lambda_1 I_1 + J_1) \dotplus \cdots \dotplus (\lambda_s I_s + J_s)$$

Tada je $\{A_e\}' = \{\lambda_1 I_1 + J_1\}' \dotplus \cdots \dotplus \{\lambda_s I_s + J_s\}' = \{J_1\}' \dotplus \cdots \dotplus \{J_s\}'$. Sada Jordanove klijetke J_k napišemo kao direktnu sumu elementarnih i primjenimo (3). ■

KOROLAR 2.60 *Neka je* $A \in L(X)$ *poluprost,* $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ *i* $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_s P_s$, *kao u Korolaru 2.51. Tada vrijedi:*

(1) $\dim \{A\}' = (\operatorname{tr} P_1)^2 + \cdots + (\operatorname{tr} P_s)^2$

(2) $\dim \{A\}'' = s = \partial\mu_A$

Dokaz Neka je e baza u X takva da je $A_e = \lambda_1 I_1 \dotplus \cdots \dotplus \lambda_s I_s$, $P_{ke} = I_k$, $k = 1, \ldots, s$. Tada je $\{A\}'_e = \{A_e\}' = \{I_1\}' \dotplus \cdots \dotplus \{I_s\}'$ pa slijedi (1), dok je (2) evidentno. ■

PRIMJERI 2.61

(1) Kažemo da je operator $A \in L(X)$ 0-**poluprost** ako vrijedi $X = \ker A \dotplus \operatorname{im} A$. Svaki regularni operator A je 0-poluprost. Nadalje, $A = 0$ je također 0-poluprost. Ako je A singularan i $A \neq 0$ onda direktna suma $X = \ker A \dotplus \operatorname{im} A$ invarijantnih prostora od A povlači $A = 0 \dotplus B$, gdje je $B = A|\operatorname{im} A$ regularan operator. Dakle, vrijedi $\mu_A(x) = x\varphi(x)$, $\varphi(0) \neq 0$, gdje je $\varphi = \mu_B$. Nadalje, vrijedi i obrat ove tvrdnje tj. ovaj uvjet je ekvivalentan 0-poluprostoći od A. Ako je $A = 0 \dotplus B$ 0-poluprosti operator onda se operator $A^{(-1)} = 0 \dotplus B^{-1}$ zove **poluinverz** od A. 0-poluprosti operatori su poopćenje regularnih operatora i mnoga njihova svojstva su slična svojstvima regularnih.
(2) Svaki poluprosti operator je 0-poluprost. Obrat ne vrijedi.
(3) Ako je A nilpotentan i $A \neq 0$ onda A nije 0-poluprost.
(4) Neka je $A \in L(X)$ singularan operator, $A \neq 0$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) A je 0-poluprost. (b) $\ker A \cap \operatorname{im} A = \{0\}$
(c) $\operatorname{im} A = \operatorname{im} A^2$. (d) $\ker A = \ker A^2$
(e) $\operatorname*{Res}_0 zR_A(z) = 0$. (f) $\mu_A(x) = x\varphi(x)$, $\varphi(0) \neq 0$
(g) Postoji jedinstven operator $B \in L(X)$, koji komutira s A, takav da je $ABA = A$, $BAB = B$.

Ovaj B je ustvari poluinverz od A. Svojstvo (g) može služiti kao ekvivalentna definicija poluinverza.
(5) Neka je $X = \{f \in \mathbb{K}[x]; \partial f \leq n\}$, $a, b \in \mathbb{K}$ i $A \in L(X)$ operator definiran sa $Af(x) = f(ax+b)$. Tada je A poluprost za $a \neq 1$ i unipotentan za $a = 1$.
(6) Ako su $A, B \in L(X)$ i $AB = BA$ onda postoji $C \in L(X)$ takav da je

$$\{A, B\}'' \subset \{C\}''$$

(7) Neka je $A \in L(X)$ i $ad(A) \in L(L(X))$, $ad(A)B = [A, B]$. Tada vrijedi:

(a) Ako je A poluprost onda je $ad(A)$ poluprost.
(b) Ako je A nilpotentan onda je $ad(A)$ nilpotentan.
(c) Ako je $A = P + N$ Jordanov rastav onda je $ad(A) = ad(P) + ad(N)$ Jordanov rastav.
(d) $\sigma(ad(A)) = \sigma(A) - \sigma(A) = \{\lambda - \mu; \lambda, \mu \in \sigma(A)\}$.

(8) Neka je $A \in L(X)$ i A^* dualni operator. Tada vrijedi:

(a) A je poluprost ako i samo ako je A^* poluprost.
(b) A je nilpotentan ako i samo ako je A^* nilpotentan.
(c) $A = P + N$ je Jordanov rastav ako i samo ako je $A^* = P^* + N^*$ Jordanov rastav.

(9) Neka je $\delta : F[A] \to L(X)$, $\delta(f) = f(A)$. Tada je $\operatorname{im} \delta = \{A\}''$ izomorfna sa $F[A]/\ker \delta$ i $\ker \delta = \mu_A F[A]$ je ideal u $F[A]$.
(10) Neka su $A, B \in L(X)$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) $\{A\}' = \{B\}'$
(b) $\{A\}'' = \{B\}''$
(c) $A = f(B)$, $B = g(A)$, za neke $f, g \in \mathbb{K}[x]$

Poglavlje 3

Normirani prostori

Vektorski prostori koje razmatramo u ovom poglavlju su konačno dimezionalni, osim ako nije rečeno drukčije.

PROPOZICIJA 3.1 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Tada je $X^{**} = (X^*)^*$ kanonski izomorfam sa X pa identificiramo ova dva prostora.*

Dokaz Za $x \in X$ definiramo $\hat{x} \in (X^*)^*$ sa $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in X^*$. Lako se provjeri da je $x \mapsto \hat{x}$ izomorfizam između X i X^{**}.

Budući da ovaj izomorfizam ne zavisi od baze, zovemo ga **kanonski izomorfizam** i pišemo $x = \hat{x}$. ∎

PROPOZICIJA 3.2 *Neka je (X, ν) normirani vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Tada je formulom*

$$\nu^*(f) = \sup_{\nu(x)=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\nu(x)}, \ f \in X^*$$

definirana norma ν^* na X^* i zovemo je ***dualna norma****. Za nju vrijedi*

$$|f(x)| \leq \nu(x)\nu^*(f)$$

i $\nu^{**} = (\nu^*)^* = \nu$.

Dokaz Aksiomi norme za ν^* se provjere neposredno. Pišemo $(X, \nu)^* = (X^*, \nu^*)$ i ovaj normirani prostor zovemo **dualni prostor** od (X, ν). Budući da je $\nu^*(f) \geq \frac{|f(x)|}{\nu(x)}$, $x \in X$, $x \neq 0$, $f \in X^*$, dobijemo traženu nejednakost. Ona je poopćenje Cauchy-Schwarzove nejednakosti. Zamijetimo da je $\nu^*(f)$ jednak infimumu svih $\alpha \geq 0$ za koje vrijedi $|f(x)| \leq \alpha\nu(x)$, $x \in X$. Na sličan način je $\nu(x)$ jednak infimumu svih $\beta \geq 0$ za koje vrijedi $|f(x)| \leq \beta\nu^*(f)$, $f \in X^*$. Iz ovih svojstava slijedi $\nu^{**} = \nu$. Specijalno vrijedi nejednakost $|f(x) - f(y)| \leq \nu^*(f)\nu(x - y)$. ∎

NAPOMENA 3.3 Ako je (X, ν) beskonačno dimenzionalan normirani prostor i $f : X \to \mathbb{K}$ linearni funkcional, onda f ne mora biti neprekidan. Naime, može se dogoditi da je

$$\sup_{\nu(x)=1} |f(x)| = \infty$$

i tada je ovaj f prekidan. Sa X^* označavamo vektorski prostor svih neprekidnih funkcionala. Za $f \in X^*$ je ovaj supremum konačan pa se na X^* uvodi dualna norma ν^* kao u prethodnoj propoziciji. Može se pokazati da je tada (X^*, ν^*) Banachov prostor, bez obzira je li (X, ν) Banachov ili ne. Nadalje, $X \subset X^{**}$ i ova dva prostora ne moraju biti jednaka. Ako je ipak $X = X^{**}$ onda kažemo da je X **refleksivan Banachov prostor**. Naravno, svaki konačno dimenzionalni Banachov prostor je refleksivan po prethodne dvije propozicije.

PRIMJERI 3.4 Na vektorskom prostoru $\mathbb{K}[x]$ uvodimo normu

$$\|f\| = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$$

Tada je $(\mathbb{K}[x], \|\cdot\|)$ normirani beskonačno dimenzionalni prostor. Nadalje, ako je $a \in \mathbb{K}$, $|a| > 1$ i $\delta_a : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$, $\delta_a(f) = f(a)$, onda je δ_a prekidan funkcional na $\mathbb{K}[x]$ zbog

$$\sup_{\|f\|=1} |\delta_a(f)| = \infty$$

Naime, ako je $f_n(x) = x^n$, $n \ge 1$, onda je $\|f_n\| = 1$ i

$$\sup_{\|f\|=1} |\delta_a(f)| \ge |\delta_a(f_n)| = |a|^n \to \infty$$

PROPOZICIJA 3.5 *Neka je (X, ν) normirani prostor. Tada je formulom*

$$\nu^+(A) = \sup_{\nu(x)=1} \nu(Ax) = \sup_{x \ne 0} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}, \;\; A \in L(X)$$

dana norma na $L(X)$ i zovemo ja ***inducirana norma*** *na $L(X)$. Za svaki $x \in X$ i $A \in L(X)$ vrijedi*

$$\nu(Ax) \le \nu^+(A)\nu(x)$$

Dokaz Aksiomi norme za ν^+ se provjere neposredno. Gornja nejednakost slijedi iz $\nu^+(A) \ge \nu(Ax)/\nu(x)$, $x \ne 0$. Specijalno je

$$\nu(Ax - Ay) \le \nu^+(A)\nu(x - y), \;\; x, y \in X, \;\; A \in L(X)$$

pa je A uniformno neprekidna funkcija na X. ■

NAPOMENA 3.6 Ako je (X, ν) beskonačno dimenzionalan normirani prostor i $A : X \to X$ linearni operator onda A ne mora biti neprekidan. Naime, može se dogoditi da je

$$\sup_{\nu(x)=1} \nu(Ax) = \infty$$

pa je tada A prekidan. Ako je ovaj supremum konačan onda je A neprekidan na X. Skup svih neprekidnih operatora $A : X \to X$ označavamo sa $L(X)$ i na $L(X)$ uvodimo normu ν^+ kao u prethodnoj propoziciji pa je tada $(L(X), \nu^+)$ normirani prostor.

KOROLAR 3.7 *Inducirana norma ima sljedeća svojstva:*
(1) $\nu^+(AB) \leq \nu^+(A)\nu^+(B),\ A, B \in L(X)$
(2) $\nu^+(I) = 1$

Dokaz (1) $\nu^+(AB) = \sup \nu(ABx) \leq \sup \nu^+(A)\nu(Bx) = \nu^+(A)\nu^+(B)$, dok je (2) evidentan. ■

DEFINICIJA 3.8 *Neka je X algebra nad $\mathbb{K}$ i ν norma na X. Kažemo da je (X, ν) **normirana algebra** ako vrijedi:*
(1) $\nu(xy) \leq \nu(x)\nu(y),\ x, y \in X$
(2) $\nu(e) = 1$, *ako X ima jedinicu e*
*Kažemo da je (X, ν) **Banachova algebra** ako je X još i potpun prostor.*

PRIMJERI 3.9

(1) Neka je (X, ν) normiran prostor nad $\mathbb{K}$. Tada je $(L(X), \nu^+)$ Banachova algebra.
(2) Neka je ν norma na $\mathbb{K}^n$ i

$$\nu^+(A) = \max_{\nu(x)=1} \nu(Ax),\ \ A \in gl_n(\mathbb{K})$$

inducirana norma na $gl_n(\mathbb{K})$. Tada je $(gl_n(\mathbb{K}), \nu^+)$ Banachova algebra.
(3) $(\mathbb{K}[x], \|\cdot\|)$ iz 3.4 je normirana algebra, ali nije Banachova algebra.
(4) Neka je (X, ν) Banachov prostor proizvoljne dimenzije i $L(X)$ algebra svih neprekidnih operatora na X. Tada je $L(X)$ s induciranom normom ν^+ Banachova algebra.
(5) $(C(K), \|\cdot\|)$ iz 1.19, (8) je Banachova algebra.
(6) Ako su (X, ν_1) i (Y, ν_2) normirani prostori onda je $L(X, Y)$ također normirani prostor s normom

$$\nu(A) = \sup_{\nu_1(x)=1} \nu_2(Ax) = \sup_{x \neq 0} \frac{\nu_2(Ax)}{\nu_1(x)}$$

PROPOZICIJA 3.10 *Neka su (X_i, ν_i), $i = 1, \ldots, n$, normirani prostori. Tada je formulom*

$$\|\varphi\| = \sup_{\nu_i(x_i)=1} |\varphi(x_1, \ldots, x_n)| = \sup_{x_i \neq 0} \frac{|\varphi(x_1, \ldots, x_n)|}{\nu(x_1) \cdots \nu(x_n)}$$

dana norma na $L(X_1, \ldots, X_n, \mathbb{K})$ i vrijedi

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_n)| \leq \|\varphi\| \, \nu_1(x_1) \cdots \nu_n(x_n)$$

za svaki $x_i \in X_i$, $\varphi \in L(X_1, \ldots, X_n, \mathbb{K})$.

Dokaz Analogan je dokazu od 3.2 i 3.5. ■

KOROLAR 3.11 *Neka je $(X, (.|.))$ euklidski prostor. Tada je formulom*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

dana norma na $L(X)$ i zovemo je ***spektralna norma*** *na $L(X)$. Ovdje je $\|x\| = (x|x)^{1/2}$, $x \in X$, norma na X generirana skalarnim produktom.*

Dokaz Slijedi iz 3.5. ■

PROPOZICIJA 3.12 (Hölderova nejednakost)
Neka je $p \in [1, \infty]$ i $\|\cdot\|_p$ norma na $\mathbb{K}^n$ iz 1.19, (6). Tada vrijedi
(1) $\|x\|_p^* = \|x\|_q$, $x \in \mathbb{K}^n$
(2) $|(x|y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, $x, y \in \mathbb{K}^n$, *gdje je $q \in [1, \infty]$, definiran uvjetom $1/p + 1/q = 1$. Ovu nejednakost zovemo* ***Hölderova nejednakost***.

Dokaz (1) Neka je $p \in (1, \infty)$ i

$$\|x\|_p^* = \max_{\|y\|_p=1} |(x|y)|\,, \ x \in \mathbb{K}^n$$

Da bismo našli ovaj maksimum definiramo

$$F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \ F(y) = |(x|y)|^2 + \lambda \|y\|_p^p$$

pa je on jednak vezanom ekstremu od F uz uvjet $\|y\|_p = 1$. Ekstrem od F se dostiže u onim točkama za koje vrijedi $F'(y) = 0$ i $\|y\|_p = 1$, iz čega dobijemo $|(x|y)| = \|x\|_q$, $1/p + 1/q = 1$, za svaku ekstremnu točku y, pa je time tvrdnja dokazana. Ako je $p = 1$ ili $p = \infty$ onda u gornjem slučaju uzmemo limes kad $p \to 1$ ili $p \to \infty$. Iz (1) dobijemo

$$\|x\|_q = \|x\|_p^* = \max_{\|y\|_p=1} |(x|y)| = \max_{y \neq 0} \frac{|(x|y)|}{\|y\|_p} \geq \frac{|(x|y)|}{\|y\|_p}$$

iz čega slijedi (2). ■

DEFINICIJA 3.13 *Neka je (X, ν) normirani prostor i $X_1, X_2 \subset X$ neprazni podskupovi. Tada se broj*

$$d(X_1, X_2) = \inf\{\nu(x_1 - x_2); x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

*zove **udaljenost od** X_1 **do** X_2. Evidentno je $d(X_1, X_2) \geq 0$ i $d(X_1, X_2) = d(X_2, X_1)$.*

PROPOZICIJA 3.14 *Neka je (X, ν) normirani prostor, $f \in X^*$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$ i $\Pi = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$ **hiperravnina** u X.Tada vrijedi*

$$d(a, \Pi) = \frac{|f(a) - \alpha|}{\nu^*(f)},\ a \in X$$

Dokaz (1°) Neka je $a = 0$ i $\alpha = 1$. Tada je

$$d(0, \Pi) = \inf_{x\in\Pi} \nu(x) = \inf_{x\in\Pi} \frac{\nu^*(f)\nu(x)}{\nu^*(f)} \geq \inf_{x\in\Pi} \frac{|f(x)|}{\nu^*(f)} = \frac{1}{\nu^*(f)}$$

Uzmimo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, takav da je $f(x_0) = \nu^*(f)\nu(x_0)$. Ovakav x_0 postoji. Naime, supremum u Propoziciji 3.2 se dostiže u nekoj točki x_0 zbog kompaktnosti jedinične sfere $\{x \in X; \nu(x) = 1\}$. Sada je $\frac{x_0}{\nu^*(f)\nu(x_0)} \in \Pi$ pa imamo

$$d(0, \Pi) = \inf_{x\in\Pi} \nu(x) \leq \nu(\frac{x_0}{\nu^*(f)\nu(x_0)}) = \frac{1}{\nu^*(f)}$$

(2°) Dokažimo sada opći slučaj. Ako je $a \in \Pi$ onda je $d(a, \Pi) = 0$ pa je tvrdnja trivijalna. Zato uzmimo $a \notin \Pi$ tj. $f(a) \neq \alpha$ pa imamo $d(a, \Pi) = d(0, \Pi - a)$, gdje je $\Pi - a = \{x - a; x \in \Pi\} = \{y \in X; f(y) = \alpha - f(a)\}$. Sada po (1°) dobijemo

$$d(a, \Pi) = \frac{1}{\nu^*(\frac{f}{\alpha - f(a)})} = \frac{|f(a) - \alpha|}{\nu^*(f)}$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 3.15 *Neka je (X, ν) normirani prostor, $x \in X$, $x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$ i $\Pi = \{f \in X^*; f(x) = \alpha\}$ **hiperravnina** u X^*. Tada vrijedi*

$$d(g, \Pi) = \frac{|g(x) - \alpha|}{\nu(x)},\ g \in X^*$$

Dokaz Primijenimo prethodnu propoziciju na (X^*, ν^*). ■

PRIMJERI 3.16

(1) Neka je $a \in \mathbb{K}^n$, $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$ i $\Pi = \{x \in \mathbb{K}^n; (x|a) = \alpha\}$. Tada je udaljenost $d_p(b,\Pi)$ u normi $\|\cdot\|_p$ dana sa

$$d_p(b,\Pi) = \frac{|(b|a) - \alpha|}{\|a\|_q},\ 1/p + 1/q = 1,\ b \in \mathbb{K}^n$$

(2) Neka je $A_0 \in gl_n(\mathbb{K})$, $A_0 \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$ i $\Pi = \{A \in gl_n(\mathbb{K}); (A|A_0) = \alpha\}$. Tada je

$$d(B,\Pi) = \frac{|(B|A_0) - \alpha|}{(A_0|A_0)^{1/2}},\ B \in gl_n(\mathbb{K})$$

(3) Vrijedi formula $d(A, sl_n(\mathbb{K})) = \frac{1}{\sqrt{n}} |\mathrm{tr}\, A|$, $A \in gl_n(\mathbb{K})$

3.1 Kontrakcije i izometrije

DEFINICIJA 3.17 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Tada se broj $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ zove **spektralni radius** od A.*

PROPOZICIJA 3.18 *Spektralni radius ima sljedeća svojstva:*
(1) $\rho(\alpha A) = |\alpha|\, \rho(A)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in L(X)$
(2) $\rho(AB) = \rho(BA)$, $A, B \in L(X)$
(3) $\rho(TAT^{-1}) = \rho(A)$, $A, T \in L(X)$, $\det T \neq 0$
(4) $\rho(A^k) = \rho(A)^k$, $A \in L(X)$, $k \in \mathbb{N}$
(5) $\rho(I) = 1$
(6) $\rho(A) = 0$ *ako i samo ako je A nilpotentan*
(7) *Ako je* $\det A \neq 0$ *onda je $\rho(A) > 0$. Obrat ne vrijedi.*
(8) $\rho(A) = \rho(A_e)$, *za svaku bazu e u X*
(9) *Ako je $A = P + N$ Jordanov rastav onda je $\rho(A) = \rho(P)$.*
(10) *Ako je A poluprost onda je $\rho(A) = 0$ ako i samo ako $A = 0$.*

Dokaz Tvrdnja slijedi iz elementarnih svojstava spektra. ■

LEMA 3.19 *Neka je (X,ν) normirani prostor nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Tada niz $(\nu^+(A^k)^{1/k})$ konvergira u $\mathbb{R}$ i vrijedi*

$$\lim_{k\to\infty} \nu^+(A^k)^{1/k} = \inf_k \nu^+(A^k)^{1/k}$$

Dokaz Neka je $\rho = \inf \nu^+(A^k)^{1/k}$. Tada za dani $\varepsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\nu^+(A^m)^{1/m} \leq \rho + \varepsilon$. Dijeljenjem broja $k \in \mathbb{N}$ sa m dobijemo $k = p_k m + q_k$, $0 \leq q_k \leq m-1$, $k \geq m$, pa je $1 = p_k m/k + q_k/k$ što povlači $p_k m/k \to 1$, $k \to \infty$. Dakle, $\nu^+(A^k) = \nu^+(A^{p_k m + q_k}) \leq \nu^+(A^m)^{p_k} \nu^+(A)^{q_k} \leq$

$(\rho+\varepsilon)^{p_k m}\nu^+(A)^{q_k}$, pa dobijemo $\nu^+(A^k)^{1/k} \le (\rho+\varepsilon)^{p_k m/k}\nu^+(A)^{q_k/k} \to \rho+\varepsilon$, $k \to \infty$, što znači $\limsup \nu^+(A^k)^{1/k} \le \rho+\varepsilon$. Sada zbog proizvoljnosti od ε imamo $\limsup \nu^+(A^k)^{1/k} \le \rho = \inf \nu^+(A^k)^{1/k} \le \liminf \nu^+(A^k)^{1/k}$, iz čega slijedi tvrdnja. ■

TEOREM 3.20 (Formula spektralnog radiusa)
*Neka je (X,ν) normirani prostor nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Tada vrijedi **formula spektralnog radiusa** $\rho(A) = \lim \nu^+(A^k)^{1/k}$.*

Dokaz Možemo smatrati da je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, inače gledamo X_c i A_c budući da je $\rho(A) = \rho(A_c)$. Ako je $\sum A_k(z-a)^k$ red potencija s operatorskim koeficijentima onda se broj R definiran sa $1/R = \limsup \nu^+(A^k)^{1/k}$ zove **radius konvergencije** ovog reda potencija. Kako su sve norme na X ekvivalentne, ovaj R ne zavisi od norme, tj. dobijemo isti R ako ν^+ zamijenimo bilo kojom normom na $L(X)$. Razvoj rezolvente $R_A(z) = (zI-A)^{-1}$ oko ∞ je dan sa $R_A(z) = \sum \frac{1}{z^{k+1}}A^k$ i ovaj red konvergira izvan diska $\{z \in \mathbb{C}; |z| \le \rho(A)\}$ pa je njegov radius konvergencije jednak $\rho(A)$. S druge strane, radius konvergencije ovog reda je dan sa

$$R = \limsup \nu^+(A^k)^{1/k} = \lim \nu^+(A^k)^{1/k}$$

pa dobijemo formulu spektralnog radiusa. ■

KOROLAR 3.21 *Spektralni radius zadovoljava nejednakost*

$$0 \le \rho(A) \le \nu^+(A),\ A \in L(X)$$

Dokaz $0 \le \rho(A) = \lim \nu^+(A^k)^{1/k} \le \lim(\nu^+(A)^k)^{1/k} = \nu^+(A)$. ■

DEFINICIJA 3.22 *Neka je (X,ν) normiran prostor i $A \in L(X)$.*
(1) *Kažemo da je A **kontrakcija** ako vrijedi $\nu^+(A) \le 1$.*
(2) *Kažemo da je A **stroga kontrakcija** ako vrijedi $\nu^+(A) < 1$.*
(3) *Kažemo da je A **izometrija** ako vrijedi $\nu(Ax) = \nu(x)$, $x \in X$.*

PROPOZICIJA 3.23 *Neka je $A \in L(X)$. Tada na X postoji norma ν takva da je A kontrakcija ako i samo ako je skup $\{A^k; k \in \mathbb{N}_0\}$ ograničen.*

Dokaz Ograničenost nekog skupa iz X ili $L(X)$ ne zavisi od norme, budući da su sve norme ekvivalentne.
(1°) Neka je ν norma na X takva da je A kontrakcija. Tada je

$$\nu^+(A^k) \le \nu^+(A)^k \le 1,\ k \in \mathbb{N}_0$$

pa je skup $\{A^k; k \in \mathbb{N}_0\}$ ograničen.
(2°) Neka je $\{A^k; k \in \mathbb{N}_0\}$ ograničen. Definiramo normu ν na X sa

$$\nu(x) = \sup_{k\geq 0} \nu_1(A^k x)$$

gdje je ν_1 bilo koja norma na X. Tada je

$$\nu(Ax) = \sup_{k\geq 0} \nu_1(A^{k+1}x) = \sup_{k\geq 1} \nu_1(A^k x) \leq \sup_{k\geq 0} \nu_1(A^k x) = \nu(x)$$

pa je $\nu^+(A) \leq 1$, tj. A je kontrakcija. ■

PROPOZICIJA 3.24 *Neka je $A \in L(X)$. Tada na X postoji norma ν takva da je A stroga kontrakcija ako i samo ako $A^k \to 0$, $k \to \infty$.*

Dokaz (1°) Neka je ν norma na X takva da je A stroga kontrakcija. Tada je $\nu^+(A) < 1$ pa je $\nu^+(A^k) \leq \nu^+(A)^k \to 0$, $k \to \infty$, tj. $A^k \to 0$, $k \to \infty$.
(2°) Neka $A^k \to 0$, $k \to \infty$. Definiramo normu ν na X sa

$$\nu(x) = \sum_{k\geq 0} \nu_1(A^k x)$$

gdje je ν_1 bilo koja norma na X. Tada je

$$\nu(Ax) = \sum_{k\geq 1} \nu_1(A^k x) < \sum_{k\geq 0} \nu_1(A^k x) = \nu(x), \ x \neq 0$$

pa je $\nu^+(A) < 1$. ■

KOROLAR 3.25 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
(1) *A je stroga kontrakcija u nekoj normi ν na X*
(2) $A^k \to 0$
(3) $\rho(A) < 1$

Dokaz (1)⇔(2): po prethodnoj propoziciji. (1)⇒(3): slijedi iz $\nu^+(A) < 1$. (3)⇒(2): ako je $\rho(A) < 1$ i $\lambda \in \sigma(A)$ onda iz $Ax = \lambda x$ slijedi $A^k x = \lambda^k x \to 0$, za svaki svojstveni vektor x od A, iz čega slijedi $A^k \to 0$, budući da je A poluprost. ■

PROPOZICIJA 3.26 *Neka je $A \in L(X)$. Tada na X postoji norma ν takva da je A izometrija ako i samo ako je A regularan operator i skup $\{A^k; k \in \mathbb{Z}\}$ ograničen.*

Dokaz (1°) Ako je A izometrija u normi ν onda je $\nu(Ax) = \nu(x)$, $x \in X$, pa je A regularan i $\nu^+(A) = 1$. Nadalje, $\nu(A^k x) = \nu(x)$, $x \in X$, $k \in \mathbb{Z}$, pa je $\nu^+(A^k) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
(2°) Neka je A regularan i skup $\{A^k; k \in \mathbb{Z}\}$ ograničen. Definiramo normu ν na X formulom

$$\nu(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \nu_1(A^k x)$$

gdje je ν_1 bilo koja norma na X. Tada je

$$\nu(Ax) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \nu_1(A^{k+1}x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \nu_1(A^k x) = \nu(x)$$

pa je A izometrija. ■

KOROLAR 3.27 (1) *Ako je A kontrakcija u nekoj normi ν na X, onda je $\rho(A) \le 1$. Obrat ne vrijedi.*

(2) *Ako je A izometrija u nekoj normi ν na X onda je $\rho(A) = 1$. Obrat ne vrijedi.*

(3) *Ako je A izometrija u nekoj normi ν na X onda je A poluprost operator i spektar od A je sadržan u $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.*

(4) *Ako je A stroga kontrakcija u nekoj normi ν na X onda je A poluprost.*

Dokaz Kontraprimjer za obrat u (1) i (2) je $A = I + B$, gdje je B nilpotenten operator indeksa 2. Tada je $A^k = I + kB$, $k \in \mathbb{Z}$, $\rho(A) = 1$ i $A^k \to \infty$, $k \in \mathbb{Z}$.
(3) i (4) Slijede iz svojstava Jordanove matrice od A. Nadalje, iz ograničenosti skupa $\{A^k; k \in \mathbb{Z}\}$ slijedi ograničenost skupa $\{|\lambda|^k; \lambda \in \sigma(A), k \in \mathbb{Z}\}$ pa je $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. ■

KOROLAR 3.28 (1) *Sve izometrije od (X, ν) čine grupu.*

(2) *Sve kontrakcije od (X, ν) čine polugrupu.*

DEFINICIJA 3.29 *Neka je ν norma na $L(X)$.*

(1) *Kažemo da ν **čuva množenje** ako vrijedi $\nu(AB) \le \nu(A)\nu(B)$.*

(2) *Kažemo da ν **čuva jedinicu** ako vrijedi $\nu(I) = 1$.*

(3) *Kažemo da je ν **operatorska norma** na $L(X)$ ako ona čuva množenje i jedinicu, tj. ako je $(L(X), \nu)$ Banachova algebra.*

PROPOZICIJA 3.30 (1) *Ako ν čuva množenje onda je $\nu(I) \ge 1$.*

(2) *Ako ν čuva množenje onda je $\rho(A) \le \nu(A)$, $A \in L(X)$.*

(3) *Inducirana norma je operatorska.*

(4) *Spektralna norma je operatorska.*

Dokaz (1) Stavimo $A = B = I$ u relaciji $\nu(AB) \leq \nu(A)\nu(B)$.
(2) $\rho(A) = \lim \nu(A^k)^{1/k} \leq \lim(\nu(A)^k)^{1/k} = \nu(A)$. (3) i (4) slijede iz 3.7.
Može se pokazati da postoje operatorske norme na $L(X)$ koje nisu inducirane nikakvom normom na X tj. obrat u (3) ne vrijedi. ■

PRIMJERI 3.31

(1) Standardna euklidska norma na $gl_n(\mathbb{K})$ čuva množenje, ali ne čuva jedinicu.
(2) Neka je (X, ν) normiran prostor i $A \in L(X)$ regularan operator. Tada je A izometrija ako i samo ako $\nu^+(A) = \nu^+(A^{-1}) = 1$.
(3) Ako $A, B \in L(X)$ komutiraju onda je
(a) $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$
(b) $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$
Ako A i B ne komutiraju, onda tvrdnje ne vrijede.
(4) Neka su $p, q \in [1, \infty]$, $p \leq q$. Tada za $\| \cdot \|_p$ na $\mathbb{K}^n$ vrijedi

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q}\|x\|_q, \ x \in \mathbb{K}^n$$

3.2 Unitarni prostori

DEFINICIJA 3.32 *Neka je $(X, (.|.))$ unitaran nad $\mathbb{K}$ i $x_1, \ldots, x_k \in X$. Tada se matrica $G(x_1, \ldots, x_k) = [(x_i|x_j)] \in gl_k(\mathbb{K})$ zove* ***Gramova matrica*** *od $x_1, \ldots, x_k$, a njezina determinanta $\Gamma(x_1, \ldots, x_k) = \det G(x_1, \ldots, x_k)$ se zove* ***Gramova determinanta*** *od $x_1, \ldots, x_k$.*

TEOREM 3.33 (Gram-Schmidt)
Neka je X unitaran i $x_1, \ldots, x_n \in X$. Tada su $x_1, \ldots, x_n$ linearno nezavisni ako i samo ako je $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Dokaz Neka je $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Ako ovo pomnožimo skalarno zdesna sa x_k dobijemo $\alpha_1(x_1|x_k) + \cdots + \alpha_n(x_n|x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, što se može zapisati u obliku $G(x_1, \ldots, x_k)^\tau \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{K}^n$, pa zaključujemo da su $x_1, \ldots, x_n$ nezavisni ako i samo ako $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Sada primjenjujemo tzv. **Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije** iz kojeg specijalno slijedi naša tvrdnja. Neka su $x_1, \ldots, x_n \in X$ linearno nezavisni. Definiramo $y_1, \ldots, y_n \in X$ induktivno sa: $y_1 = x_1$,

$$y_k = \begin{vmatrix} G(x_1, \ldots, x_{k-1}) & x_1 \\ & \vdots \\ (x_k|x_1) \cdots (x_k|x_{k-1}) & x_k \end{vmatrix}, \ k \geq 2$$

pri čemu se ova determinanta razvija po zadnjem stupcu. Dakle, vrijedi

$$y_k = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}) x_k$$

za neke skalare $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Budući da je $\Gamma(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, zaključujemo da je $\mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_k = \mathbb{K}y_1 + \cdots + \mathbb{K}y_k$, $k = 1, \ldots, n$. S druge strane je

$$(y_k|x_p) = \begin{vmatrix} G(x_1, \ldots, x_{k-1}) & (x_1|x_p) \\ \vdots & \vdots \\ (x_k|x_1) \cdots (x_k|x_{k-1}) & (x_k|x_p) \end{vmatrix}, \ p = 1, \ldots, n$$

pa dobijemo $(y_k|x_p) = 0$, $p < k$, i $(y_k|x_k) = \Gamma(x_1, \ldots, x_k)$ što znači da su vektori $y_1, \ldots, y_n$ ortogonalni. Nadalje

$$(y_k|y_k) = \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1})(x_k|y_k) = \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1})\overline{\Gamma(x_1, \ldots, x_k)}.$$

Za $k = 1$ je $\Gamma(x_1) = (x_1|x_1) > 0$. Za $k = 2$ je $(y_2|y_2) = \Gamma(x_1)\overline{\Gamma(x_1, x_2)} > 0$ pa je $\Gamma(x_1, x_2) > 0$. Sada iteracijom slijedi $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0$. ■

KOROLAR 3.34 *Neka je X unitaran. Tada vrijedi:*
(1) *Ako su $x_1, \ldots, x_n \in X$ linearno nezavisni onda postoje ortonormirani vektori $e_1, \ldots, e_n \in X$ takvi da je*

$$\mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_k = \mathbb{K}e_1 + \cdots + \mathbb{K}e_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

(2) *Prostor X ima ortonormiranu bazu.*
(3) $|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$ *(**Cauchy-Schwarzova nejednakost**).*

Dokaz (1) Neka su $y_1, \ldots, y_n$ vektori dobiveni iz $x_1, \ldots, x_n$ Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije kao u prethodnom teoremu i $e_k = y_k / \|y_k\|$, $k = 1, \ldots, n$. Tada su $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirani i imaju traženo svojstvo. Tvrdnja (2) slijedi iz (1), dok je (3) drugi zapis nejednakosti $\Gamma(x, y) \geq 0$. Ova nejednakost je specijalni slučaj Hölderove nejednakosti. ■

TEOREM 3.35 (O reprezentaciji funkcionala)
Neka je $(X, (.|.))$ euklidski nad $\mathbb{K}$ i $f \in X^*$. Tada postoji jedinstven $a \in X$ takav da je $f(x) = (x|a)$, $x \in X$. Nadalje, $\|f\| = \|a\|$ i preslikavanje $J : X^* \longrightarrow X$, $Jf = a$, je linearni operator za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i antilinearni operator za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dokaz Dokažimo prvo jedinstvenost od a. Ako je $f(x) = (x|a)$ i $f(x) = (x|b)$, $x \in X$, onda je $(x|a-b) = 0$ za svaki $x \in X$ pa za $x = a - b$ dobijemo $\|a - b\| = 0$ tj. $a = b$.

Dokažimo sada egzistenciju od a. Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od X. Tada za $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in X$ imamo $f(x) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$ pa definiramo $a \in X$ sa $a = \overline{f(e_1)}e_1 + \cdots + \overline{f(e_n)}e_n$. Sada je $(x|a) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = f(x)$. Nadalje,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x|a)| = |(\frac{a}{\|a\|}|a)| = \|a\|$$

Budući da je

$$Jf = a = \overline{f(e_1)}e_1 + \cdots + \overline{f(e_n)}e_n$$

posljednja tvrdnja je evidentna. ■

Koristeći ovaj teorem identificiramo X^* i X tj. smatramo $X^* = X$. Na taj način je $J : X \longrightarrow X$ linearan za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i konjugiranje za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

DEFINICIJA 3.36 *Neka je X euklidski nad $\mathbb{C}$ i $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$ konjugiranje na X. Kažemo da je J* ***normalno konjugiranje*** *ako je e ortonormirana baza.*

PROPOZICIJA 3.37 *Neka je X euklidski nad $\mathbb{C}$ i J normalno konjugiranje na X. Tada vrijedi:*

(1) $(x, y) \mapsto (x|Jy)$ *je bilinearni funkcional na X.*
(2) $(x|Jy) = (y|Jx)$, $x, y \in X$
(3) $(Jx|Jy) = (y|x)$, $x, y \in X$

Dokaz (1) je evidentno. (2) Neka je e ortonormirana baza i $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$. Ako je $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ onda je $Jx = \overline{x}_1e_1 + \cdots + \overline{x}_ne_n$, pa je

$$(x|Jy) = \sum x_iy_i = \sum y_ix_i = (y|Jx)$$

(3) Ako u (2) stavimo Jx umjesto x dobijemo $(Jx|Jy) = (y|J^2x) = (y|x)$. ■

NAPOMENA 3.38 Neka je X euklidski nad $\mathbb{C}$ i $J = \varphi_e^{-1}J_0\varphi_e$ konjugiranje na X. Tada tvrdnja (1) iz prethodne propozicije vrijedi i za ovaj J, ali (2) i (3) ne vrijede. Može se pokazati da sva konjugiranja na X čine glatku plohu u $L^a(X)$ dimenzije n^2, $n = \dim X$, dok sva normalna konjugiranja čine glatku plohu dimenzije $\binom{n+1}{2}$. Za $n = 1$ je svako konjugiranje normalno. Svako konjugiranje $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ima oblik $Jz = \alpha\overline{z}$, $|\alpha| = 1$. Vidi Pog. 5.

PROPOZICIJA 3.39 *Neka je X euklidski nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Tada postoji jedinstven $A^* \in L(X)$ takav da je $(Ax|y) = (x|A^*y)$, $x, y \in X$. Nadalje, preslikavanje $A \mapsto A^*$ ima svojstva:*
(1) $(A^*)^* = A$
(2) $(A + B)^* = A^* + B^*$
(3) $(AB)^* = B^*A^*$
(4) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$

Dokaz Preslikavanje $x \mapsto (Ax|y)$ je linearni funkcional na X za svaki $y \in X$ pa po teoremu o reprezentaciji funkcionala postoji jedinstven $a \in X$ da je $(Ax|y) = (x|a)$. Definiramo preslikavanje $A^* : X \to X$, $A^*(y) = a$. Lako se provjeri da je $A^* \in L(X)$. Jedinstvenost od A^* slijedi iz evidentne ekvivalencije: $(Ax|y) = 0$, $x, y \in X$ ako i samo ako $A = 0$. Svojstva (1),..,(4) se provjere neposredno. ■

PROPOZICIJA 3.40 *Neka je X euklidski nad $\mathbb{K}$. Tada je $L(X)$ također euklidski nad $\mathbb{K}$ sa skalarnim produktom $(A|B) = \operatorname{tr} AB^*$, $A, B \in L(X)$. Norma $\|A\|_2 = (A|A)^{1/2}$ se zove **standardna euklidska norma** na $L(X)$.*

Dokaz Aksiomi skalarnog produkta se provjere neposredno. ■

DEFINICIJA 3.41 *Neka je X euklidski nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Operator A^* iz Propozicije 3.39 se zove **adjungirani operator** od A, a preslikavanje $A \mapsto A^*$ se zove **adjungiranje** ili **involucija** na $L(X)$.*

*Za operatore iz $L(X)$ **uvodmo istu terminologiju kao i za matrice** u Definiciji 1.21, posebno za $\mathbb{R}$ i za $\mathbb{C}$, **iako uvijek pišemo** A^* bez obzira je li $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.*

Zamijetimo da je $A \mapsto A^*$ antiautomorfizam reda 2 od $L(X)$ za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i antilinearni antiautomorfizam reda 2 za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Istom oznakom A^* smo označili dva različita objekta: adjungirani operator i dualni operator, ali je iz konteksta uvijek jasno o čemu se radi.

Zamijetimo također da je u slučaju $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ involucija normalno konjugiranje na $L(X)$, pri čemu $*$-realni podprostor od $L(X)$ čine svi hermitski operatori, što znači da se svaki $A \in L(X)$ može napisati, na jedinstven način, u obliku $A = A_1 + iA_2$, gdje su A_1 i A_2 hermitski i

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(A + A^*),\ A_2 = \tfrac{1}{2i}(A - A^*)$$

Operator A je normalan ako i samo ako je $A_1A_2 = A_2A_1$.

Ako je e ortonormirana baza u X onda vrijedi formula $(A^*)_e = (A_e)^*$ i nju možemo koristiti za definiciju od A^*. Zanimljivo je da ova formula vrijedi za bazu $e = (e_1, \ldots, e_n)$ ako i samo ako postoji $\alpha > 0$ takav da je $\alpha e = (\alpha e_1, \ldots, \alpha e_n)$ ortonormirana baza u X.

PROPOZICIJA 3.42 *Neka je $(X,(.|.))$ euklidski nad $\mathbb{K}$ i $(.|.)_{\#}$ novi skalarni produkt na X. Tada postoji jedinstven regularan hermitski operator $G \in L(X)$ takav da je $(x|y)_{\#} = (Gx|y)$, $x, y \in X$.*

Dokaz Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza u $(.|.)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ortonormirana baza u $(.|.)_{\#}$ i $T = \varphi_e^{-1}\varphi_u$ operator prijelaza iz baze u u bazu e. Ako su $x, y \in X$, $x = \sum x_i u_i$, $y = \sum y_i u_i$ onda je

$$\begin{aligned}(Tx|Ty) &= (\sum x_i Tu_i | \sum y_j Tu_j) = (\sum x_i e_i | \sum y_j e_j) \\ &= \sum\sum x_i \overline{y_j}(e_i|e_j) = \sum x_i \overline{y_i} = (x|y)_{\#}\end{aligned}$$

Dakle, $G = T^*T$ je regularan hermitski operator i vrijedi

$$(x|y)_{\#} = (Tx|Ty) = (T^*Tx|y) = (Gx|y)$$

dok je jedinstvenost od G evidentna. ■

KOROLAR 3.43 *U uvjetima prethodne propozicije označimo sa $A \mapsto A^{\#}$ adjungiranje u $(.|.)_{\#}$. Tada vrijedi:*
(1) $A^{\#} = G^{-1}A^*G$, $A \in L(X)$
(2) $G^{\#} = G^* = G$

Dokaz (1) Po prethodnoj propoziciji je $(Ax|y)_{\#} = (GAx|y)$, za sve vektore $x, y \in X$ i $A \in L(X)$, pa je

$$(GAx|y) = (x|A^{\#}y)_{\#} = (Gx|A^{\#}y) = ((A^{\#})^*Gx|y)$$

što znači $GA = (A^{\#})^*G$ tj. $A^*G = GA^{\#}$ odnosno $A^{\#} = G^{-1}A^*G$.
(2) Stavimo $A = G$ u (1). ■

PROPOZICIJA 3.44 *Neka je $A \in L(X)$ poluprost operator. Tada na X postoji skalarni produkt $(.|.)_{\#}$ takav da je A normalan u ovom skalarnom produktu.*

Dokaz Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza u X takva da je A_e dijagonalna matrica. Ako su $x, y \in X$, $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$, onda definiramo skalarni produkt na X sa $(x|y)_{\#} = (\varphi_e(x)|\varphi_e(y)) = \sum x_i \bar{y}_i$. Tada je e ortonormirana baza u ovam skalarnom produktu i A_e je normalna matrica. ■

PROPOZICIJA 3.45 *Neka je X unitaran i $A \in L(X)$ poluprost. Tada je A sličan normalnom operatoru.*

Dokaz Po prethodnoj propoziciji na X postoji skalarni produkt $(.|.)_{\#}$ u kojem je A normalan, tj. $AA^{\#} = A^{\#}A$, a po Propoziciji 3.42 vrijedi $(x|y)_{\#} = (Gx|y)$, $x, y \in X$, gdje je $G = T^*T$ i T operator prijelaza. Sada za operatore $H = G^{1/2}$ i $B = HAH^{-1}$ vrijedi

$$B^*B = HA^{\#}AH^{-1} = HAA^{\#}H^{-1} = BB^*$$

što znači da je A sličan normalnom operatoru B. ■

DEFINICIJA 3.46 *Neka su (X, ν_1) i (Y, ν_2) normirani prostori nad $\mathbb{K}$.*

(1) *Kažemo da je $A \in L(X, Y)$ **izometrija** ako vrijedi $\nu_2(Ax) = \nu_1(x)$, za svaki $x \in X$.*

(2) *Kažemo da su (X, ν_1) i (Y, ν_2) **izomorfni** ako postoji $A \in L(X, Y)$ koji je izometrija i bijekcija.*

DEFINICIJA 3.47 *Neka su $(X, (.|.)_1)$ i $(Y, (.|.)_2)$ unutarni nad $\mathbb{K}$.*

(1) *Kažemo da je $A \in L(X, Y)$ **unitaran** ako vrijedi $(Ax|Ay)_2 = (x|y)_1$, za svaki $x, y \in X$.*

(2) *Kažemo da su $(X, (.|.)_1)$ i $(Y, (.|.)_2)$ **izomorfni** ako postoji $A \in L(X, Y)$ koji je unitaran i bijekcija.*

PROPOZICIJA 3.48 *Neka su $(X, (.|.)_1)$ i $(Y, (.|.)_2)$ unitarni prostori nad $\mathbb{K}$. Tada su oni izomorfni ako i samo ako* $\dim X = \dim Y$. *Analogna tvrdnja za normirane prostore na vrijedi.*

Dokaz Neka je $\dim X = \dim Y$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza u X, i $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ortonormirana baza u Y. Ako je $x \in X$ i $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ onda definiramo $A : X \to Y$ sa $Ax = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. Tada je A linearan i regularan i vrijedi $(Ax|Ay)_2 = \sum x_i\bar{y}_i = (x|y)_1$, $x, y \in X$. Obrat je trivijalan. Za normirane prostore tvrdnja ne vrijedi što se vidi iz primjera: $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ i $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)$ nisu izomorfni za $p \neq q$, iako im je dimenzija jednaka. ■

PRIMJERI 3.49

(1) Neka je X euklidski nad $\mathbb{K}$, $\dim X = n$, e baza u X i $G = G(e_1, \ldots, e_n) \in gl_n(\mathbb{K})$ Gramova matrica. Tada vrijedi:

(a) $(x|y) = (G^\tau \varphi_e(x)|\varphi_e(y))$, $x, y \in X$

(b) $\varphi_e(Ax) = A_e\varphi_e(x)$, $x \in X$, $A \in L(X)$

(c) $(A^*)_e = (G^\tau)^{-1}(A_e)^*G^\tau$, $A \in L(X)$

(d) Baza e je ortonormirana ako i samo ako je $G = I$ i u tom slučaju je $(A^*)_e = (A_e)^*$, $A \in L(X)$.

(e) Formula $(A^*)_e = (A_e)^*$ vrijedi za svaki operator $A \in L(X)$ ako i samo ako je $G = \beta I$, za neki $\beta > 0$.

(2) Neka je $\sigma > 0$ i
$$d\mu(x) = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2})dx$$
Definiramo skalarni produkt na $\mathbb{R}[x]$ formulom
$$(f|g) = \int f(x)g(x)d\mu(x)$$
Tada je $(\mathbb{R}[x], (.|.))$ unitaran prostor i nije Hilbertov budući da nije potpun.
(3) Neka je $u_n \in \mathbb{R}[x]$, $u_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Tada u unitarnom prostoru $(\mathbb{R}[x], (.|.))$ iz (2) vrijedi:
(a) $u_0, u_1, \ldots, u_n$ su nezavisni za svaki $n \in \mathbb{N}$.
(b) $(u_{2k}|u_{2n+1}) = 0$, $k, n \in \mathbb{N}_0$
(c) $(u_n|u_n) = (2n-1)!! \cdot \sigma^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$
(4) Neka je
$$H_n(x) = \int (x+iy)^n d\mu(y)$$
Tada se H_n zove n-ti **Hermiteov polinom** s parametrom $\sigma > 0$ i za njega vrijedi
$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k}(-1)^k(2k-1)!! \cdot \sigma^{2k}x^{n-2k}$$
Nadalje, također vrijedi:
(a) $(H_n|H_k) = 0$, $k \neq n$
(b) $(H_n|H_n) = n!\sigma^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$
(c) Vrijedi formula
$$\exp(tx - \tfrac{1}{2}t^2\sigma^2) = \sum_{n\geq 0} \tfrac{t^n}{n!}H_n(x),\ t, x \in \mathbb{R}$$
i ovu funkciju zovemo **generatrisa Hermiteovih polinoma**.
(5) $\mathbb{C}[z]$ je unitaran prostor sa skalarnim produktom
$$(f|g) = \iint_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} \exp(-|z|^2)dxdy,\ z = x+iy$$
Ako je $e_n \in \mathbb{C}[z]$, $e_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ onda vrijedi:
(a) $(e_n|e_m) = 0$, $n \neq m$
(b) $(e_n|e_n) = \pi n!$, $n \in \mathbb{N}_0$
(6) Neka je X unitaran i $A \in L(X)$. Tada je grupa $\{\exp tA; t \in \mathbb{R}\}$ ograničena u $L(X)$ ako i samo ako je A sličan antihermitskom operatoru. Ovu grupu zovemo **jednoparametarska grupa** u $L(X)$.

TEOREM 3.50 *Neka je X unitaran i $A \in L(X)$. Tada za spektralnu normu vrijede sljedeće tvrdnje:*
(1) $\|A\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax|y)|$
(2) *Ako je $A^* = A$ onda je* $\|A\| = \max_{\|x\|=1} |(Ax|x)|$
(3) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ *(C^*-**svojstvo spektralne norme**).*

Dokaz (1) Imamo

$$\max_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax|y)| \leq \max_{\|x\|=\|y\|=1} \|Ax\| \, \|y\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$$

i slično

$$\max_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax|y)| \geq \max_{\|x\|=1} |(Ax|\frac{Ax}{\|Ax\|})| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$$

(2) Neka je

$$w(A) = \max_{\|x\|=1} |(Ax|x)| = \max_{x \neq 0} \frac{|(Ax|x)|}{\|x\|^2}$$

Tada je $|(Ax|x)| \leq w(A) \|x\|^2$, pa slično kao u (1) imamo $w(A) \leq \|A\|$. Dokažimo obratnu nejednakost. Vrijedi identiteta

$$4 \operatorname{Re}(Ax|y) = (A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y)$$

iz koje slijedi

$$4 \operatorname{Re} |(Ax|y)| \leq w(A) \|x+y\|^2 + w(A) \|x-y\|^2 = 2w(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

pa za $\|x\| = \|y\| = 1$ dobijemo $|\operatorname{Re}(Ax|y)| \leq w(A)$. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $(Ax|y) = e^{i\alpha} |(Ax|y)|$. Tada je

$$|(Ax|y)| = (e^{-i\alpha} Ax|y) = \left|\operatorname{Re}(e^{-i\alpha} Ax|y)\right| \leq w(A)$$

pa je $\|A\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax|y)| \leq w(A)$.

(3) Budući da je A^*A hermitski po (2) imamo

$$\|A\|^2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \max_{\|x\|=1} |(Ax|Ax)| = \max_{\|x\|=1} |(A^*Ax|x)| = \|A^*A\|$$

iz čega slijedi C^*-svojstvo spektralne norme. ∎

KOROLAR 3.51 *Neka je X unitaran i $A \in L(X)$. Tada vrijedi:*
(1)*Ako je A unitaran onda je $\|A\| = 1$.*
(2)*Ako je A projektor i $A \neq 0$ onda je $\|A\| = 1$.*
(3)*Ako je A parcijalna izometrija i $A \neq 0$ onda je $\|A\| = 1$.*

Dokaz (1) $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|I\| = 1$.
(2) $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|A^2\| = \|A\|$ pa je $\|A\| = 1$.
(3) Ako je A parcijalna izometrija i $P = A^*A$, $Q = AA^*$ onda su P i Q projektori. Naime, P i Q su hermitski i $P = A^*A = A^*AA^*A = P^2$ i slično $Q = Q^2$. Sada po (2) imamo $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|P\| = 1$.

Projektor P se zove **inicijalni projektor** od A, a Q **finalni projektor** od A i vrijedi $A = AP = QA$. Nadalje, P je projektor na $\operatorname{im} A^*$, a Q je projektor na $\operatorname{im} A$. ∎

KOROLAR 3.52 *Neka je X unitaran i $A \in L(X)$ normalan. Tada vrijedi:*
(1) $\rho(A) = \|A\|$
(2) $\|A^k\| = \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}$

Dokaz (1) Operator A je normalan ako i samo ako $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $x \in X$, pa imamo $\|A^2x\| = \|A^*Ax\|$, $x \in X$. Ako sada uzmemo maximum po sferi $\|x\| = 1$ dobijemo $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$, pa iteracijom slijedi $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, iz čega dobijemo $\rho(A) = \lim \|A^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|A\|$.

(2) Ako je A normalan onda je A^k normalan za svaki k pa je $\|A^k\| = \rho(A^k) = \rho(A)^k = \|A\|^k$. ■

KOROLAR 3.53 *Neka je X unitaran i $A \in L(X)$ normalan. Tada vrijedi:*
(1) *Ako je $\sigma(A) = \{\lambda\}$ onda je $A = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*
(2) *Ako je $\sigma(A) \subset \{0, 1\}$ onda je A je projektor.*

Dokaz (1) $\sigma(A) = \{\lambda\} \Rightarrow \sigma(A - \lambda I) = \{0\} \Rightarrow \rho(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \|A - \lambda I\| = 0 \Rightarrow A = \lambda I$. (2) Budući da je $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ dobijemo $\sigma(A^*) \subset \{0, 1\}$ tj. $A^* = A$ i $\sigma(A^2 - A) = 0$ pa imamo $\|A^2 - A\| = 0$ tj. $A^2 = A$. ■

DEFINICIJA 3.54 *Neka je X unitaran i ν norma na $L(X)$. Kažemo da je ν **unitarno** (odnosno **ortogonalno**) **invarijantna** ako za svaki unitarni (odnosno ortogonalni) $U \in L(X)$ vrijedi*

$$\nu(UA) = \nu(AU) = \nu(A), \; A \in L(X)$$

KOROLAR 3.55 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{K}$. Tada su spektralna i euklidska norma na $L(X)$ unitarno invarijantne.*

Dokaz Slijedi neposredno iz definicije ovih norma. ■

TEOREM 3.56 *Neka je X unitaran i $x_1, \ldots, x_m \in X$. Tada vrijedi*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_m) \leq \Gamma(x_1, \ldots, x_k)\Gamma(x_{k+1}, \ldots, x_m), \; 1 \leq k \leq m - 1$$

Dokaz Neka je $Y \subset X$ podprostor od X, $\dim Y = k$ i $y_1, \ldots, y_k$ baza u Y. Budući da je $X = Y + Y^\perp$ ortogonalna suma, gdje je $Y^\perp = \{x \in X; (x|y) = 0, y \in Y\}$, svaki $a \in X$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku $a = b + c$, $b \in Y$, $c \in Y^\perp$ pa je $\|c\| = \|a - b\| = \min_{y \in Y} \|a - y\|$. Sada je

$$\Gamma(a, y_1, \ldots, y_k) = \Gamma(b + c, y_1, \ldots, y_k) = \|c\|^2 \, \Gamma(y_1, \ldots, y_k)$$

što znači

$$d(a, Y) = \frac{\Gamma(a, y_1, \ldots, y_k)^{1/2}}{\Gamma(y_1, \ldots, y_k)^{1/2}}$$

Sada dokazujemo tvrdnju teorema koristeći ovu formulu za udaljenost $d(a, Y)$. Neka je $1 \leq k \leq m$ i $Y = \mathbb{K}x_2 + \cdots + \mathbb{K}x_m$, $Y' = \mathbb{K}x_2 + \cdots + \mathbb{K}x_k$. Tada je $Y' \subset Y$ pa je $d(x_1, Y) \leq d(x_1, Y')$ odnosno

$$\frac{\Gamma(x_1, \dots, x_m)}{\Gamma(x_2, \dots, x_m)} \leq \frac{\Gamma(x_1, \dots, x_k)}{\Gamma(x_2, \dots, x_k)}, \ 1 \leq k \leq m$$

pa dobijemo

$$\frac{\Gamma(x_1, \dots, x_m)}{\Gamma(x_1, \dots, x_k)} \leq \frac{\Gamma(x_2, \dots, x_m)}{\Gamma(x_2, \dots, x_k)} \leq \frac{\Gamma(x_3, \dots, x_m)}{\Gamma(x_3, \dots, x_k)} \leq \cdots \leq \Gamma(x_{k+1}, \dots, x_m)$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 3.57 $\Gamma(x_1, \dots, x_m) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_m\|^2$.

KOROLAR 3.58 (Hadamardova nejednakost)
Neka je $A \in gl_n(\mathbb{K})$ matrica sa stupcima $x_1, \dots, x_n$. Tada vrijedi ***Hadamardova nejednakost***

$$|\det A| \leq \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

Dokaz Ako je $A = [x_1, \dots, x_n] \in gl_n(\mathbb{K})$ matrica sa stupcima $x_1, \dots, x_n$ onda je $A^*A = G(x_1, \dots, x_n)^\tau$, pa po prethodnom korolaru dobijemo

$$|\det A|^2 = \det(A^*A) = \Gamma(x_1, \dots, x_m) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_m\|^2$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 3.59 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{K}$, $Y \subset X$ podprostor i $\{x_1, \dots, x_m\}$ baza u Y. Tada za svaki $a \in X$ vrijedi:*

$$d(a, Y) = \frac{\Gamma(a, x_1, \dots, x_m)^{1/2}}{\Gamma(x_1, \dots, x_m)^{1/2}}$$

Dokaz Slijedi iz dokaza Teorema 3.56. ■

Poglavlje 4

Normalni operatori

4.1 Spektralni teorem

Unitarni prostori koje razmatramo u ovom dijelu su euklidski ako nije drukčije rečeno.

PROPOZICIJA 4.1 *Neka je X unitaran nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) *Ako je $X_0 \subset X$ invarijantan podprostor od A onda je $X_0^{\perp}$ invarijantan na A^*.*

(2) *Ortogonalna suma $X = X_0 \dot{+} X_1$ potpuno reducira A ako i samo ako je X_0 invarijantan na A i A^*.*

(3) *Ako je X_0 invarijantan na A i A^* i $A_0 = A|X_0$ onda je $(A_0)^* = (A^*)_0$.*

Dokaz (1) Slijedi iz $(Ax|y) = (x|A^*y)$. (2) Slijedi iz 1. (3) Neka je $(.|.)_0$ restrikcija od $(.|.)$ na X_0. Tada je $(Ax|y) = (A_0x|y)_0 = (x|\,(A_0)^*\,y)_0$, $y \in X_0$, pa je $(Ax|y) = (x|A^*y) = (x|(A^*)_0y)_0$, $x, y \in X_0$. ■

KOROLAR 4.2 *Neka je X unitaran prostor, $A \in L(X)$ normalan operator i $X_0 \subset X$ invarijantan na A i A^*. Tada je $A_0 = A|X_0$ normalan operator.*

Dokaz $A_0\,(A_0)^* = A_0(A^*)_0 = (AA^*)_0 = (A^*A)_0 = (A_0)^*\,A_0$. ■

LEMA 4.3 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$ normalan operator. Ako je $Ax = \lambda x$ onda je $A^*x = \overline{\lambda}x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$.*

Dokaz Neka je $B = A - \lambda I$. Tada je B normalan pa je $\|B^*y\| = \|By\|$, $y \in X$. Sada za $y = x$ dobijemo $Bx = 0$ pa je $B^*x = 0$ tj. $A^*x = \overline{\lambda}x$. ■

TEOREM 4.4 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$ normalan operator. Tada postoji ortonormirana baza e u X takva da je A_e dijagonlna matrica. Specijalno je A poluprost.*

Dokaz Neka je $\lambda_1 \in \sigma(A)$. Tada je λ_1 svojstvena vrijednost od A pa postoji $e_1 \in X$, $\|e_1\| = 1$, takva da je $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Po prethodnoj lemi je $A^* e_1 = \overline{\lambda} e_1$ što znači da je $\mathbb{C}e_1$ invarijantan na A i A^*. Sada je prema Propoziciji 4.1 $X_0 = (\mathbb{C}e_1)^\perp$ invarijantan na A i A^* i $A_0 = A|X_0$ je normalan po Korolaru 4.2. Nastavimo proceduru sa X_0 u ulozi od X i A_0 u ulozi od A pa iteracijom dobijemo ortonormiranu bazu e takvu da je A_e dijagonalna matrca. Dijagonalni elementi su iz $\sigma(A)$. ■

DEFINICIJA 4.5 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{K}$ i $A, B \in L(X)$. Kažemo da su A i B* ***unitarno*** *(odnosno* ***ortogonalno****)* ***ekvivalentni*** *ako postoji unitaran (odnosno ortogonalan) operator $U \in L(X)$ takav da je $B = U^* A U$. Analogno se definira unitarna (odnosno ortogonalna) ekvivalencija matrica.*

KOROLAR 4.6 (1) *Ako su operatori (odnosno matrice) unitarno ekvivalentni onda su oni slični. Obrat ne vrijedi.*
(2) *Normalna matrica $A \in gl_n(\mathbb{C})$ je unitarno ekvivalentna dijagonalnoj.*

KOROLAR 4.7 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$ normalan operator. Tada vrijedi:*
(1) *A je hermitski ako i samo ako je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*
(2) *A je unitaran ako i samo ako je $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.*
(3) *A je antihermitski ako i samo ako je $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$.*

Dokaz Neka je e ortonormirana baza u X takva da je A_e dijagonalna matrica.
(1) $A^* = A \Leftrightarrow A_e^* = A_e \Leftrightarrow \overline{\lambda_i} = \lambda_i \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$.
(2) $AA^* = I \Leftrightarrow A_e A_e^* = I \Leftrightarrow \lambda_i \overline{\lambda_i} = 1 \Leftrightarrow |\lambda_i| = 1$, $i = 1, ..., n$.
(3) $A^* = -A \Leftrightarrow A_e^* = -A_e \Leftrightarrow \overline{\lambda_i} = -\lambda_i \Leftrightarrow \lambda_i \in i\mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$. ■

TEOREM 4.8 (Spektralni teorem)
Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$ normalan operator. Tada postoje jedinstveni projektori P_λ, $\lambda \in \sigma(A)$, koji su polinomi od A, takvi da vrijedi:
(1) $P_\lambda P_\mu = 0$, $\lambda \neq \mu$
(2) $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$, $A^* = \sum_\lambda \overline{\lambda} P_\lambda$
(3) $f(A) = \sum_\lambda f(\lambda) P_\lambda$, $f \in F[A]$
(4) $\|f(A)\| = \max_\lambda |f(\lambda)|$
Formulu $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$ zovemo ***spektralni rastav*** *operatora A.*

Dokaz Po Korolaru 2.51 postoje jedinstveni pluprosti operatori P_λ, $\lambda \in \sigma(A)$, za koje vrijedi (1) i (3), a po Teoremu 4.4 postoji ortonormirana baza e u X takva da je A_e dijagonalna matrica, iz čega slijede (2) i (4). ■

KOROLAR 4.9 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A, B \in L(X)$ normalni. Tada su A i B unitarno ekvivalentni ako i samo ako $p_A = p_B$.*

Dokaz Neka je $p_A = p_B$. Tada je $\sigma(A) = \sigma(B)$ i dimenzije odgovarajućih svojstvenih podprostora od A i B su jednale. Neka su e i u ortonormirane baze u X takve da je $Ae_i = \lambda_i e_i$, $Bu_i = \lambda_i u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Definiramo unitarni operator $U \in L(X)$ sa $Ue_i = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$U^* BU e_i = U^* B u_i = U^* \lambda_i u_i = \lambda_i e_i = Ae_i, \; i = 1, \ldots, n$$

pa je $U^* BU = A$. Obrat je trivijalan. ∎

KOROLAR 4.10 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(X)$ normalan. Tada su svojstveni podprostori od A ortogonalni.*

Dokaz Neka je $X_\lambda = P_\lambda X$ svojstveni podprostor od A pridružen λ. Tada je $X_\lambda \perp X_\mu$, $\lambda \neq \mu$, zbog $P_\lambda P_\mu = 0$, $\lambda \neq \mu$. ∎

LEMA 4.11 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$. Tada A ima invarijantni podprostor X_0 takav da je $\dim X_0 = 1$ ili 2.*

Dokaz Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada je λ svojstvena vrijednost od A_c pa postoji $z \in X_c$, $z \neq 0$, takav da je $A_c z = \lambda z$. Ako je $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ i $z = x + iy$ onda je $A_c z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x + iy) = \lambda_1 x - \lambda_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)$, tj. $Ax = \lambda_1 x - \lambda_2 y$, $Ay = \lambda_2 x + \lambda_1 y$. Dakle, podprostor $X_0 = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ ima traženo svojstvo. ∎

KOROLAR 4.12 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ normalan operator. Ako je X_0 invarijantni podprostor od A i $\dim X_0 = 2$ onda u X_0 postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2\}$ u kojoj operator $A_0 = A|X_0$ ima matricu*

$$A(\rho, \varphi) = \rho \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \; \rho \geq 0, \; \varphi \in [0, 2\pi]$$

Dokaz Neka je $X_0 = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ kao u dokazu prethodne leme i $Ax = \lambda_1 x - \lambda_2 y$, $Ay = \lambda_2 x + \lambda_1 y$, $z = x + iy$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Budući da je $A_c^* z = \overline{\lambda} z$ dobijemo $A_c^* z = A^* x + iA^* y = (\lambda_1 - i\lambda_2)(x + iy)$ pa je $A^* x = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, $A^* y = -\lambda_2 x + \lambda_1 y$. Nadalje, ako je $\overline{\lambda} \neq \lambda$ onda je $(x + iy | x - iy) = 0$ tj. $(x|x) = (y|y)$ i $(x|y) = 0$ pa definiramo $e_1 = x / \|x\|$, $e_2 = y / \|y\|$, $\lambda = \rho e^{i\varphi}$. Tada je (e_1, e_2) ortonormirana baza u X_0 i $Ae_1 = \rho \cos\varphi e_1 - \rho \sin\varphi e_2$, $Ae_2 = \rho \sin\varphi e_1 + \rho \cos\varphi e_2$, iz čega slijedi tvrdnja. ∎

TEOREM 4.13 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ normalan operator. Tada postoji ortonormirana baza e u X takva da je*

$$A_e = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \dot{+} A(\rho_1, \varphi_1) \dot{+} \cdots \dot{+} A(\rho_m, \varphi_m)$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\rho_1, \ldots, \rho_m > 0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in [0, 2\pi]$, $k + 2m = n$, gdje je $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ dijagonalna matrica s dijagonalom $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Dokaz Neka je $\sigma(A) \cap \mathbb{R} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\sigma(A) \setminus \mathbb{R} = \{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\}$. Tada je $n - k = 2m$ zbog $\sigma(A) = \overline{\sigma(A)}$ tj. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A)$. Ako je $\lambda_i \in \sigma(A) \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_i = \rho_i e^{i\varphi_i}$ onda je $\overline{\lambda_i} = \rho_i e^{-i\varphi_i} \in \sigma(A) \setminus \mathbb{R}$. Neka je X_0 kao u Lemi 4.11. Tada je X_0 invarijantan na A i A^* pa je $X_0^\perp$ također invarijantan na A i A^* i $A|X_0^\perp$ je normalan. Nastavljajući proceduru sa $X_0^\perp$ i $A|X_0^\perp$ dobijemo ortogonalne podprostore $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_m$, $\dim X_i = 1$, $\dim Y_i = 2$, takve da je $X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_k \dot{+} Y_1 \dot{+} \cdots \dot{+} Y_m$. Ako u svakom X_i uzmemo jedinični vektor, a u svakom Y_i uzmemo ortonormiranu bazu kao u prethodnom korolaru i skupimo sve njih zajedno dobijemo ortonormiranu bazu e u X u kojoj A ima traženu matricu. ∎

KOROLAR 4.14 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ simetričan operator. Tada u X postoji ortonormirana baza e takva da je A_e dijagonalna matrica. Specijalno je A poluprost.*

Dokaz Kako je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ po prethodnom teoremu je $k = n$, $m = 0$. ∎

KOROLAR 4.15 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ simetričan operator. Tada za A vrijedi spektralni teorem.*

KOROLAR 4.16 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ antisimetričan operator. Tada postoji ortonormirana baza e u X takva da je*

$$A_e = 0 \dot{+} A(\rho_1, \pi/2) \dot{+} \cdots \dot{+} A(\rho_m, \pi/2)$$

Dokaz Iz $A^* = -A$ slijedi $\lambda_i = 0$, $\cos \varphi_i = 0$, $\sin \varphi_i = 1$. ∎

KOROLAR 4.17 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ antisimetričan operator. Tada postoje antisimetrične parcijalne izometrije $U_1, \ldots, U_m$ ranga 2, $m = \frac{1}{2} rang(A)$, takve da vrijedi:*

(1) $U_i U_j = 0$, $i \neq j$

(2) $U_i^2 = -P_i$, *gdje je* P_i *projektor ranga* 2

(3) $A = \rho_1 U_1 + \cdots + \rho_m U_m$, $\rho_i > 0$

(4) $\sigma(A) \subset \{\pm i\rho_k; k = 1, \ldots, m\} \cup \{0\}$

Dokaz Koristeći prethodni korolar definiramo $U_1, \ldots, U_m$ sa

$$\begin{aligned} (U_1)_e &= 0 \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (U_m)_e &= 0 \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tada su U_k antisimetrične parcijalne izometrije ranga 2 i vrijede (1),...,(4). ■

KOROLAR 4.18 *Neka je A iz prethodnog korolara. Tada vrijedi:*
(1) *Za svaki $f \in F[A]$ vrijedi formula*

$$\det f(A) = f(0)^{n-2m} f(i\rho_1) f(-i\rho_1) \cdots f(i\rho_m) f(-i\rho_m)$$

(2) *Ako je* $\dim X$ *paran broj onda je* $\det A \geq 0$.
(3) *Ako je* $\dim X$ *neparan broj onda je* $\det A = 0$.

Dokaz (1) Slijedi iz teorema o preslikavanju spektra, dok (2) i (3) slijede iz (1) za $f(t) = t$. ■

KOROLAR 4.19 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \in L(X)$ ortogonalan operator. Tada postoji ortonormirana baza e u X takva da je*

$$A_e = D(\pm 1, \ldots, \pm 1) \dotplus A(1, \varphi_1) \dotplus \cdots \dotplus A(1, \varphi_m)$$

Dokaz Iz $AA^* = I$ slijedi $\lambda_i = \pm 1$ i $\rho_i = 1$. ■

4.2 Hermitski operatori

DEFINICIJA 4.20 *Neka je X unitaran prostor nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Kažemo da je A **pozitivan** i pišemo $A \geq 0$ ako je $A^* = A$ i $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Ako je A još i regularan onda kažemo da je A **strogo pozitivan** i pišemo $A > 0$ ili $0 < A$. Ako su $A, B \in L(X)$, $A^* = A$, $B^* = B$, onda pišemo $A \geq B$ ili $B \leq A$ ako je $A - B \geq 0$. Ako je $A - B > 0$ onda pišemo $A > B$ ili $B < A$.*

PROPOZICIJA 4.21 *Relacija $\leq$ je parcijalni uređaj na svim hermitskim (simetričnim) operatorima. Nadalje, ako je $A_1 \leq B_1$ i $A_2 \leq B_2$ onda je $A_1 + A_2 \leq B_1 + B_2$.*

Dokaz Neka je $A \geq 0$ i e ortonormirana baza u X takva da je A_e dijagonalna matrica. Ako je $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ onda je $(Ax|x) = \sum \lambda_i |x_i|^2 \geq 0$, zbog $\lambda_i \geq 0$. Dakle, ako je $A^* = A$ onda je $A \geq 0$ ako i samo ako $(Ax|x) \geq 0$, $x \in X$. Prema tome vrijedi: $A \leq B$ ako i samo ako $(Ax|x) \leq (Bx|x)$, $x \in X$. Koristeci ovo svojstvo lako pokažemo da je $\leq$ parcijalni uređaj. Nadalje, ako je $A_1 \leq B_1$, $A_2 \leq B_2$ onda je $(A_1 x|x) \leq (B_1 x|x)$, $(A_2 x|x) \leq (B_2 x|x)$, $x \in X$ pa je $((A_1 + A_2) x|x) \leq ((B_1 + B_2) x|x)$, $x \in X$, tj. $A_1 + A_2 \leq B_1 + B_2$. ■

PROPOZICIJA 4.22 *Ako je $A \geq 0$ i $k \in \mathbb{N}$ onda postoji jedinstven $B \geq 0$ takav da je $B^k = A$. B zovemo k-ti korijen iz A i označavamo ga sa $A^{1/k}$.*

Dokaz Po spektralnom teoremu je $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$ pa ako definiramo $B = \sum_\lambda \lambda^{1/k} P_\lambda$, onda je $B \geq 0$ i $B^k = A$. Jedinstvenost od B je evidentna. ■

PROPOZICIJA 4.23 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *Ako je $A \geq 0$, $B \geq 0$ i $A^2 = B^2$ onda je $A = B$.*
(2) *Ako je $A \geq 0$, $B \geq 0$ i $AB = BA$ onda je $AB \geq 0$.*
(3) *Ako A, B i C komutiraju, $A \leq B$ i $C \geq 0$ onda je $AC \leq BC$.*
(4) *Ako je $A > 0$ onda je $A^{-1} > 0$.*

Dokaz (1) Slijedi iz jedinstvenosti kvadratnog korijena. (2) $(ABx|x) = (AB^{1/2}B^{1/2}x|x) = (B^{1/2}AB^{1/2}x|x) = (AB^{1/2}x|B^{1/2}x) = (Ay|y) \geq 0$, $y = B^{1/2}x$. (3) Slijedi iz (2) zbog $(A - B)C \leq 0$. (4) Budući da je $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ i $\sigma(A) \subset (0, \infty)$ slijedi $\sigma(A^{-1}) \subset (0, \infty)$ pa je $A^{-1} > 0$. ■

PROPOZICIJA 4.24 *Ako je $0 < B \leq A$ onda je $A^{-1} \leq B^{-1}$.*

Dokaz Dokažimo prvo formulu

$$(A^{-1}x|x) = \max_y [2(x|y) - (Ay|y)], \ x \in X$$

Neka je $f \colon X \to \mathbb{K}$, $f(y) = 2(x|y) - (Ay|y)$. Tada iz $f'(y) = 0$ slijedi $x - Ay = 0$ tj. $y = A^{-1}x$. Dakle, f ima samo jedan ekstrem u točki $y = A^{-1}x$ i to je max zbog $f''(y) = -2A < 0$. Nadalje, $f(A^{-1}x) = (A^{-1}x|x)$ pa je formula dokazana.

Sada iz $0 < B \leq A$ slijedi $0 \leq (Bx|x) \leq (Ax|x)$ pa imamo

$$(A^{-1}x|x) = \max_y [2(x|y) - (Ay|y)] \leq \max_y [2(x|y) - (By|y)] = (B^{-1}x|x)$$

iz čega slijedi $A^{-1} \leq B^{-1}$. ■

TEOREM 4.25 (Heinzova nejednakost)
*Ako je $0 \leq B \leq A$ i $0 \leq \alpha \leq 1$ onda vrijedi $B^\alpha \leq A^\alpha$. Ovu nejednakost zovemo **Heinzova nejednakost**.*

Dokaz Iz $0 \leq B \leq A$ slijedi $tI + B \leq tI + A$, $t \in \mathbb{R}$, pa je $(tI + A)^{-1} \leq (tI + B)^{-1}$, $t > 0$, odakle dobijemo

$$A\,(tI + A)^{-1} = I - t\,(tI + A)^{-1} \geq I - t\,(tI + B)^{-1} = B\,(tI + B)^{-1}$$

Ako je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ onda je tvrdnja trivijalna, pa uzmimo $0 < \alpha < 1$. Budući da je

$$s^{\alpha} = \tfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \tfrac{t^{\alpha-1}}{s+t} s dt,\ 0 < \alpha < 1,\ s \geq 0$$

uvrštavanjem A umjesto s dobijemo

$$A^{\alpha} = \tfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} A\,(tI + A)^{-1}\, dt,\ 0 < \alpha < 1$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}(B^{\alpha}x|x) &= \tfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}(B\,(tI + B)^{-1}\, x|x)dt \\ &\leq \tfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}(A\,(tI + A)^{-1}\, x|x)dt = (A^{\alpha}x|x)\end{aligned}$$

iz čega slijedi $B^{\alpha} \leq A^{\alpha}$. ■

PROPOZICIJA 4.26 *Neka je X unitaran prostor i $A \in L\,(X)$. Tada je $A \geq 0$ ako i samo ako postoji $B \in L\,(X)$ takav da je $A = B^*B$.*

Dokaz Ako je $A = B^*B$ onda je $A^* = A$ i $(Ax|x) = (B^*Bx|x) = (Bx|Bx) = \|Bx\|^2 \geq 0$ pa je $A \geq 0$. Obratno, ako je $A \geq 0$ onda za $B = A^{1/2}$ imamo $B^*B = B^2 = A$. ■

TEOREM 4.27 (Polarni rastav)
*Neka je X unitaran nad $\mathbb{K}$, $A \in L\,(X)$ i $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Tada postoji unitaran operator $U \in L\,(X)$ takav da je $A = U\,|A|$. Ovaj rastav od A zovemo **polarni rastav.***

Dokaz Zamijetimo da je $|A| \geq 0$, $\det |A| = |\det A|$ i $\ker A = \ker |A|$.

(1°) Ako je A regularan onda je $|A|$ također regularan pa definiramo $U = A\,|A|^{-1}$. Tada je $U^*U = I$ pa je dokaz gotov. U ovom slučaju je polarni rastav jedinstven. (2°) Neka je $n = \dim X$, p =rang(A) i $1 \leq p \leq n-1$. Uzmimo ortonormiranu bazu e u X takvu da je $|A|\, e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots, p$, $|A|\, e_k = 0$, $k > p$. Neka je $u_k = Ae_k/\lambda_k$, $k = 1, \ldots, p$. Tada je $(u_1, \ldots, u_p)$ ortonormiran pa ga dopunimo do ortonormirane baze $u = (u_1, \ldots, u_n)$ i definiramo unitarni operator $U \in L\,(X)$ sa $Ue_k = u_k$, $k = 1, ...n$. Tada je $U\,|A|\, e_k = U\lambda_k e_k = \lambda_k u_k = Ae_k$, $k = 1, \ldots, p$, i $U\,|A|\, e_k = 0 = Ae_k$, $k > p$, pa je $U\,|A| = A$. U ovom slučaju U nije jedinstven. ■

KOROLAR 4.28 *Neka je X unitaran nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$ singularan operator. Tada postoji jedinstvena parcijalna izometrija $U \in L(X)$ takva da je* $\ker U = \ker A$ *i* $A = U|A|$.

Dokaz Modificiramo slučaj (2°) iz dokaza prethodnog teorema. Umjesto operatora U iz (2°) definiramo U sa $Ue_k = u_k$, $k = 1, \ldots, p$, $Ue_k = 0$, $k > p$. Tada je U tražena parcijalna izometrija. ■

KOROLAR 4.29 *Neka je $A = U|A|$ polarni rastav. Tada je A normalan ako i samo ako je $U|A| = |A|U$.*

Dokaz $A^*A - AA^* = |A|^2 - U|A|^2 U^* = 0$ ako i samo ako $U|A|^2 U^* = |A|^2$ ako i samo ako $U|A|U^* = |A|$ ako i samo ako $U|A| = |A|U$. ■

KOROLAR 4.30 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *Ako je $U^*U = I$ i $A \in L(X)$ onda je $|UA| = |A|$.*

(2) *Ako je $U^*U = I$ i $A \in L(X)$ onda je $|AU| = U^*|A|U$.*

(3) *Ako je $A = U|A|$ polarni rastav onda je $|A^*| = U|A|U^*$ i $A^* = U^*|A^*|$ je polarni rastav.*

(4) *A^*A i AA^* su unitarno ekvivalentni.*

(5) *$|A|$ i $|A^*|$ su unitarno ekvivalentni.*

(6) *Ako je $A = U|A|$ polarni rastav i A regularan onda je $A^{-1} = U^*|A^{-1}|$ polarni rastav i vrijedi $|A^{-1}| = U|A|^{-1}U^*$.*

(7) *Ako je A regularan onda je $|A^{-1}|^{-1} = |A^*|$.*

Dokaz Sva svojstva slijede neposredno iz prethodnog teorema. ■

PROPOZICIJA 4.31 *Ako je $A \in L(X)$, $A^* = A$, $A_+ = \frac{1}{2}(|A| + A)$ i $A_- = \frac{1}{2}(|A| - A)$ onda vrijedi:*

(1) *$A_+ \geq 0$, $A_- \geq 0$ i $A_+A_- = 0$*

(2) *$A = A_+ - A_-$ i $|A| = A_+ + A_-$*

Dokaz Po spektralnom teoremu je $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$, pa je $|A| = \sum_\lambda |\lambda| P_\lambda$ iz čega slijedi $A_+ = \frac{1}{2}\sum_\lambda (|\lambda| + \lambda) P_\lambda \geq 0$, $A_- = \frac{1}{2}\sum_\lambda (|\lambda| - \lambda) P_\lambda \geq 0$, zbog $|\lambda| \pm \lambda \geq 0$, $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Ostale tvrdnje su evidentne. ■

PRIMJERI 4.32 Neka je $U \in L(X)$ parcijalna izometrija. Tada vrijedi:

(a) $P = U^*U$ i $Q = UU^*$ su projektori.
(b) $U = UP = QU$, $|U| = P$ i $|U^*| = Q$.
(c) Ako je U regularan onda je on unitaran.
(d) Svaki projektor je parcijalna izometrija.

(e) U je normalan ako i samo ako $P = Q$ ako i samo ako $\operatorname{im} U^* = \operatorname{im} U$.
(f) $\ker U = \operatorname{im}(I - P) = \ker P$, $\ker U^* = \operatorname{im}(I - Q) = \ker Q$.
(g) Ako je još $U^* = U$ onda vrijedi:
(1) $U^3 = U$, (2) $\sigma(U) \subset \{0, 1, -1\}$,
(3) $|U| = U^2$, (4) $V = I - U^2 + U$ je unitaran,
(5) $U = VU^2$ je polarni rastav,
(6) $f(U) = f(0)(I - |U|) + f(1) U_+ + f(-1) U_-$.

4.3 Singularni brojevi

DEFINICIJA 4.33 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$. Tada se $\sigma(|A|)$ zove **singularni spektar** od A. Ako je*

$$\sigma(|A|) = \{s_1(A), \ldots, s_n(A)\}$$

*onda se $s_k(A)$, $k = 1, \ldots, n$, zovu **singularni brojevi** od A. Smatramo da su oni indeksirani tako da je $s_1(A) \geq \cdots \geq s_n(A) \geq 0$. Vektor $s(A) = (s_1(A), \ldots, s_n(A))^\tau \in \mathbb{R}^n$ se zove **singularni vektor** od A.*

PROPOZICIJA 4.34 *Ako je $U \in L(X)$ unitaran operator i $A \in L(X)$ onda za svaki $k = 1, \ldots, n$, $n = \dim X$, vrijedi:*
(1) $s_k(|A|) = s_k(A) = s_k(A^*)$
(2) $s_k(UA) = s_k(AU) = s_k(A)$
(3) $s_k(U) = 1$
(4) $s_1(A) = \|A\|$
(5) $s_n(A) = \min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \min\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
(6) $s_n(A)\|x\| \leq \|Ax\| \leq s_1(A)\|x\|$, $x \in X$
(7) $s_n(AB) \geq s_n(A) s_n(B)$, $A, B \in L(X)$

Dokaz (1) $\sigma(A^*A) = \sigma(AA^*) \Rightarrow \sigma(|A|) = \sigma(|A^*|)$.
(2) $s_k(UA) = s_k(|UA|) = s_k(|A|) = s_k(A)$ i $s_k(AU) = s_k((AU)^*) = s_k(U^*A^*) = s_k(A^*) = s_k(A)$.
(3) $s_k(U) = s_k(|U|) = s_k(I) = 1$. (4) $\|A\| = \||A|\| = \max(|A| x|x) = s_1(A)$.
(5) Zamijetimo da je $\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \min\limits_{\|x\|=1} \||A|x\|$, iz čega slijedi tvrdnja. (6) Slijedi iz (5) i svojstava spektralne norme, dok (7) slijedi iz (5) i (6). ■

TEOREM 4.35 (Schmidtov rastav)
Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X)$. Tada postoje jedinstvene parcijalne izometrije U_λ, $\lambda \in \sigma(|A|)$, $\lambda \neq 0$, takve da vrijedi:
(1) $U_\lambda^* U_\mu = U_\lambda U_\mu^* = 0$, $\lambda \neq \mu$
(2) $A = \sum_\lambda \lambda U_\lambda$ *i ovu sumu zovemo **Schmidtov rastav** operatora A.*

Dokaz Neka je $A = U|A|$ polarni rastav. Tada po spektralnom teoremu vrijedi $|A| = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$, pa ako stavimo $U_\lambda = UP_\lambda$ onda je $A = U|A| = \sum_\lambda \lambda UP_\lambda = \sum_\lambda \lambda U_\lambda$. Ako je A regularan onda jedinstvenost od U_λ slijedi iz polarnog rastava i spektralnog teorema. Ako je A singularan onda jedinstvenost slijedi iz Korolara 4.28 i spektralnog teorema. Nadalje, ako je $\lambda \neq \mu$ onda imamo $U_\lambda^* U_\mu = (UP_\lambda)^* UP_\mu = P_\lambda U^* UP_\mu = P_\lambda P_\mu = 0$ i $U_\lambda U_\mu^* = UP_\lambda P_\mu U^* = 0$. ∎

KOROLAR 4.36 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *A je parcijalna izometrija ako i samo ako $\sigma(|A|) \subset \{0,1\}$.*
(2) *A je unitaran (odnosno ortogonalan) ako i samo ako $\sigma(|A|) = \{1\}$.*
(3) *Ako je U parcijalna izometrija ranga k onda je $s(U) = e_1 + \cdots + e_k$.*
(4) *$A = \sum_{k=1}^n s_k(A) U_k$, gdje su $U_1, \ldots, U_n$ parcijalne izometrije ranga 1.*

Dokaz (1), (2) i (3) su evidentni. (4) Neka je $A = \sum_\lambda \lambda U_\lambda$ Schmidtov rastav. Sada se svaki U_λ napiše kao suma parcijalnih izometrija ranga 1 pa je $A = \sum_{k=1}^n s_k(A) U_k$. Ovaj rastav nije jedinstven budući da nije jedinstven način prikaza parcijalne izometrije ranga k kao sume od k parcijalnih izometrija ranga 1. ∎

TEOREM 4.37 *Neka je X unitarani prostor nad $\mathbb{K}$ i $J_k(X)$ skup svih $A \in L(X)$ ranga najviše k. Tada za svaki $A \in L(X)$ vrijedi:*

$$s_{k+1}(A) = d(A, J_k(X)) = \min_{B \in J_k(X)} \|A - B\|$$

za svaki $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dokaz Neka je $A = \sum_{i=1}^n s_i(A) U_i$ kao u prethodnom korolaru, gdje su U_i parcijalne izometrije ranga 1 i $B_o = \sum_{i=1}^k s_i(A) U_i$. Tada je $B_0 \in J_k(X)$ pa je $d(A, J_k(X)) \leq \|A - B_0\|$ i $\|A - B_0\| = \|\sum_{i>k} s_i(A) U_i\| = s_{k+1}(A)$. Neka je $B \in J_k(X)$. Tada je $\dim \ker B \geq n - k$ pa postoji $x \in \ker B$ takav da je $x \neq 0$ i $\|Ax\| \geq s_{k+1}(A) \|x\|$. Sada je $\|(A - B)x\| = \|Ax\| \geq s_{k+1}(A) \|x\|$, tj. $\|A - B\| \geq s_{k+1}(A)$. ∎

TEOREM 4.38 *Neka je X unitarani prostor nad $\mathbb{K}$, $A, B \in L(X)$ i $k + m - 1 \leq n = \dim X$. Tada vrijede nejednakosti:*

(1) $s_{k+m-1}(A + B) \leq s_k(A) + s_m(B)$
(2) $s_{k+m-1}(AB) \leq s_k(A) s_m(B)$

Nejednakost (1) zovemo ***aditivnost singularnih brojeva****, a nejednakost (2)* ***multiplikativnost singularnih brojeva****.*

Dokaz (1) Neka su $B_1 \in J_{k-1}(X)$ i $B_2 \in J_{m-1}(X)$ takvi da je $s_k(A) = \|A - B_1\|$, $s_m(B) = \|B - B_2\|$. Tada je $B_1 + B_2 \in J_{k+m-2}(X)$ pa je po prethodnom teoremu

$$\begin{aligned} s_{k+m-1}(A+B) &\leq \|A + B - B_1 - B_2\| \\ &\leq \|A - B_1\| + \|B - B_2\| = s_k(A) + s_m(B) \end{aligned}$$

(2) Za B_1 i B_2 također vrijedi

$$\begin{aligned} s_{k+m-1}(AB) &\leq \|(A - B_1)(B - B_2)\| \\ &\leq \|A - B_1\| \|B - B_2\| \leq s_k(A) s_m(B) \end{aligned}$$

zbog $AB_2 + B_1(B - B_2) \in J_{k-1}(X) + J_{m-1}(X) \subset J_{k+m-2}(X)$. ∎

KOROLAR 4.39 *Ako su $A, B, C \in L(X)$ i $n = \dim X$ onda za svaki $k = 1, \dots, n$ vrijedi:*

(1) $s_k(A+B) \leq s_k(A) + \|B\|$
(2) $s_k(ABC) \leq \|A\| s_k(B) \|C\|$
(3) $|s_k(A) - s_k(B)| \leq \|A - B\|$

Dokaz (1) i (2) slijede iz prethodnog teorema za $m = 1$. Po (1) je $s_k(A) = s_k(A - B + B) \leq s_k(B) + \|A - B\|$ tj. $s_k(A) - s_k(B) \leq \|A - B\|$. Slično je $s_k(B) - s_k(A) \leq \|A - B\|$ pa dobijemo (3). Iz tvrdnje (3) slijedi uniformna neprekidnost singularnih brojeva. ∎

PROPOZICIJA 4.40 *Ako je $A \geq 0$ i $f : \sigma(A) \to [0, \infty)$ rastuća funkcija onda je $f \in F(A)$ i vrijedi:*

(1) $f(A) \geq 0$
(2) $s(f(A)) = f(s_1(A)) e_1 + \cdots + f(s_n(A)) e_n$, $n = \dim X$
(3) $\|f(A)\| = f(\|A\|) = \rho(f(A)) = f(\rho(A))$

Dokaz Po spektralnom teoremu je $|A| = A = \sum_{k=1}^{n} s_k(A) P_k$ pa je $f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k(A)) P_k$ iz čega slijedi tvrdnja. ∎

PROPOZICIJA 4.41 *Ako je $A \geq 0$ i $f : \sigma(A) \to [0, \infty)$ opadajuća funkcija onda je $f \in F(A)$ i vrijedi:*

(1) $f(A) \geq 0$
(2) $s(f(A)) = f(s_n(A)) e_1 + \cdots + f(s_1(A)) e_n$, $n = \dim X$
(3) $\|f(A)\| = f(s_n(A)) = \rho(f(A))$
(4) *Ako je A regularan onda je* $s(A^{-1}) = \frac{1}{s_n(A)} e_1 + \cdots + \frac{1}{s_1(A)} e_n$

Dokaz (1), (2) i (3) Analogno kao u prethodnoj propoziciji, dok je (4) specijalni slučaj za $f(t) = 1/t$, $t > 0$. ∎

PROPOZICIJA 4.42 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $p \geq 1$. Tada vrijedi:*

(1) $\|A\|_p = (\sum_{k=1}^n s_k(A)^p)^{1/p}$ *je unitarno invarijantna norma na* $L(X)$.

(2) $\|A\|_p = \|s(A)\|_p$, $p \geq 1$, $A \in L(X)$

(3) $\|A\| = \|A\|_\infty = \|s(A)\|_\infty$

(4) $\|A\|_p = (\operatorname{tr} |A|^p)^{1/p}$

(5) $\|A\|_p^* = \|A\|_q$, $1/p + 1/q = 1$

(6) $|\operatorname{tr} AB| \leq \|A\|_p \|B\|_q$, $1/p + 1/q = 1$

Dokaz (1) Svi aksiomi norme od $\|\cdot\|_p$ su evidentni osim relacije trokuta. Relacija trokuta se dokazuje pomoću Teorema 4.38, ali mi nećemo navoditi dokaz. Unitarna invarijantnost slijedi iz Propozicije 4.34. (2) i (3) su evidentni. (4) $\sigma(|A|^p) = \sigma(|A|)^p$ pa je $\operatorname{tr} |A|^p = \sum_{k=1}^n s_k(A)^p$ tj. $\|A\|_p^p = \operatorname{tr} |A|^p$. (5) i (6) slijede iz (2) i 3.12. ■

PROPOZICIJA 4.43 *Vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $\det |A| = s_1(A) \cdots s_n(A)$, $n = \dim X$

(2) *A je regularan ako i samo ako* $s_n(A) \neq 0$.

(3) $s_n(A) I \leq |A| \leq s_1(A) I$

(4) $|\operatorname{tr} A| \leq \operatorname{tr} |A| = \|A\|_1$

(5) $n s_n(A) \leq \operatorname{tr} |A| \leq n \|A\|$

(6) *Ako je A normalan onda je* $s_k(A^m) = s_k(A)^m$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, n$.

Dokaz (1) i (2) su evidentni. (3) Slijedi iz spektralnog teorema. (4) Ako je $A = \sum_{k=1}^n s_k(A) U_k$ onda je $|\operatorname{tr} A| \leq \sum_{k=1}^n s_k(A) = \operatorname{tr} |A|$, zbog $|\operatorname{tr} U_k| \leq 1$. (5) je evidentno. (6) Ako je A normalan onda je

$$|A^m| = (A^{m*} A^m)^{1/2} = (A^{*m} A^m)^{1/2} = (A^* A)^{m/2} = |A|^m$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

DEFINICIJA 4.44 *Neka je ν norma na $\mathbb{R}^n$ za koju vrijedi:*

(1) $\nu(x) = \nu(|x|)$, *gdje je* $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^\tau \in \mathbb{R}^n$.

(2) *ν je invarijantna na permutacije koordinata.*

Tada se ν zove ***apsolutna norma*** *na* $\mathbb{R}^n$.

TEOREM 4.45 *Neka je X unitaran nad $\mathbb{K}$,* $\dim X = n$ *i ν norma na $L(X)$. Tada je ν unitarno invarijantna ako i samo ako postoji apsolutna norma ν_1 na $\mathbb{R}^n$ tako da je $\nu(A) = \nu_1(s(A))$, $A \in L(X)$.*

Dokaz Neka je ν unitarno invarijantna. Tada je $\nu(A) = \nu(|A|) = \nu(A^*) = \nu(U_1 A U_2)$, U_1, U_2 unitarni. Neka je e ortonormirana baza u X. Za $A \in L(X)$ postoji unitarni operator $U \in L(X)$ takav da je $U_e^* \left|A\right|_e U_e$ dijagonalna matrica. Definiramo normu ν_2 na $gl_n(\mathbb{K})$ sa $\nu_2(A_e) = \nu(A)$. Za nju vrijedi

$$\nu(A) = \nu_2(U_e^* \left|A\right|_e U_e) = \nu_2\left(s_1(A)e_1e_1^\tau + \cdots + s_n(A)e_ne_n^\tau\right)$$

Sada definiramo normu ν_1 na $\mathbb{R}^n$ sa

$$\nu_1(x) = \nu_2\left(|x_1|e_1e_1^\tau + \cdots + |x_n|e_ne_n^\tau\right)$$

Tada je ν_1 apsolutna norma i vrijedi $\nu_1\left(s\left(A\right)\right) = \nu\left(A\right)$. Obratno, neka je ν_1 apsolutna norma na $\mathbb{R}^n$ i $\nu\left(A\right) = \nu_1\left(s\left(A\right)\right)$. Tada je ν unitarno invarijantna i svi aksiomi norme su ispunjeni evidentno osim relacije trokuta. Relacija trokuta se dokazuje koristeći Teorem 4.38, ali mi to nećemo provjeravati. ■

KOROLAR 4.46 *U uvjetima prethodnog teorema za svaki $A \in L(X)$ je*

$$\min_{B \in J_k(X)} \nu(A - B) = \nu_1\left(s_{k+1}\left(A\right)e_{k+1} + \cdots + s_n\left(A\right)e_n\right)$$

Dokaz Ako je $A = \sum_{i=1}^n s_i\left(A\right)U_i$ i $A_0 = \sum_{i=1}^k s_i\left(A\right)U_i$ kao u 4.36 onda je

$$\min_{B \in J_k(X)} \nu(A - B) = \nu\left(A - A_0\right) = \nu_1\left(s\left(A - A_0\right)\right)$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

PRIMJERI 4.47

(1) $\|\cdot\|_p$ na $\mathbb{R}^n$ je apsolutna norma pa je $\|A\|_p = \|s\left(A\right)\|_p$ unitarno invarijantna norma na $L(X)$ i ona čuva množenje, ali ne čuva jedinicu za $p \neq \infty$, zbog $\|I\|_p = n^{1/p}$, $n = \dim X$.
(2) Neka je $\tilde{\nu}_k$ apsolutna norma na $\mathbb{R}^n$ definirana sa

$$\tilde{\nu}_k\left(x\right) = \max_{i_1 < \ldots < i_k}\left(|x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_k}|\right),\ k = 1, \ldots, n$$

Tada je norma $\nu_k(A) = \tilde{\nu}_k(s(A)) = s_1(A) + \cdots + s_k(A)$ unitarno invarijantna i zovemo je k-ta **Ky Fanova norma** na $L(X)$. Specijalno je $\nu_1(A) = \|A\|$ i $\nu_n(A) = \|A\|_1$, $n = \dim X$.
(3) Ako je $\nu(A) = \nu_1\left(s\left(A\right)\right)$ unitarno invarijantna norma na $L(X)$ onda je udaljenost u normi ν od $A \in L(X)$ do skupa svih singularnih operatora iz $L(X)$ jednaka $s_n(A)\nu_1(e_n)$, $n = \dim X$.

(4) Ako je ν unitarno invarijantna norma na $L(X)$ onda je i dualna norma ν^* unitarno invarijantna.
(5) Neka je X unitaran nad $\mathbb{K}$, $\dim X = n$, $E \subset X$ podprostor i $A \in L(X)$. Tada za svaki $k = 1, \ldots, n$, vrijede formule:

$$s_k(A) = \inf_{\dim E = n-k+1} \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$s_k(A) = \sup_{\dim E = k} \inf_{0 \neq x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

PROPOZICIJA 4.48 *Neka je ν unitarno invarijantna norma na $L(X)$. Tada ν čuva množenje ako i samo ako je $\|A\| \leq \nu(A)$, $A \in L(X)$.*

Dokaz Neka je $\nu(A) = \nu_1(s(A))$ kao u Teoremu 4.45. Ako ν čuva množenje onda je $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \rho(A^*A) \leq \nu(A^*A) \leq \nu(A^*)\nu(A) = \nu(A)^2$, pa je $\|A\| \leq \nu(A)$, $A \in L(X)$. Obratno, ako vrijedi $\|A\| \leq \nu(A)$, $A \in L(X)$ onda je $\nu(AB) = \nu_1(s(AB)) \leq \nu_1(\|A\| s(B)) = \|A\| \nu(B) \leq \nu(A)\nu(B)$ pa ν čuva množenje. ■

DEFINICIJA 4.49 *Neka je X algebra nad $\mathbb{K}$. Ako je zadano preslikavanje $* : X \to X$, $x \to x^*$, $x \in X$, takvo da vrijedi:*
(1) $(x + y)^* = x^* + y^*$, $x, y \in X$
(2) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$
(3) $(xy)^* = y^* x^*$, $x, y \in X$
(4) $(x^*)^* = x$, $x \in X$
*onda se ovo preslikavanje zove **involucija** na X, a uređeni par $(X, *)$ se zove **algebra s involucijom.***

DEFINICIJA 4.50 *Neka je X Banachova algebra s involucijom. Ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\|x^*x\| = \|x\|^2$ onda se X zove C^*-**algebra**.*

PRIMJERI 4.51

(1) Neka je X unitaran nad $\mathbb{K}$. Tada je $L(X)$ Banachova algebra sa spektralnom normom. Nadalje, $L(X)$ je algebra s involucijom $A \to A^*$, pa po C^*-svojstvu spektralne norme zaključujemo da je $L(X)$ C^*-algebra.
(2) Ako je $A \in L(X)$ normalan operator onda su $\{A\}'$ i $\{A\}''$ C^*-**podalgebre od** $L(X)$.
(3) Neka je $K \subset \mathbb{K}^n$ kompaktan i neprazan skup i $C(K)$ Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $f : K \to \mathbb{K}$ s normom $\|f\| = \max |f(x)|$. Tada je $C(K)$ C^*-algeba s involucijom $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Naime

$$\|f^* f\| = \max |\overline{f(x)} f(x)| = \max |f(x)|^2 = \|f\|^2$$

(4) Na $\mathbb{K}^n$ uvodimo koordinatno množenje $xy = \sum x_i y_i e_i$, gdje je $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i \in \mathbb{K}^n$. Tada je $\mathbb{K}^n$ C^*-algebra sa normom $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$ i involucijom $x^* = \sum \overline{x_i} e_i$. Ona je komutativna i izomorfna sa $C(K)$, gdje je $K = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Poglavlje 5

Topološke mnogostrukosti

5.1 Topološke grupe

DEFINICIJA 5.1 *Neka je G grupa i Hausdorffov topološki prostor. Kažemo da je G **topološka grupa** ako su operacije množenja $(x, y) \mapsto xy$ i invertiranja $x \mapsto x^{-1}$ neprekidne.*

PROPOZICIJA 5.2 *Neka je G topološka grupa i $a \in G$. Tada su preslikavanja $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$ i $x \mapsto x^{-1}$ homeomorfizmi od G.*

Dokaz Ova preslikavanja su bijekcije, njihovi inverzi su dani sa $x \mapsto a^{-1}x$, $x \mapsto xa^{-1}$ i $x \mapsto x^{-1}$, a neprekidnost slijedi iz definicije. ■

DEFINICIJA 5.3 *Neka su G_1 i G_2 topološke grupe i $\varphi : G_1 \to G_2$. Kažemo da je φ **homomorfizam topoloških grupa** ako je φ homomorfizam grupa i neprekidno preslikavanje. Kažemo da je φ **izomorfizam topoloških grupa** ako je φ izomorfizam grupa i homeomorfizam. Analogno se definira **endomorfizam**, odnosno **automorfizam topološke grupe** G.*

PRIMJERI 5.4

(1) Svaka grupa je topološka grupa uz **diskretnu topologiju**. Ovaj slučaj nije naročito zanimljiv, osim za prebrojive ili konačne grupe.
(2) Ako su G_1 i G_2 topološke grupe onda je $G_1 \times G_2$ također topološka grupa uz **produktnu topologiju**.
(3) $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$ su topološke grupe. Ako je $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ onda su $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ i $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ topološke grupe.
(4) Neka je G topološka grupa i H podgrupa od G. Tada je H topološka grupa uz **relativnu topologiju** i zovemo je **topološka podgrupa** od G.

(5) Neka je G topološka grupa, H **zatvorena normalna podgrupa** od G i $\varphi : G \to G/H$ **kanonski epimorfizam** tj. $\varphi(g) = gH$, $g \in G$. Tada je G/H topološka grupa uz **kvocijentnu topologiju**, a φ je **epimorfizam topoloških grupa**.
(6) Neka je X normirani prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Tada je $(X, +)$ topološka grupa izomorfna topološkoj grupi $(\mathbb{K}^n, +)$.
(7) Opća linearna grupa $GL_n(\mathbb{K})$ je topološka grupa. Naime, ako su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ iz $GL_n(\mathbb{K})$ i $C = AB = [c_{ij}]$ onda je $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ polinom po a_{ij} i b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, pa je, naravno, neprekidna funkcija. Nadalje, $A^{-1} = [d_{ij}]$, gdje je d_{ij} racionalna funkcija od a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, što znači da je d_{ij} neprekidna funkcija, za svaki i, j.
(8) Sve grupe definirane u Uvodu su topološke grupe.
(9) Neka je X normirani prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i G grupa svih regularnih operatora iz $L(X)$. Tada je G topološka grupa izomorfna topološkoj grupi $GL_n(\mathbb{K})$.

DEFINICIJA 5.5 *Neka je M neprazan separabilan topološki prostor i n prirodni broj. Ako svaka točka iz M ima otvorenu okolinu homeomorfnu sa $\mathbb{R}^n$ onda se M zove **topološka mnogostrukost** ili kraće **mnogostrukost**, a broj n se zove **dimenzija** od M i pišemo* $\dim M = n$.

Ako je M konačan ili prebrojiv diskretni topološki prostor onda M zovemo mnogostrukost dimenzije 0 i pišemo $\dim M = 0$.

LEMA 5.6 *Neka je G zatvorena podgrupa od $GL_n(\mathbb{K})$ i*

$$\mathfrak{g} = \{A \in gl_n(\mathbb{K}); \exp tA \in G,\ t \in \mathbb{R}\}$$

*Tada je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$ i zovemo je **Liejeva algebra grupe** G.*

Dokaz Ako je $A \in G$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ onda iz definicije od $\mathfrak{g}$ slijedi $\alpha A \in G$. Neka su $A, B \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ i

$$L_k(t) = (\exp \tfrac{t}{k}A \cdot \exp \tfrac{t}{k}B)^k$$

Tada je $L_k(t) \in G$ i vrijedi

$$L_k(t) = (I + \tfrac{t}{k}(A + B) + \tfrac{(*)}{k^2} + \cdots)^k \to \exp t(A + B),\ k \to \infty$$

pa zbog zatvorenosti od G slijedi $\exp t(A + B) \in G$, što po definiciji od $\mathfrak{g}$ znači da je $A + B \in \mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{g}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Neka je

$$N_k(t) = (\exp \tfrac{t}{k}A \cdot \exp \tfrac{t}{k}B \cdot \exp \tfrac{-t}{k}A \cdot \exp \tfrac{-t}{k}B)^{k^2},\ k \geq 1$$

Tada je $N_k(t) \in G$ i vrijedi

$$N_k(t) = (I + \tfrac{t^2}{k^2}[A,B] + \tfrac{(*)}{k^3} + \cdots)^{k^2} \to \exp t^2[A,B],\ k \to \infty$$

pa ponovo zbog zatvorenosti od G slijedi $\exp t^2[A,B] \in G$, što po definiciji od $\mathfrak{g}$ znači $[A,B] \in \mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{g}$ je zatvorena na komutator $[A,B] = AB - BA$ pa zaključujemo da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$. Zamijetimo da je $\mathfrak{g} \subset gl_n(\mathbb{K})$ i da $\mathfrak{g}$ ne mora biti Liejeva algebra nad $\mathbb{K}$, kao npr. za $G = U(n)$. ■

TEOREM 5.7 *Neka je G zatvorena podgrupa od $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra od G i $m = \dim \mathfrak{g}$. Tada je G mnogostrukost dimenzije m.*

Dokaz Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je homeomorfna sa $\mathbb{R}^m$, kao vektorski prostor. Svaki otvoreni disk u $\mathbb{R}^n$ je homeomorfan sa $\mathbb{R}^n$. Neka je $D = \{A \in \mathfrak{g}; \|A\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Ako je $A \in D$ onda je $B = \exp A \in G$ i $\|B - I\| < \alpha\varepsilon$, za neki $\alpha > 0$. Za dovoljno mali ε je $U = \exp D$ okolina od $I \in G$ i na U je definiran log, inverz od exp. Dakle, U je homeomorfan sa D, a D je homeomorfan sa $\mathbb{R}^m$ pa je i U homeomorfan sa $\mathbb{R}^m$. Neka je sada $B \in G$ proizvoljan. Tada je $BU = \{BT; T \in U\}$ okolina od B koja je homeomorfna sa $\mathbb{R}^m$. ■

TEOREM 5.8 *Neka su G i H zatvorene podgrupe od $GL_n(\mathbb{K})$ i $H \subset G$. Tada je kvocijentni topološki prostor $G/H = \{gH; g \in G\}$ topološka mnogostrukost i vrijedi $\dim G/H = \dim G - \dim H$.*
Mnogostrukost ovog oblika se zove ***homogeni prostor****.*

Dokaz Prvo zamijetimo da G/H ne mora biti grupa. G/H je grupa ako i samo ako je H normalna podgrupa od G. Neka je $\varphi : G \to G/H$ kanonski epimorfizam tj. $\varphi(g) = gH$. Tada je φ neprekidan i otvoren. Neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre od G i H. Tada je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^\perp$, gdje je $\mathfrak{h}^\perp = \{A \in \mathfrak{g}; (A|B) = 0,\ B \in \mathfrak{h}\}$ vektorski podprostor od $\mathfrak{g}$. Neka je $\dim \mathfrak{g} = m$, $\dim \mathfrak{h} = k$ i D i $U = \exp D$ kao u dokazu prethodnog teorema. Stavimo $D' = D \cap \mathfrak{h}^\perp$ i $U' = \exp D'$. Tada je U' homeomorfan sa D', a D' sa $\mathfrak{h}^\perp$ pa je D' homeomorfan sa $\mathbb{R}^{m-k}$. Nadalje, $\varphi(U') = U'H$ je otvorena okolina od $\varphi(I)$. Ako je $g \in G$ i $V = gU'H$ onda je V otvorena okolina od gH i V je homeomorfna sa $\mathbb{R}^{m-k}$. ■

DEFINICIJA 5.9 *Neka je G grupa i X neprazan skup. Ako je zadana operacija $* : G \times X \to X$ takva da vrijedi:*

(1) $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$, $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$

(2) $e * x = x$, $x \in X$, *gdje je e jedinica u G*

onda kažemo da G ***djeluje na*** *X, a operaciju $*$ zovemo* ***djelovanje****. Ako je G topološka grupa, X topološki prostor i $(g,x) \mapsto g * x$ neprekidno preslikavanje onda kažemo da G* ***djeluje neprekidno*** *na X. Kažemo da G* ***djeluje***

tranzitivno *na* X *ako za svaki* $x, y \in X$ *postoji* $g \in G$ *takav da je* $y = g * x$. *Skup* $G * x = \{g * x; g \in G\}$ *se zove* ***orbita*** *od* $x \in X$. *Skup svih orbita označavamo sa* X/G.

PROPOZICIJA 5.10 *Neka* G *djeluje na* X. *Tada vrijedi:*

(1) $x \mapsto g * x$ *je bijekcija na* X, *za svaki* $g \in G$. *Ako* G *djeluje neprekidno onda je ovo homeomorfizam od* X.

(2) $G_x = \{g \in G; g*x = x\}$ *je podgrupa od* G, *za svaki* $x \in X$, *i zovemo je* ***stabilizator*** *od* x *ili* ***izotropna podgrupa*** *od* x. *Ako* G *djeluje neprekidno na* X *onda je* G_x *zatvorena podgrupa u* G.

(3) *Ako* G *djeluje tranzitivno na* X *onda je* X/G *jednočlan skup.*

(4) $gG_xg^{-1} = G_{g*x}$, $g \in G$, $x \in X$

(5) G *djeluje tranzitivno na svakoj orbiti.*

Dokaz Slijedi neposredno iz definicije. ■

TEOREM 5.11 *Neka je* G *zatvorena podgrupa od* $GL_n(\mathbb{K})$ *i* $X \subset \mathbb{K}^m$ *neprazan skup. Ako* G *djeluje neprekidno i tranzitivno na* X *onda je* X *topološka mnogostrukost homeomorfna sa* G/G_x, $x \in X$.

Dokaz Neka je $x \in X$ i $\Phi : G/G_x \to X$ definiran sa $\Phi(gG_x) = g * x$. Tada je Φ neprekidan, surjektivan i otvoren. Ako je $\Phi(g_1G_x) = \Phi(g_2G_x)$ onda je $g_1 * x = g_2 * x$ pa je $(g_1^{-1}g_2) * x = x$ tj. $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ odnosno $g_2 \in g_1G_x$ što znači $g_1G_x = g_2G_x$ pa zaključujemo da je Φ još i injektivan. ■

PRIMJERI 5.12

(1) Ako G djeluje na X onda i svaka njezina podgrupa također djeluje na X. Grupa G djeluje na samoj sebi tranzitivno sa $g * x = gx$.
(2) Grupa G djeluje na samoj sebi sa $g * h = ghg^{-1}$. Ovo djelovanje se zove **konjugiranje**.
(3) Grupa $GL_n(\mathbb{K})$ djeluje neprekidno na $\mathbb{K}^n$ sa $A * x = Ax$. Djelovanje ima samo dvije orbite $\{0\}$ i $\mathbb{K}^n \backslash \{0\}$.
(4) Grupa $GL_n(\mathbb{K})$ djeluje neprekidno na $gl_n(\mathbb{K})$ sa $A * B = ABA^{-1}$. Ovo djelovanje nije tranzitivno. Matrice B_1 i B_2 su u istoj orbiti ako i samo ako su slične. Svaka orbita je homogeni prostor i vrijedi

$$\dim GL_n(\mathbb{K}) * B = \dim GL_n(\mathbb{K}) - \dim\{B\}'$$

Analogna svojstva vrijede ako $GL_n(\mathbb{K})$ zamijenimo grupom G svih regularnih operatora iz $L(X)$, a $gl_n(\mathbb{K})$ sa $L(X)$.

(5) Grupa $O(n)$ djeluje neprekidno na $gl_n(\mathbb{R})$ sa $U * B = UBU^\tau$. Djelovanje nije tranzitivno. Matrice B_1 i B_2 su u istoj orbiti ako i samo ako su ortogonalno ekvivalentne. Analogna svojstva vrijede ako $O(n)$ zamijenimo sa $U(n)$, a $gl_n(\mathbb{R})$ sa $gl_n(\mathbb{C})$. Orbite $O(n) * B$ i $U(n) * B$ su kompaktni prostori.
(6) Neka je $V(n,k)$, $1 \le k \le n$, skup svih realnih $n \times k$ matrica s ortonormiranim stupcima. Tada se $V(n,k)$ zove **realna Stiefelova mnogostrukost**. Grupa $O(n)$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $V(n,k)$ sa $U * V = UV$. Ako je $V \in V(n,k)$ onda je stabilizator od V izomorfan sa $O(n-k)$. Naime

$$O(n)_{V_0} = \left\{ \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} ; W \in O(n-k) \right\}, \ V_0 = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa je $V(n,k)$ homogeni prostor homeomorfan sa $O(n)/O(n-k)$ i

$$\dim V(n,k) = \binom{n}{2} - \binom{n-k}{2} = k(n-k) + \binom{k}{2}$$

$V(n,k)$ je kompaktna zbog kompaktnosti od $O(n)$. $V(n,n-1)$ je homeomorfna sa $SO(n)$. Naime, ako je $V \in V(n,n-1)$ matrica s ortonormiranim stupcima $u_1, \ldots, u_{n-1}$ onda im dodamo vektor u_n takav da je $(u_1, \ldots, u_n)$ ortonormirana baza i $\det[u_1, \ldots, u_n] = 1$. Tada je $[u_1, \ldots, u_n] \in SO(n)$. Inverz ovog preslikavanja je izbacivanje posljednjeg stupca. Zamijetimo da je $SO(n)$ povezan prostor. Naime, $SO(n)$ je slika surjektivnog i neprekidnog preslikavanja $\exp : so(n) \to SO(n)$.

$V(n,k)$, $1 \le k \le n-1$, se dobije iz $V(n,n-1)$ izbacivanjem nekih stupaca, što znači da je $V(n,k)$ neprekidna slika povezanog i kompaktnog prostora $V(n,n-1)$, pa zaključujemo da je $V(n,k)$, $1 \le k \le n-1$, povezan i kompaktan homogeni prostor.

$V(n,n) = O(n)$ je kompaktna, ali nije povezana. Ona ima dvije komponente: $SO(n)$ i $O(n) \backslash SO(n)$.
(7) Neka je $\overline{V}(n,k)$, $1 \le k \le n$, skup svih kompleksnih $n \times k$ matrica s ortonormiranim stupcima. Tada se $\overline{V}(n,k)$ zove **kompleksna Stiefelova mnogostrukost**. Grupa $U(n)$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $\overline{V}(n,k)$ sa $U * V = UV$. Slično kao u (6) zaključujemo da vrijedi:

(a) $\overline{V}(n,k)$ je homogeni prostor homeomorfan sa $U(n)/U(n-k)$.
(b) $\dim \overline{V}(n,k) = n^2 - (n-k)^2 = 2k(n-k) + k^2$
(c) $\overline{V}(n,k)$ je kompaktna i povezana za svaki n i k.

5.2 Grassmannove mnogostrukosti

DEFINICIJA 5.13 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $G_k(X)$ skup svih projektora iz $L(X)$ ranga k, $k = 1, \ldots, n$. Tada se $G_k(X)$ zove k-ti*

Grassmannian *od* X *ili* k*-ta* ***Grassmannova mnogostrukost*** *od* X*, a* $G(X) = G_0(X) \cup G_1(X) \cup \cdots \cup G_n(X)$ *se zove* ***Grassmannian*** *od* X*.* $G_1(X)$ *se također zove* ***projektivni prostor*** *od* X*.*

Skup svih parcijalnih izometrija iz $L(X)$ *ranga* k *označavamo sa* $I_k(X)$*, dok skup svih parcijalnih izometrija iz* $L(X)$ *označavamo sa* $I(X)$*. Evidentno je* $I(X) = I_0(X) \cup I_1(X) \cup \cdots \cup I_n(X)$*.*

Zamijetimo da je $G_0(X) = I_0(X) = \{0\}$*,* $G_n(X) = \{I\}$ *i* $G_k(X) \subset I_k(X)$ *za svaki* k*.*

TEOREM 5.14 *Neka je* X *euklidski prostor nad* $\mathbb{K}$ *dimenzije* n*.*

(1) *Ako je* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *onda je* $G_k(X)$ *kompaktan i povezan homogeni prostor dimenzije* $k(n-k)$ *homeomorfan sa* $O(n)/O(k) \times O(n-k)$*.*

(2) *Ako je* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *onda je* $G_k(X)$ *kompaktan i povezan homogeni prostor dimenzije* $2k(n-k)$ *homeomorfan sa* $U(n)/U(k) \times U(n-k)$*.*

Nadalje, u oba slučaja je $G_k(X)$ *homeomorfan sa* $G_{n-k}(X)$*, za svaki* k*.*

Dokaz Tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj $X = \mathbb{K}^n$ i $1 \le k \le n-1$. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Grupa $O(n)$ djeluje na $G_k(X)$ neprekidno i tranzitivno sa $U * P = UPU^*$. Stabilizator od $P \in G_k(X)$ je izomorfan sa $O(k) \times O(n-k)$. Naime

$$O(n)_{P_0} = \left\{ \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}; U_1 \in O(k), U_2 \in O(n-k) \right\}, \; P_0 = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

što znači da je $G_k(X)$ homogeni prostor dimenzije $k(n-k)$. Kompaktnost od $G_k(X)$ slijedi iz kompaktnosti od $O(n)$. Dokažimo da je $G_k(X)$ povezan. Definiramo $p : V(n,k) \to G_k(X)$, $1 \le k \le n-1$, sa $p(U) = UU^\tau$. Tada je p neprekidno i surjektivno preslikavanje pa zbog povezanosti od $V(n,k)$ zaključujemo da je $G_k(X)$ povezan.

Tvrdnje za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dokazujemo na analogan način, dok kompaktnost i povezanost od $G_k(X)$, u ovo slučaju, slijede iz kompaktnosti i povezanosti od $U(n)$.

Nadalje, preslikavanje $P \mapsto I - P$ je homeomorfizam između $G_k(X)$ i $G_{n-k}(X)$, za svaki k. ■

DEFINICIJA 5.15 *Neka je* X *euklidski prostor nad* $\mathbb{K}$*.*

(1) *Ako su* $P, Q \in G_k(X)$*,* $k \ge 1$*, i* $\varphi_m = \arccos s_m(PQ)$*,* $m = 1, \ldots, k$*, onda se* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *zovu* ***kutovi između*** P *i* Q *ili* ***kutovi između ravnina*** $\operatorname{im} P$ *i* $\operatorname{im} Q$*.*

(2) *Ako su* $P, Q \in G(X)$ *onda sa* $P \wedge Q$ *označavamo projektor na ravninu* $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$*, a sa* $P \vee Q$ *projektor na ravninu* $\operatorname{im} P + \operatorname{im} Q$*.*

PROPOZICIJA 5.16 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $P, Q \in G(X)$. Tada vrijedi:*

(1) $\|P - Q\| \leq 1$

(2) *Ako je* $\operatorname{tr} P \neq \operatorname{tr} Q$ *onda je* $\|P - Q\| = 1$.

(3) $\|P - Q\| = \sin \varphi_k$, $P, Q \in G_k(X)$, $1 \leq k \leq n - 1$

Dokaz (1) Budući da je $P - Q = P(I - Q) - (I - P)Q$ dobijemo

$$\begin{aligned}\|(P - Q)x\|^2 &= \|P(I - Q)x\|^2 + \|(I - P)Qx\|^2 \\ &\leq \|(I - Q)x\|^2 + \|Qx\|^2 = \|x\|^2\end{aligned}$$

tj. $\|(P - Q)x\| \leq \|x\|$, $x \in X$, pa je $\|P - Q\| \leq 1$.
(2) Ako je $\operatorname{tr} P < \operatorname{tr} Q$ onda postoji $x \in X$, $x \neq 0$, takav da je $Px = 0$ i $Qx = x$ pa za ovaj x imamo $\|(P - Q)x\| = \|x\|$ iz čega slijedi $\|P - Q\| \geq 1$. Tvrdnja sada slijedi iz (1). (3) Budući da je spektar $\sigma(P - Q)$ sadržan u skupu $\{0, \pm \sin \varphi_1, \ldots, \pm \sin \varphi_k\}$, gdje su $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ kutovi između P i Q, dobijemo $\|P - Q\| = \rho(P - Q) = \max_m \sin \varphi_m = \sin \varphi_k$. ∎

PROPOZICIJA 5.17 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Tada je $G(X)$ rešetka s parcijalnim uređajem $\leq$ i operacijama minimuma $\wedge$ i maksimuma $\vee$. Minimalni element ove rešetke je 0, a maksimalni I. Nadalje, $\wedge$ i $\vee$ su komutativne i asocijativne operacije.*

Za svaki $P, Q \in G(X)$ vrijedi:

(1) $P \wedge Q = \lim(PQ)^m$

(2) $P \vee Q = I - (I - P) \wedge (I - Q)$

(3) $P \wedge Q = I - (I - P) \vee (I - Q)$

Dokaz Rešetka je parcijalno uređen skup $(X, \leq)$ u kojem svaka dva elementa $x, y \in X$ imaju minimum $x \wedge y$ i maksimum $x \vee y$. Dakle, prva tvrdnja je evidentna. (1) Zamijetimo da je $\lim(PQ)^m = \lim(PQP)^m$ i ovaj limes postoji zbog $0 \leq PQP \leq I$. Označimo ga sa E. Neka je e ortonormirana baza u X u kojoj se PQP dijagonalizira. Tada matrica $(PQP)_e$ ima na dijagonali $s_k(PQP) = s_k(PQ)^2$, $k = 1, \ldots, n$. Budući da je $0 \leq s_k(PQ) \leq 1$ dobijemo $s_k(PQ)^m \to 0$ za $s_k(PQ) < 1$ i $s_k(PQ)^m \to 1$ za $s_k(PQ) = 1$. Dakle, matrica E_e ima na dijagonali onoliko jedinica koliko je singularnih brojeva $s_k(PQ)$ jednako 1, a njih ima r, gdje je $r = \dim(\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q)$, što znači da je E projektor na $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$. Tvrdnja (2) slijedi iz (1), a (3) je drugi zapis od (2). ∎

PRIMJERI 5.18 Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i P i Q projektori iz $L(X)$. Tada imamo:

(1) Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:
(a) $P \leq Q$
(b) $\|Px\| \leq \|Qx\|$, $x \in X$
(c) $PQ = P$
(d) $QP = P$
(e) $\operatorname{im} P \subset \operatorname{im} Q$
(f) $P \wedge Q = P$
(g) $P \vee Q = Q$

(2) Ako P i Q komutiraju onda je $P \wedge Q = PQ$, $P \vee Q = P + Q - PQ$.

(3) Vrijede sljedeće tvrdnje:
(a) $P \wedge Q = 0$ ako i samo ako $\|PQ\| < 1$.
(b) $P \vee Q = I$ ako i samo ako $\|(I - P)(I - Q)\| < 1$.

(4) Ako je $P \wedge Q = 0$ onda je

$$P \vee Q = P + Q - (I - P)QP(I - QP)^{-1} - (I - Q)PQ(I - PQ)^{-1}$$

(5) Ako su $a, b \in X$ onda je udaljenost između ravnina $a + \operatorname{im} P$ i $b + \operatorname{im} Q$ dana formulom

$$d(a + \operatorname{im} P, b + \operatorname{im} Q) = d(a - b, \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q) = \|(I - P \vee Q)(a - b)\|$$

dok je udaljenost između ravnina $a + \ker P$ i $b + \ker Q$ dana sa

$$d(a + \ker P, b + \ker Q) = \|(P \wedge Q)(a - b)\|$$

(6) Ako su $P, Q \in G_k(X)$ i $1 \leq k \leq n - 1$, onda vrijedi:
(a) $\|P + Q\| = 1 + \|PQ\|$
(b) $\|PQ - QP\| \leq 1/2$
(c) $\|PQ + QP\| = \|PQ\|(1 + \|PQ\|)$
(d) $\|PQP - QPQ\| \leq 2\sqrt{3}/9$
(e) $\|PQP + QPQ\| = \|PQ\|^2(1 + \|PQ\|)$
(f) $\|P + PQP\| = 1 + \|PQ\|^2$

TEOREM 5.19 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n.*
Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ onda vrijedi:
(1) *$I_k(X)$ je kompaktan homogeni prostor homeomorfan sa*

$$O(n) \times O(n)/O(k) \times O(n-k) \times O(n-k)$$

(2) $\dim I_k(X) = 2k(n-k) + \binom{k}{2}$
(3) *$I_k(X)$ je povezan za $k \neq n$.*
Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ onda vrijedi:
(4) *$I_k(X)$ je kompaktan i povezan homogeni prostor homeomorfan sa*

$$U(n) \times U(n)/U(k) \times U(n-k) \times U(n-k)$$

(5) $\dim I_k(X) = 4k(n-k) + k^2$

Dokaz Tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj $X = \mathbb{K}^n$ i $1 \leq k \leq n-1$. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Grupa $O(n) \times O(n)$ djeluje na $I_k(X)$ neprekidno i tranzitivno sa $(U_1, U_2) * V = U_1 V U_2^*$. Stabilizator od $V \in I_k(X)$ je izomorfan sa $O(k) \times O(n-k) \times O(n-k)$. Naime, $O(n) \times O(n)_{V_0}$ je jednak

$$\left\{ \left(\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \right); U \in O(k), U_1, U_2 \in O(n-k) \right\}, \ V_0 = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

što znači da je $I_k(X)$ homogeni prostor dimenzije $2k(n-k) + \binom{k}{2}$. Kompaktnost od $I_k(X)$ slijedi iz kompaktnosti od $O(n) \times O(n)$. Dokažimo da je $I_k(X)$ povezan. Definiramo $p : V(n,k) \times V(n,k) \to I_k(X)$, $1 \leq k \leq n-1$, sa $p(V_1, V_2) = V_1 V_2^\tau$. Tada je p neprekidno i surjektivno preslikavanje pa zbog povezanosti od $V(n,k)$ zaključujemo da je $I_k(X)$ povezan. $I_n(X) = O(n)$ nije povezan.

Tvrdnje za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dokazujemo na analogan način, dok kompaktnost i povezanost od $I_k(X)$ slijedi iz kompaktnosti i povezanosti od $U(n) \times U(n)$. ∎

PRIMJERI 5.20

(1) Sve simetrične matrice iz $gl_n(\mathbb{R})$ čine vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $m = \binom{n+1}{2}$. Sve strogo pozitivne matrice iz $GL_n(\mathbb{R})$ čine otvoren skup u ovom prostoru. Dakle, sve strogo pozitivne matrice iz $GL_n(\mathbb{R})$ čine mnogostrukost dimenzije $m = \binom{n+1}{2}$. Ova mnogostrukost je povezana i nije kompaktna. Ako je $A \in GL_n(\mathbb{R})$ i $A = U|A|$ polarni rastav od A, onda je $U \in O(n)$ i $|A| > 0$ pa je $GL_n(\mathbb{R})$ homeomorfna (ali nije izomorfna!) produktu mnogostrukosti $O(n) \times \mathbb{R}^m$, $m = \binom{n+1}{2}$. Homeomorfizam je definiran polarnim rastavom. Zamijetimo da $GL_n(\mathbb{R})$ nije povezana budući da $O(n)$ nije povezana.
(2) Slično kao u (1) zaključujemo da je $GL_n(\mathbb{C})$ homeomorfna (ali nije izomorfna!) produktu mnogostrukosti $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$ pa je $GL_n(\mathbb{C})$ povezana, kao produkt dviju povezanih mnogostrukosti.
(3) Neka je $V'(n,k)$, $1 \leq k \leq n$, skup svih realnih $n \times k$ matrica s nezavisnim stupcima. Tada se $V'(n,k)$ zove **realna opća Stiefelova mnogostrukost**. Grupa $GL_n(\mathbb{R})$ djeluje na $V'(n,k)$ neprekidno i tranzitivno sa $A * V = AV$. Stabilizator od $V \in V'(n,k)$ je izomorfan sa

$$GL_n(\mathbb{R})_{V_0} = \left\{ \begin{bmatrix} I_k & * \\ 0 & A \end{bmatrix}; A \in GL_{n-k}(\mathbb{R}) \right\}, \ V_0 = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

što znači da je $V'(n,k)$ homogeni prostor dimenzije $n^2 - n(n-k) = nk$. Zamijetimo da $V'(n,k)$ nije kompaktna i da $V'(n,n) = GL_n(\mathbb{R})$ ima dvije komponente. Budući da je $SL_n(\mathbb{R})$ povezana i da se svaki $V \in V'(n,k)$, $1 \leq k \leq n-1$, može dobiti izbacivanjem nekih stupaca iz $A \in SL_n(\mathbb{R})$ zaključujemo da je $V'(n,k)$ povezana za $1 \leq k \leq n-1$.

Ako je $V \in V'(n,k)$ i $A = V^*V$ onda je $A \in GL_k(\mathbb{R})$ i $A > 0$. Nadalje, ako je $U = VA^{-1/2}$ onda je $U^*U = I$ tj. $U \in V(n,k)$. Dakle, svaki V iz $V'(n,k)$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku $V = U|V|$, gdje je $|V| = (V^*V)^{1/2}$ i $U = V|V|^{-1}$. Ovaj rastav zovemo **polarni rastav** od V. Polarni rastav definira homeomorfizam od $V'(n,k)$ i $V(n,k)\times\mathbb{R}^m$, $m = \binom{k+1}{2}$.

Neka je $\overline{V'}(n,k)$, $1 \le k \le n$, skup svih kompleksnih $n \times k$ matrica s nezavisnim stupcima. Tada se $\overline{V'}(n,k)$ zove **kompleksna opća Stiefelova mnogostrukost**. Slično kao u realnom slučaju zaključujemo da je $\overline{V'}(n,k)$ homogeni prostor dimenzije $2nk$. On je povezan i nije kompaktan. Analogno kao prije definiramo polarni rastav $V = U|V|$ od $V \in \overline{V'}(n,k)$, pa je $\overline{V'}(n,k)$ homeomorfan sa $\overline{V}(n,k) \times \mathbb{R}^{k^2}$.

(4) Grupa $GL_n(\mathbb{R})$ je homeomorfna (ali nije izomorfna!) produktu $\mathbb{R}^* \times SL_n(\mathbb{R})$. Naime, ako je $A = [a_1, \dots, a_n] \in GL_n(\mathbb{R})$ i $\alpha = \det A$ onda je $B = [\frac{1}{\alpha}a_1, a_2, \dots, a_n] \in SL_n(\mathbb{R})$ pa je preslikavanje $A \mapsto (\alpha, B)$ homeomorfizam. Njegov inverz je $(\alpha, B) \mapsto [\alpha b_1, b_2, \dots, b_n]$, za $B = [b_1, \dots, b_n]$. Ovaj homeomorfizam ne čuva množenje matrica tj. nije izomorfizam. Na sličan način je $GL_n(\mathbb{C})$ homeomorfna (ali ne izomorfna!) produktu $\mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C})$.

(5) Grupa $U(n)$ je homeomorfna (ali ne izomorfna!) produktu $U(1) \times SU(n)$ što se provjeri kao u (4), pri čemu je $U(1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ kružnica. Na sličan način je grupa $O(n)$ homeomorfna (ali ne izomorfna!) produktu $O(1) \times SO(n)$, gdje je $O(1) = \{-1, 1\}$ grupa od 2 elementa.

TEOREM 5.21 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $M_k(X)$ skup svih operatora iz $L(X)$ ranga k.*

Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ onda vrijedi:
(1) $M_k(X)$ je homogeni prostor dimenzije $2k(n-k) + k^2$.
(2) $M_k(X)$ je povezan za $k \ne n$ i nije kompaktan za $k \ne 0$.
Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ onda vrijedi:
(3) $M_k(X)$ je homogeni prostor dimenzije $4k(n-k) + 2k^2$.
(4) $M_k(X)$ je povezan i nije kompaktan za $k \ne 0$.

Dokaz Tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj $X = \mathbb{K}^n$ i $1 \le k \le n-1$. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Grupa $GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $M_k(X)$ sa $(A_1, A_2) * B = A_1BA_2^{-1}$. Stabilizator od $B_0 = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je dan sa

$$\left\{ \left(\begin{bmatrix} A & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & A_2 \end{bmatrix} \right); A \in GL_k(\mathbb{R}), A_1, A_2 \in GL_{n-k}(\mathbb{R}) \right\}$$

pa je $M_k(X)$ homogeni prostor dimenzije $2k(n-k) + k^2$. Definiramo preslikavanje $p : V'(n,k) \times V'(n,k) \to M_k(X)$ sa $p(V_1, V_2) = V_1V_2^*$. Tada je p

neprekidno i surjektivno preslikavanje pa je $M_k(X)$ povezan kao slika povezanog prostora $V'(n,k) \times V'(n,k)$, $1 \leq k \leq n-1$.

Zamijetimo da je $M_0(X) = \{0\}$ i $M_n(X) = GL_n(\mathbb{R})$ što znači da $M_n(X)$ nije povezan. Nadalje, $M_k(X)$, $k \geq 1$, nije kompaktan budući da nije ograničen: ako je $A \in M_k(X)$ i $t \in \mathbb{R}^*$ onda je $tA \in M_k(X)$.

Tvrdnje za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dokazuju analogno. Povezanost od $M_k(X)$ slijedi iz povezanosti od $GL_n(\mathbb{C})$. ■

PRIMJERI 5.22

(1) Neka je $P \in G_k(\mathbb{K}^n)$ i $(u_1, \ldots, u_k)$ ortonormirana baza u $\operatorname{im} P$. Tada je $P = u_1 u_1^* + \cdots + u_k u_k^*$, gdje je ab^* matrica ranga 1, za $a, b \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$. Ako stavimo $V = [u_1, \ldots, u_k]$ onda je $V \in V(n,k)$ (odnosno $V \in \overline{V}(n,k)$) i $P = VV^*$. Prema tome preslikavanje $p : V(n,k) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ (odnosno $p : \overline{V}(n,k) \to G_k(\mathbb{C}^n)$), $p(V) = VV^*$, je neprekidno i surjektivno. Nadalje, $p^{-1}(p(V)) = VO(n)$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, i $p^{-1}(p(V)) = VU(n)$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pa je

(a) $\dim V(n,k) = \dim G_k(\mathbb{R}^n) + \dim O(k)$.

(b) $\dim \overline{V}(n,k) = \dim G_k(\mathbb{C}^n) + \dim U(k)$.

Grupa $O(k)$ djeluje na $V(n,k)$ sa $U * V = VU^\tau$, $1 \leq k \leq n$. Djelovanje je neprekidno i nije tranzitivno za $k < n$. Prostor orbita $V(n,k)/O(k)$ je homeomorfan sa $G_k(\mathbb{R}^n)$. Analogna tvrdnja vrijedi za $U(k)$ i $\overline{V}(n,k)$.

(2) Neka je $U \in I_k(\mathbb{K}^n)$, $(u_1, \ldots, u_k)$ ortonormirana baza u $\operatorname{im} U$, $(v_1, \ldots, v_k)$ ortonormirana baza u $\operatorname{im} U^*$ i $Uv_i = u_i$, $i = 1, \ldots, k$. Tada je $U = u_1 v_1^* + \cdots + u_k v_k^*$ suma parcijalnih izometrija ranga 1. Ako stavimo $U_1 = [u_1, \ldots, u_k]$ i $U_2 = [v_1, \ldots, v_k]$ onda su $U_1, U_2 \in V(n,k)$ (odnosno $U_1, U_2 \in \overline{V}(n,k)$) i $U = U_1 U_2^*$. Dakle, preslikavanje $p : V(n,k) \times V(n,k) \to I_k(\mathbb{R}^n)$ (odnosno $p : \overline{V}(n,k) \times \overline{V}(n,k) \to I_k(\mathbb{C}^n)$), $p(U_1, U_2) = U_1 U_2^*$ je neprekidno i surjektivno.

(3) Neka su $\{a_1, \ldots, a_k\}$ i $\{b_1, \ldots, b_k\}$ nezavisni u $\mathbb{K}^n$ i $A = a_1 b_1^* + \cdots + a_k b_k^*$. Tada je $A \in M_k(\mathbb{K}^n)$ operator ranga k, $k = 1, \ldots, n$, i svaki operator ranga k ima ovaj oblik. Ako stavimo $U_1 = [a_1, \ldots, a_k]$ i $U_2 = [b_1, \ldots, b_k]$ onda su U_1 i U_2 iz opće Stiefelove mnogostrukosti i vrijedi $A = U_1 U_2^*$.

TEOREM 5.23 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $M_k^+(X)$ skup svih pozitivnih operatora iz $L(X)$ ranga k. Tada je $M_k^+(X)$ homogeni prostor i vrijedi:*

(1) $\dim M_k^+(X) = k(n-k) + \binom{k+1}{2}$, *za* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(2) $\dim M_k^+(X) = 2k(n-k) + k^2$, *za* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(3) $M_k^+(X)$ *je povezan i nije kompaktan za* $k \neq 0$.

(4) $M_n^+(X)$ *je homeomorfan sa* $\mathbb{R}^m$, $m = \binom{n+1}{2}$, *za* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(5) $M_n^+(X)$ *je homeomorfan sa* $\mathbb{R}^{n^2}$, *za* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dokaz Tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj $X = \mathbb{K}^n$. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Grupa $GL_n(\mathbb{R})$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $M_k^+(X)$ sa $A*B = ABA^*$. Stabilizator od $B_0 \in M_k^+(X)$ je dan sa

$$\left\{ \begin{bmatrix} U & * \\ 0 & A \end{bmatrix}; U \in O(k), A \in GL_{n-k}(\mathbb{R}) \right\}, \; B_0 = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

što znači da je $M_k^+(X)$ homogeni prostor dimenzije $n^2 - \binom{k}{2} - n(n-k) = k(n-k) + \binom{k+1}{2}$. Zamijetimo da je $M_n^+(X)$ homeomorfan sa $\mathbb{R}^m$, $m = \binom{n+1}{2}$, pa je povezan i nije kompaktan. Ako je $1 \leq k \leq n-1$ i $p : V'(n,k) \to M_k^+(X)$, $p(V) = VV^*$, onda je p neprekidan i surjektivan, što znači da je $M_k^+(X)$ povezan i nije kompaktan budući da nije ograničen.

Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ onda se tvrdnje dokazuju analogno, dok povezanost od $M_k^+(X)$ slijedi iz povezanosti od $GL_n(\mathbb{C})$.

U slučaju $k = n$ je stabilizator od $B_0 = I$ jednak $O(n)$ (odnosno $U(n)$) iz čega slijede dvije posljednje tvrdnje. ■

PRIMJERI 5.24

(1) Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $G_k^\$(X)$ skup svih potprostora od X dimenzije k. Tada na $G_k^\$(X)$ postoji jedinstvena struktura mnogostrukosti takva da je $G_k^\$(X)$ homeomorfan sa $G_k(X)$. Naime, ako je $Y \in G_k^\$(X)$ i P projektor na Y onda je preslikavanje $Y \mapsto P$ bijekcija od $G_k^\$(X)$ i $G_k(X)$. Inverz ovog preslikavanja je $P \mapsto \operatorname{im} P$. Sada ovom bijekcijom preselimo strukturu mnogostrukosti sa $G_k(X)$ na $G_k^\$(X)$.
(2) Neka je $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = Ax + a$, gdje je $A \in gl_n(\mathbb{K})$ i $a \in \mathbb{K}^n$. Tada se φ zove afino preslikavanje. Afino preslikavanje je bijekcija ako i samo ako je $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Skup svih afinih preslikavanja $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ označavamo sa $ga_n(\mathbb{K})$, dok skup svih afinih bijekcija označavamo sa $GA_n(\mathbb{K})$. Tada je $GA_n(\mathbb{K})$ grupa uz kompoziciju i zovemo je **opća afina grupa**, dok je $ga_n(\mathbb{K})$ Liejeva algebra uz komutator i ona je **Liejeva algebra od** $GA_n(\mathbb{K})$. Preslikavanje

$$\varphi \mapsto \begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

je monomorfizam grupa pa zaključujemo da je $GA_n(\mathbb{K})$ izomorfna zatvorenoj podgrupi od $GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Nadalje, $GA_n(\mathbb{K})$ je topološka grupa i mnogostrukost dimenzije $n^2 + n$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, odnosno $2n^2 + 2n$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Analogno kao za linearne grupe uvodimo podgrupe od $GA_n(\mathbb{K})$, npr. **specijalnu afinu grupu** $SA_n(\mathbb{K}) = \{\varphi \in GA_n(\mathbb{K}); \det A = 1\}$, **ortogonalnu afinu grupu** $OA(n) = \{\varphi \in GA_n(\mathbb{R}); AA^* = I\}$ koju također zovemo **grupa izometrija**

od $\mathbb{R}^n$, **unitarnu afinu grupu** $UA(n) = \{\varphi \in GA_n(\mathbb{C}); AA^* = I\}$ koju također zovemo **grupa izometrija od** $\mathbb{C}^n$ itd.

Zamijetimo da je $GA_n(\mathbb{K})$ homeomorfna (ali nije izomorfna!) produktu $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$, a homeomorfizam je dan sa $\varphi \mapsto (A, a)$.

(3) Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $G_k'(X)$ skup svih operatora $A \in L(X)$ ranga k, za koje vrijedi $A^2 = A$. Tada se $G_k'(X)$ zove k-ti **opći Grassmannian** od X. Vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) Ako je $A \in G_k'(X)$ onda je A poluprost i sličan projektoru.

(b) Grupa G svih regularnih operatora iz $L(X)$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $G_k'(X)$ sa $A * P = APA^{-1}$.

(c) Stabilizator od $P \in G_k'(X)$ je izomorfan sa $GL_k(\mathbb{K}) \times GL_{n-k}(\mathbb{K})$.

(d) $G_k'(X)$ je homeomorfan sa $GL_n(\mathbb{K})/GL_k(\mathbb{K}) \times GL_{n-k}(\mathbb{K})$.

(e) $\dim G_k'(X) = 2k(n-k)$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(f) $\dim G_k'(X) = 4k(n-k)$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(g) $G_0'(X) = \{0\}$, $G_n'(X) = \{I\}$

(h) $G_k'(X)$ je povezan i nije kompaktan za $k \neq 0, n$.

(i) Preslikavanje $P \mapsto I - P$ je homeomorfizam od $G_k'(X)$ i $G_{n-k}'(X)$.

(j) $G_k'(X)$ je homeomorfan sa $G_k(X) \times \mathbb{R}^{k(n-k)}$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(k) $G_k'(X)$ je homeomorfan sa $G_k(X) \times \mathbb{R}^{2k(n-k)}$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(l) Ako je $S = 2P - I$ i $\Psi : G_k'(X) \to G_k'(X)$,

$$\Psi(P) = (I + S^*S)^{1/2} P (I + S^*S)^{-1/2}$$

onda je $\Psi(P)^* = \Psi(P)$ tj. $\Psi(G_k'(X)) = G_k(X)$. Nadalje, $\Psi(P) = P$, za $P \in G_k(X)$. Preslikavanje Ψ zovemo **retrakcija**.

(4) Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i M' skup svih operatora $A \in L(X)$ za koje vrijedi:

(a) $\mu_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ različiti i $m \geq 2$.

(b) $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_m)^{n_m}$, $n_1 + \cdots + n_m = n$.

Nadalje, neka je $M = \{A \in M'; A \text{ normalan}\}$. Tada vrijedi:

(c) M' je homeomorfan sa $GL_n(\mathbb{K})/GL_{n_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times GL_{n_m}(\mathbb{K})$.

(d) Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ onda je M kompaktan i povezan homogeni prostor homeomorfan sa $O(n)/O(n_1) \times \cdots \times O(n_m)$.

(e) Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ onda je M kompaktan i povezan homogeni prostor homeomorfan sa $U(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_m)$.

(5) Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i M skup svih normalnih operatora $A \in L(X)$ za koje vrijedi $A^2 = I$. Ako je $A \in M$ onda vrijedi:

(a) A je unitaran i hermitski.

(b) Ako je $A \neq I$ onda je $\mu_A(x) = x^2 - 1$.

(c) $P = \frac{1}{2}(I + A)$ je projektor tj. $P \in G(X)$.

(d) Ako je $M_k = \{A \in M; \operatorname{tr} A = 2k - n\}$ onda je $M_k = 2G_k(X) - I$.

(e) M_k je kompaktan i povezan homogeni prostor homeomorfan sa $G_k(X)$.
(f) $M = M_0 \cup M_1 \cup \cdot \cdot \cup M_n$.
(g) $M = 2G(X) - I$.

(6) Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $G_k^a(X)$ skup svih afinih preslikavanja

$$\varphi_{P,a} : X \to X, \quad \varphi_{P,a}(x) = Px + a$$

gdje je $P \in G_k(X)$ i $a \in \ker P$. Tada se $G_k^a(X)$ zove k-**ti afini Grassmannian** od X. Preslikavanje $\varphi_{P,a}$ se zove **afini projektor** na ravninu $\Pi = a + \operatorname{im} P$. Vrijede sljedeće tvrdnje:
(a) $G_k^a(X)$ je homeomorfan sa $G_k(X) \times \mathbb{R}^{n-k}$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
(b) $G_k^a(X)$ je homeomorfan sa $G_k(X) \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
pri čemu je homeomorfizam, u oba slučaja, zadan sa $\varphi_{P,a} \mapsto (P, a)$.
(c) Definiramo preslikavanje $\psi : G_k^a(\mathbb{K}^n) \to G_{k+1}(\mathbb{K}^{n+1})$ sa

$$\psi(\varphi_{P,a}) = \frac{1}{1 + \|a\|^2} \begin{bmatrix} (1 + \|a\|^2)P + aa^* & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$$

Tada je ψ neprekidno i injektivno, ali nije surjektivno preslikavanje. Nadalje, $\psi(G_k^a(X))$ je otvoren podskup u $G_{k+1}(\mathbb{K}^{n+1})$ i

$$\psi(G_k^a(X)) = \{P \in G_{k+1}(\mathbb{K}^{n+1}); Pe_{n+1} \neq 0\}$$

5.3 Simplektičke strukture

PROPOZICIJA 5.25 *Neka je J konjugiranje na $\mathbb{C}^n$. Tada vrijedi:*
(1) *Postoji jedinstvena matrica $A \in GL_n(\mathbb{C})$ takva da je $A\overline{A} = I$ i $Jz = A\overline{z}$, za svaki $z \in \mathbb{C}^n$.*
(2) *Ako je $A \in GL_n(\mathbb{C})$ i $A\overline{A} = I$ onda postoji $T \in GL_n(\mathbb{R})$ takva da je $A = \exp(iT)$.*
(3) *Ako je $Jz = \exp(iT)\overline{z}$, $z \in \mathbb{C}^n$, onda je J normalno konjugiranje ako i samo ako je T simetrična matrica.*

Dokaz (1) Svaki antilinearni operator J na $\mathbb{C}^n$ ima oblik $J = AJ_0$, gdje je $A \in GL_n(\mathbb{C})$ i J_0 standardno konjugiranje na $\mathbb{C}^n$ tj. $J_0 z = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Sada iz $J^2 = I$ slijedi $A\overline{A} = I$.
(2) Neka je $A = A_1 + iA_2 \in GL_n(\mathbb{C})$, $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$. Tada je relacija $A\overline{A} = I$ ekvivalentna sa $A_1A_2 = A_2A_1$ i $A_1^2 + A_2^2 = I$ pa postoji $T \in GL_n(\mathbb{R})$ takva da je $A_1 = \cos T$ i $A_2 = \sin T$ tj. $A = \exp(iT)$.
(2) J je normalno konjugiranje ako i samo ako je $(Jz|Jw) = (w|z)$, za svaki $z, w \in \mathbb{C}^n$, a ovo je ekvivalentno simetričnosti od T. ■

TEOREM 5.26 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{C}$ dimenzije n, $J'(X)$ skup svih konjugiranja na X i $J(X)$ skup svih normalnih konjugiranja na X. Tada vrijedi:*

(1) *$J'(X)$ je povezan homogeni prostor dimenzije n^2, homeomorfan prostoru $GL_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{R})$.*

(2) *$J(X)$ je kompaktan i povezan homogeni prostor dimenzije $\binom{n+1}{2}$, homeomorfan sa $U(n)/O(n)$.*

(3) *Ako je $n \geq 2$ onda $J'(X)$ nije kompaktan.*

(4) *$J'(X)$ je homeomorfan sa $J(X) \times \mathbb{R}^m$, $m = \binom{n}{2}$.*

(5) *Ako je $n = 1$ onda je $J'(X) = J(X)$.*

Dokaz Tvrdnje je dovoljno dokazati za $X = \mathbb{C}^n$. Grupa $GL_n(\mathbb{C})$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $J'(X)$ sa $A * J = AJA^{-1}$. Stabilizator standardnog konjugiranja J_0 je jednak $GL_n(\mathbb{R})$. Povezanost od $J'(X)$ slijedi iz povezanosti od $GL_n(\mathbb{C})$ pa smo time dokazali (1). Nadalje, grupa $U(n)$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $J(X)$ sa $U * J = UJU^*$. Stabilizator standardnog konjugiranja J_0 je jednak $O(n)$. Kompaktnost i povezanost od $J(X)$ slijedi iz kompaktnosti i povezanosti od $U(n)$, pa slijedi (2). Po prethodnoj propoziciji je $J'(X)$ homeomorfan sa $\{\exp iT; T \in GL_n(\mathbb{R})\}$, a ovaj skup nije kompaktan, za $n \geq 2$, budući da nije ograničen. Budući da je $GL_n(\mathbb{C})$ homeomorfna sa $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, a $GL_n(\mathbb{R})$ sa $O(n) \times \mathbb{R}^s$, $s = \binom{n+1}{2}$, zaključujemo da je $J'(X)$ homeomorfan sa $J(X) \times \mathbb{R}^{n^2-s}$. (5) slijedi iz (4). ■

PROPOZICIJA 5.27 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $2n$ i $K'(X) = \{K \in L(X); K^2 = -I\}$. Ako je $K \in K'(X)$ i $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ onda definiramo množenje s kompleksnim skalarom sljedećom formulom*

$$\lambda \cdot x = (\lambda_1 I + \lambda_2 K)x, \;\; x \in X$$

Tada X postaje vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, s ovim množenjem sa skalarom, i označavamo ga sa X_K. Za njega vrijedi $\dim X_K = \dim X$.

Kažemo da $K \in K'(X)$ definira ***kompleksnu strukturu na realnom prostoru*** *X, a kompleksni vektorski prostor X_K zovemo* ***simplektička kompleksifikacija*** *od X.*

Dokaz Za X_K se neposredno provjere aksiomi vektorskog prostora, pa je X_K vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Zamijetimo da su po definiciji X i X_K jednaki kao skupovi, operacija zbrajanja je ista u X i u X_K, a razlikuju se samo operacije množenja sa skalarom. Nadalje, restrikcija na $\mathbb{R}$ nove operacije množenja s kompleksnim skalarom je jednaka staroj operaciji množenja s realnim skalarom. ■

PROPOZICIJA 5.28 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $2n$, $K'(X)$ i X_K iz prethodne propozicije i $K(X)$ skup svih normalnih operatora iz $K'(X)$. Ako je $K \in K(X)$ onda je formulom*

$$(x|y)_K = (x|y) + i(x|Ky), \ \ x, y \in X$$

definiran skalarni produkt na X_K, pri čemu je $(x|x)_K = (x|x)$, $x \in X$.

Nadalje, vrijedi:

(1) $L(X_K) = \{A \in L(X); AK = KA\}$

(2) $L^a(X_K) = \{A \in L(X); AK = -KA\}$

(3) $L(X) = L^*(X_K) = L(X_K) + L^a(X_K)$

(4) $J'(X_K) = \{J \in L(X); JK = -KJ, \ J^2 = I\}$

(5) $J(X_K) = \{J \in J'(X_K); (Jx|Jy) = (x|y), \ x, y \in X\}$

(6) *Restrikcija operacije adjungiranja iz $L(X)$ na $L(X_K)$ je jednaka operaciji adjungiranja na $L(X_K)$.*

Dokaz Ako je $K \in K(X)$ onda je K antisimetričan i ortogonalan operator, $\sigma(K) = \{i, -i\}$, $\mu_K(x) = x^2 + 1$ i $p_K(x) = (x^2 + 1)^n$. Aksiomi skalarnog produkta za $(.|.)_K$ se provjere neposredno, koristeći antisimetričnost od K. Neka je $A \in L(X)$. Tada je $A \in L(X_K)$ ako i samo ako je $A(i \cdot x) = i \cdot Ax$, $x \in X$, tj. $AKx = KAx$, $x \in X$, pa smo dokazali (1), dok se (2) dokazuje analogno. Preostale tvrdnje slijede iz (1) i (2). ∎

TEOREM 5.29 *Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $2n$. Tada vrijedi:*

(1) *$K'(X)$ je homogeni prostor dimenzije $2n^2$, homeomorfan homogenom prostoru $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$.*

(2) *$K'(X)$ nije kompaktan i ima dvije komponente.*

(3) *$K(X)$ je homogeni prostor dimenzije $n(n-1)$, homeomorfan prostoru $O(2n)/U(n)$.*

(4) *$K(X)$ je kompaktan i ima dvije komponente.*

(5) *$K'(X)$ je homeomorfan sa $K(X) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$.*

Dokaz Tvrdnju je dovoljno dokazati za $X = \mathbb{R}^{2n}$. Grupa $GL_{2n}(\mathbb{R})$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $K'(X)$ sa $A * K = AKA^{-1}$. Stabilizator je izomorfan sa $GL_n(\mathbb{C})$. Naime, stabilizator od $K_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ je dan sa

$$GL_{2n}(\mathbb{R})_{K_0} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}; A_1, A_2 \in gl_n(\mathbb{R}), \ \det(A_1 + iA_2) \neq 0 \right\}$$

i jednak je $\Phi(GL_n(\mathbb{C}))$, gdje je Φ operator J_0-dekompleksifikacije iz 1.16. Dakle, $K'(X)$ je homogeni prostor i $\dim K'(X) = 4n^2 - 2n^2 = 2n^2$. Ako je $A \in GL_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica onda je $K = \begin{bmatrix} 0 & -A^{-1} \\ A & 0 \end{bmatrix} \in K'(X)$ i $\|K\| = \max\{\|A\|, \|A^{-1}\|\}$, što znači da $\|K\|$ može biti po volji velika, iz čega slijedi da $K'(X)$ nije kompaktan prostor. Budući da grupa $GL_{2n}(\mathbb{R})$ ima dvije komponente, a stabilizator je povezan, zaključujemo da $K'(X)$ također ima dvije komponente.

Grupa $O(2n)$ djeluje neprekidno i tranzitivno na $K(X)$ sa $U*K = UKU^*$. Stabilizator od K_0 je dan sa

$$O(2n)_{K_0} = \left\{ \begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix}; U_1, U_2 \in gl_n(\mathbb{R}),\ U_1 + iU_2 \in U(n) \right\}$$

i jednak je $\Phi(U(n))$. Dakle, $K(X)$ je homogeni prostor i $\dim K(X) = \binom{2n}{2} - n^2 = n(n-1)$. Kompaktnost od $K(X)$ slijedi iz kompaktnosti od $O(2n)$. Budući da $O(2n)$ ima dvije komponente, a stabilizator $U(n)$ je povezan, zaključujemo da $K(X)$ također ima dvije komponente. Posljednja tvrdnja slijedi iz (1) i (3). Ako je $n = 1$ onda je $K(X) = \{K_0, -K_0\}$. ■

PRIMJERI 5.30

(1) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ neparne dimenzije. Tada je $K'(X)$ prazan skup tj. ne postoji $K \in L(X)$ takav da je $K^2 = -I$, što znači da na X nema niti jedne kompleksne strukture.
(2) Neka je $\Phi : gl_n(\mathbb{C}) \to gl_{2n}(\mathbb{R})$ operator J_0-dekompleksifikacije

$$\Phi(A_1 + iA_2) = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

Tada vrijedi:
(a) Φ je injektivan i $\mathbb{R}$-linearan.
(b) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$, $\Phi(A^*) = \Phi(A)^\tau$
(c) $\Phi(iI) = K_0$
(d) $\sigma(\Phi(A)) = \sigma(A) \cup \overline{\sigma(A)}$
(e) $\Phi(f(A)) = f(\Phi(A))$, $f \in \mathbb{R}[x]$
(f) $\det \Phi(A) = |\det A|^2$
(g) $\Phi(|A|) = |\Phi(A)|$, $\|\Phi(A)\| = \|A\|$, $\rho(\Phi(A)) = \rho(A)$
(h) Ako je $X = \mathbb{R}^{2n}$ onda je $K_0 \in K(X)$ i $J_0 \in J(X)$. Nadalje, vrijedi

$$L(X_{K_0}) = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}; A_1, A_2 \in gl_n(\mathbb{R}) \right\}$$

$$L^a(X_{K_0}) = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 \end{bmatrix}; A_1, A_2 \in gl_n(\mathbb{R}) \right\}$$

(3) Neka je $Sp(n)$ skup svih $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ takvih da je $A^\tau K_0 A = K_0$, gdje je K_0 iz (2). Tada je $Sp(n)$ zatvorena podgrupa od $GL_{2n}(\mathbb{R})$ i zovemo je **simplektička grupa**. Vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) Liejeva algebra od $Sp(n)$ je $sp(n) = \{A \in gl_{2n}(\mathbb{R}); A^\tau K_0 + K_0 A = 0\}$.

(b) $A \in sp(n)$ ako i samo ako je $K_0 A$ simetrična matrica, što znači da je $K_0 \cdot sp(n)$ jednak skupu svih simetričnih matrica iz $gl_{2n}(\mathbb{R})$.

(c) $\dim Sp(n) = 2n^2 + n$

(d) $Sp(n)$ je povezana i nije kompaktna.

(e) $\Phi(U(n)) = Sp(n) \cap O(2n)$

(4) Neka je X euklidski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $2n$, $K \in K(X)$ i $b : X \times X \to \mathbb{R}$, $b(x,y) = (x|Ky)$. Tada se b zove **simplektička forma** na X, a uređeni par (X, b) se zove **simplektički prostor**. Kažemo da $A \in L(X)$ **čuva simplektičku formu** ako vrijedi $b(Ax, Ay) = b(x, y)$, $x, y \in X$. Skup svih operatora koji čuvaju simplektičku formu označavamo sa $Sp(X, b)$.

(a) $Sp(X, b)$ je grupa i zovemo je **simplektička grupa** od (X, b).

(b) $Sp(X, b) = \{A \in L(X); A^*KA = K\}$

(c) $Sp(X, b_1)$ je izomorfna sa $Sp(X, b_2)$, za svake dvije simplektičke forme.

(d) $Sp(X, b)$ je izomorfna sa $Sp(n)$.

(e) Liejeva algebra od $Sp(X, b)$ je $sp(X, b) = \{A \in L(X); A^*K + KA = 0\}$. Ako je $A \in sp(X, b)$ onda se A zove **Hamiltonian**.

Poglavlje 6

Tenzorski produkti

Vektorski prostori koje promatramo u ovom poglavlju su konačno dimenzionalni, ako nije rečeno drukčije.

DEFINICIJA 6.1 *Neka su $X_1, \ldots, X_k$, $k \in \mathbb{N}$, vektorski prostori nad $\mathbb{K}$. Tada se vektorski prostor $L(X_1^*, \ldots, X_k^*, \mathbb{K})$ svih multilinearnih funkcionala $z : X_1^* \times \cdots \times X_k^* \to \mathbb{K}$ zove* ***tenzorski produkt*** *prostora $X_1, \ldots, X_k$ i za njega uvodimo oznaku $X_1 \otimes \cdots \otimes X_k$. Svaki element ovog prostora zovemo* ***tenzor****. Ako je $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, k$, onda se multilinearni funkcional $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ definiran sa*

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)(f_1, \ldots, f_k) = f_1(x_1) \cdots f_k(x_k), \; f_i \in X_i^*$$

zove ***tenzorski produkt*** *vektora $x_1, \ldots, x_k$. Ako su svi vektori $x_i \neq 0$ onda se $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ zove* ***tenzor ranga*** 1.

PROPOZICIJA 6.2 *Neka su $X_1, \ldots, X_k$ vektorski prostori nad $\mathbb{K}$ i $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, k$. Tada vrijedi:*

(1) *Tenzorski produkt vektora je asocijativan.*

(2) *Tenzorski produkt vektora je linearan po svakoj varijabli.*

(3) $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k = 0$ *ako i samo ako je* $x_i = 0$, *za neki* i.

Dokaz Slijedi neposredno iz definicije. ■

PROPOZICIJA 6.3 *Neka su $X_1, \ldots, X_k$ vektorski prostori nad $\mathbb{K}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\dim X_1 \otimes \cdots \otimes X_k = \dim X_1 \cdots \dim X_k$

(2) $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_k)^* = X_1^* \otimes \cdots \otimes X_k^*$

(3) $X \otimes \mathbb{K} = \mathbb{K} \otimes X = X$

(4) *Ako je $X_i = X$, za svaki i, onda se $X_1 \otimes \cdots \otimes X_k$ označava sa $\otimes_k X$ i za njega vrijedi $(\otimes_k X) \otimes (\otimes_m X) = \otimes_{k+m} X$. Uvodimo posebne oznake $\otimes_0 X = \mathbb{K}$ i $\otimes_1 X = X$.*

Dokaz (1) Neka je $e^{(i)} = (e_1^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)})$ baza u X_i, $i = 1, \ldots, k$. Neposredno se provjeri da je

$$e^{(1)} \otimes \cdots \otimes e^{(k)} = \{e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^{(k)}; i_1 = 1, \ldots, n_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n_k\}$$

baza u $X_1 \otimes \cdots \otimes X_k$, iz čega slijedi $\dim X_1 \otimes \cdots \otimes X_k = \dim X_1 \cdots \dim X_k$. (2) Slijedi iz definicije. (3) Preslikavanja $x \otimes \alpha \mapsto \alpha \otimes x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$, su izomorfizmi pa identificiramo ova tri prostora. Posljednja tvrdnja je evidentna. ■

DEFINICIJA 6.4 *Neka su $X_1, \ldots, X_k$ i $Y_1, \ldots, Y_k$vektorski prostori nad $\mathbb{K}$ i $A_i \in L(X_i, Y_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Definiramo operator $A_1 \otimes \cdots \otimes A_k$ sa $X_1 \otimes \cdots \otimes X_k$ u $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k$ prvo na tenzorima ranga 1 formulom*

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_k)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = A_1 x_1 \otimes \cdots \otimes A_k x_k$$

*a onda ga proširujemo po linearnosti na cijeli prostor. Ovaj operator zovemo **tenzorski produkt operatora** A_i, $i = 1, \ldots, k$.*

PROPOZICIJA 6.5 *Ako su $A_i \in L(X_i, Y_i)$ i $B_i \in L(Y_i, Z_i)$, $i = 1, \ldots, k$, onda vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_k) = B_1 A_1 \otimes \cdots \otimes B_k A_k$

(2) *Ako je $X_i = X$, $Y_i = Y$ i $A_i = A$, $B_i = B$, za svaki i, onda se $A_1 \otimes \cdots \otimes A_k$ označava sa $\otimes_k A$ i vrijedi $(\otimes_k B)(\otimes_k A) = \otimes_k BA$ i $\otimes_k \alpha A = \alpha^k \otimes_k A$. Uvodimo posebne oznake $\otimes_0 A = 1$ i $\otimes_1 A = A$.*

(3) $L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_k, Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k) = L(X_1, Y_1) \otimes \cdots \otimes L(X_k, Y_k)$.

Dokaz (1) Lijeva i desna strana su jednake na tenzorima ranga 1, a onda i na cijelom prostoru. (2) Ovo je specijalni slučaj od (1). (3) Ova dva prostora imaju istu dimenziju, a desni je sadržan u lijevom pa su jednaki. ■

PROPOZICIJA 6.6 (1) *$X \otimes Y$ je kanonski izomorfan sa $L(Y^*, X)$ i sa $L(X^*, Y)$.*

(2) *$X \otimes X^*$ je kanonski izomorfan sa $L(X)$ i sa $L(X^*)$.*

(3) *$X_1 \otimes X_2 \otimes X_3$ je kanonski izomorfan sa $L(X_3^*, L(X_2^*, X_1))$, a također i sa $L(X_1^*, L(X_2^*, X_3))$.*

Dokaz (1) Neka je $\Phi : X \otimes Y \to L(Y^*, X)$, $\Phi(x \otimes y)f = f(y)x$, $x \in X$, $y \in Y$, $f \in Y^*$, proširen po linearnosti na $X \otimes Y$. Tada je Φ izomorfizam vektorskih prostora i on ne zavisi od baze tj. Φ je kanonski izomorfizam. U drugom slučaju definiramo Φ sa $\Phi(x \otimes y)f = f(x)y$, $x \in X$, $y \in Y$, $f \in X^*$. (2) i (3) slijede iz (1). ■

TEOREM 6.7 *Ako je $A \in L(X)$ i $B \in L(Y)$ onda vrijedi:*

(1) *Ako su A i B poluprosti (odnosno nilpotentni, unipotentni) onda je $A \otimes B$ poluprost (odnosno nilpotentan, unipotentan).*

(2) *Ako su $A = P_1 + N_1$ i $B = P_2 + N_2$ Jordanovi rastavi onda je $A \otimes B = P_1 \otimes P_2 + N$ Jordanov rastav, gdje je $N = P_1 \otimes N_2 + N_1 \otimes P_2 + N_1 \otimes N_2$ nilpotentni dio od $A \otimes B$.*

(3) $\sigma(A \otimes B) = \sigma(A)\sigma(B) = \{\lambda_1\lambda_2; \lambda_1 \in \sigma(A), \lambda_2 \in \sigma(B)\}$

(4) $\operatorname{tr} A \otimes B = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$

(5) $\det A \otimes B = (\det A)^m (\det B)^n$, $n = \dim X$, $m = \dim Y$

(6) $\operatorname{tr} \otimes_k A = (\operatorname{tr} A)^k$

(7) $\det \otimes_k A = (\det A)^\alpha$, *gdje je* $\alpha = kn^{k-1}$

Dokaz Ako se A dijagonalizira u bazi e, a B u bazi u onda se $A \otimes B$ dijagonalizira u bazi $e \otimes u$, a dijagonalni elementi su produkti dijagonalnih elemenata od A i B. Budući da je $(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k$ zaključujemo da je $A \otimes B$ nilpotentan čim je A nilpotentan ili B nilpotentan. Time smo dokazali (1), (2) i (3). Preostale tvrdnje slijede iz (3). ■

6.1 Simetrični i antisimetrični produkti

DEFINICIJA 6.8 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n, σ permutacija skupa $\{1, \ldots, k\}$ i ε_σ predznak od σ. Definiramo operatore $\mathcal{P}(\sigma)$, $\mathcal{S}_k$ i $\mathcal{A}_k$ iz $L(\otimes_k X)$ sa: $\mathcal{P}(\sigma)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(k)}$ i*

$$\mathcal{S}_k = \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma \mathcal{P}(\sigma), \quad \mathcal{A}_k = \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \mathcal{P}(\sigma)$$

Tada se operator $\mathcal{S}_k$ zove ***operator simetrizacije****, dok se operator $\mathcal{A}_k$ zove* ***operator antisimetrizacije*** *na $\otimes_k X$. Tenzor z se zove* ***simetrični tenzor*** *ako vrijedi $\mathcal{S}_k z = z$. Vektorski podprostor svih simetričnih tenzora iz $\otimes_k X$ označavamo sa $\odot_k X$. Tenzor z se zove* ***antisimetrični tenzor*** *ako vrijedi $\mathcal{A}_k z = z$. Vektorski podprostor svih antisimetričnih tenzora iz $\otimes_k X$ označavamo sa $\wedge_k X$. Uvodimo posebne oznake $\odot_0 X = \wedge_0 X = \mathbb{K}$ i $\odot_1 X = \wedge_1 X = X$.*

Operator $\mathcal{N}_k = I - \mathcal{S}_k - \mathcal{A}_k$, $k \geq 2$, se zove ***operator asimetrizacije*** *na $\otimes_k X$. Tenzor z se zove* ***asimetrični tenzor*** *ako vrijedi $\mathcal{N}_k z = z$. Vektorski podprostor svih asimetričnih tenzora iz $\otimes_k X$ označavamo sa $\nabla_k X$.*

PROPOZICIJA 6.9 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\mathcal{P}(\sigma\sigma') = \mathcal{P}(\sigma)\mathcal{P}(\sigma')$

(2) $\mathcal{P}(\sigma) \otimes_k A = (\otimes_k A)\mathcal{P}(\sigma)$, $A \in L(X)$

(3) $\mathcal{P}(\sigma)\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_k\mathcal{P}(\sigma) = \mathcal{S}_k$

(4) $\mathcal{P}(\sigma)\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k\mathcal{P}(\sigma) = \varepsilon_\sigma \mathcal{A}_k$
(5) $\mathcal{S}_k^2 = \mathcal{S}_k$, $\mathcal{A}_k^2 = \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_k\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_k\mathcal{A}_k = 0$, $k \geq 2$
(6) $\mathcal{N}_k^2 = \mathcal{N}_k$, $\mathcal{N}_k\mathcal{A}_k = \mathcal{N}_k\mathcal{S}_k = 0$, $k \geq 2$

Dokaz (1) i (2): Lijeva i desna strana su jednake na tenzorima ranga 1, a onda i na cijelom prostoru. (3) i (4) slijede iz (1), dok (5) slijedi iz (3) i (4) sumiranjem po σ. (6) slijedi iz (5). ■

DEFINICIJA 6.10 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $x_1, \ldots, x_k \in X$.*
(1) *Tenzor $x_1 \odot \cdots \odot x_k = \mathcal{S}_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ se zove* ***simetrični produkt*** *vektora $x_1, \ldots, x_k \in X$.*
(2) *Tenzor $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = \mathcal{A}_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ se zove* ***antisimetrični produkt*** *vektora $x_1, \ldots, x_k \in X$.*

PROPOZICIJA 6.11 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
(1) $\dim \otimes_k X = n^k$
(2) $\dim \odot_k X = \binom{n+k-1}{k}$
(3) $\dim \wedge_k X = \binom{n}{k}$
(4) $\dim \nabla_k X = n^k - \binom{n+k-1}{k} - \binom{n}{k}$, $k \geq 2$
(5) $\otimes_k X = \odot_k X \dot{+} \wedge_k X \dot{+} \nabla_k X$, $k \geq 2$
(6) $\nabla_2 X = \{0\}$ *i* $\wedge_k X = \{0\}$, *za* $k > n$
(7) *Ako je $n = 1$ onda je $\otimes_k X = \odot_k X$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza od X. Tada je

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n\}$$

baza od $\otimes_k X$ pa je $\dim \otimes_k X = n^k$. Baza od $\odot_k X$ je

$$\{e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n, \ i_1 \leq \cdots \leq i_k\}$$

pa je $\dim \odot_k X = \binom{n+k-1}{k}$. Nadalje, baza od $\wedge_k X$ je

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n, \ i_1 < \cdots < i_k\}$$

pa je $\dim \wedge_k X = \binom{n}{k}$. Baze od $\odot_k X$ i $\wedge_k X$ smo dobili preslikavajući bazu od $\otimes_k X$ operatorima $\mathcal{S}_k$ i $\mathcal{A}_k$ pri čemu smo izbacili nulu, naime ovi operatori ponište neke bazne elemente. Time smo dokazali (1),...,(4). Tvrdnja (5) slijedi iz prethodne propozicije (iz (5) i (6)). (6) i (7) slijede iz (1),...,(5). ■

PROPOZICIJA 6.12 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ i $f_1, \ldots, f_k \in X^*$. Tada vrijedi:*

(1) $(x_1 \odot \cdots \odot x_k)(f_1, \ldots, f_k) = \frac{1}{k!} \operatorname{per}[f_i(x_j)]$

(2) $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)(f_1, \ldots, f_k) = \frac{1}{k!} \det[f_i(x_j)]$

(3) $x_1 \odot \cdots \odot x_k = 0$ *ako i samo ako je* $x_i = 0$, *za neki* i.

(4) $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = 0$ *ako i samo ako su* $x_1, \ldots, x_k$ *zavisni.*

(5) $x_1 \odot \cdots \odot x_k$ *je invarijantan na permutacije.*

(6) $x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(k)} = \varepsilon_\sigma \cdot x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$

Dokaz (1) Imamo

$$\begin{aligned}(x_1 \odot \cdots \odot x_k)(f_1, \ldots, f_k) &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(k)}(f_1, \ldots, f_k) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma f_1(x_{\sigma^{-1}(1)}) \cdots f_k(x_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma f_1(x_{\sigma(1)}) \cdots f_k(x_{\sigma(k)}) = \tfrac{1}{k!} \operatorname{per}[f_i(x_j)]\end{aligned}$$

(2) Analogno kao (1). Tvrdnje (3) i (4) slijede iz (1) i (2), dok (5) i (6) slijede iz $\mathcal{P}(\sigma)\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_k$ i $\mathcal{P}(\sigma)\mathcal{A}_k = \varepsilon_\sigma \mathcal{A}_k$. ■

LEMA 6.13 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n, $A \in L(X)$ i $k \geq 2$. Tada su podprostori $\odot_k X$, $\wedge_k X$ i $\nabla_k X$ invarijantni na $\otimes_k A$.*

Restrikcije operatora $\otimes_k A$ na $\odot_k X$, $\wedge_k X$ i $\nabla_k X$ označavamo redom sa $\odot_k A$, $\wedge_k A$ i $\nabla_k A$. Uvodimo dodatne oznake $\odot_0 A = 1$, $\odot_1 A = A$, $\wedge_0 A = 1$ i $\wedge_1 A = A$. Zamijetimo da je $\nabla_2 A = 0$, $\wedge_k A = 0$, za $k > n$, i vrijedi jednakost $\otimes_k A = \odot_k A \dotplus \wedge_k A \dotplus \nabla_k A$, $k \geq 2$.

Dokaz Budući da je $\mathcal{P}(\sigma) \otimes_k A = (\otimes_k A)\mathcal{P}(\sigma)$, za svaku permutaciju σ, zbrajanjem po σ dobijemo $\mathcal{A}_k \otimes_k A = (\otimes_k A)\mathcal{A}_k$ i $\mathcal{S}_k \otimes_k A = (\otimes_k A)\mathcal{S}_k$, a onda i $\mathcal{N}_k \otimes_k A = (\otimes_k A)\mathcal{N}_k$. Sada tvrdnja slijedi iz $\odot_k X = \operatorname{im} \mathcal{S}_k$, $\wedge_k X = \operatorname{im} \mathcal{A}_k$ i $\nabla_k X = \operatorname{im} \mathcal{N}_k$. ■

PROPOZICIJA 6.14 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ i $A, B \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) $(\odot_k A)(x_1 \odot \cdots \odot x_k) = Ax_1 \odot \cdots \odot Ax_k$

(2) $(\wedge_k A)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = Ax_1 \wedge \cdots \wedge Ax_k$

(3) $(\odot_k A)(\odot_k B) = \odot_k AB$

(4) $(\wedge_k A)(\wedge_k B) = \wedge_k AB$

(5) $\odot_k \alpha A = \alpha^k \odot_k A$, $\alpha \in \mathbb{K}$

(6) $\wedge_k \alpha A = \alpha^k \wedge_k A$, $\alpha \in \mathbb{K}$

Dokaz Sve tvrdnje slijede neposredno iz definicije i analognih svojstava operatora $\otimes_k A$. ■

TEOREM 6.15 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n, $A \in L(X)$ i $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Tada vrijedi:*

(1) $\sigma(\otimes_k A) = \{\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n\}$

(2) $\sigma(\odot_k A) = \{\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n,\ i_1 \leq \cdots \leq i_k\}$

(3) $\sigma(\wedge_k A) = \{\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n,\ i_1 < \cdots < i_k\}$

(4) $\det \odot_k A = (\det A)^\alpha$, *gdje je* $\alpha = \frac{k}{n}\binom{n+k-1}{k}$

(5) $\det \wedge_k A = (\det A)^\alpha$, $\alpha = \frac{k}{n}\binom{n}{k}$

Dokaz (1) Slijedi iz Teorema 6.7, a na sličan način kao u ovom teoremu dobijemo (2) i (3), koristeći prethodnu propoziciju (tvrdnje (1) i (2)). (4) Iz (2) slijedi $\det \odot_k A = (\det A)^\alpha$, za neki α. Ako sada stavimo $A = tI$ dobijemo $t^{k \dim \odot_k X} = t^{n\alpha}$, za svaki t, pa je $n\alpha = k \dim \odot_k X$ tj. $\alpha = \frac{k}{n} \dim \odot_k X$. Tvrdnja (5) se dokazuje slično. ■

PROPOZICIJA 6.16 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$. Tada je* $\operatorname{im} \otimes_k A = \otimes_k \operatorname{im} A$. *Slično vrijedi za $\odot_k A$ i $\wedge_k A$. Nadalje, ako je $r(A) = rang(A) = r$ onda je*

(1) $r(\otimes_k A) = r^k$

(2) $r(\odot_k A) = \binom{r+k-1}{k}$

(3) $r(\wedge_k A) = \binom{r}{k}$

Dokaz Prva tvrdnja je evidentna za $\otimes$, a onda slijedi i za $\odot$ i $\wedge$. Ostale tvrdnje slijede iz prve tvrdnje i formule $r(A) = \dim \operatorname{im} A$. ■

PROPOZICIJA 6.17 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) $\det(I + zA) = \exp \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} z^k \operatorname{tr} A^k$, *za* $|z| < 1/\rho(A)$

(2) $\det(I - zA)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \operatorname{tr} \odot_k A \cdot z^k$, *za* $|z| < 1/\rho(A)$

(3) $\det(I + zA) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr} \wedge_k A \cdot z^k$, $z \in \mathbb{K}$

(4) $p_A(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \operatorname{tr} \wedge_{n-k} A \cdot z^k$, $z \in \mathbb{K}$

Dokaz (1) Neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ i $|z| < 1/\rho(A)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \log \det(I + zA) &= \log \prod_{k=1}^{n} (1 + z\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + z\lambda_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} z^m \lambda_k^m = \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} z^m \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m \\ &= \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} z^m \operatorname{tr} A^m \end{aligned}$$

iz čega slijedi tražena formula. (2) Po Teoremu 6.15 za $|z| < 1/\rho(A)$ je

$$\begin{aligned}
\det(I - zA)^{-1} &= \frac{1}{(1 - z\lambda_1)\cdots(1 - z\lambda_n)} \\
&= \sum_{k_1 \geq 0} (z\lambda_1)^{k_1} \cdots \sum_{k_n \geq 0} (z\lambda_n)^{k_n} \\
&= \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \cdot z^{k_1 + \cdots + k_n} \\
&= \sum_{k \geq 0} \Big(\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \Big) \cdot z^k = \sum_{k \geq 0} \operatorname{tr} \odot_k A \cdot z^k
\end{aligned}$$

(3) Ponovo po Teoremu 6.15 imamo $\det(I + zA) = (1 + z\lambda_1)\cdots(1 + z\lambda_n) = 1 + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z + \cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_n z^n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr} \wedge_k A \cdot z^k$. (4) Slijedi iz (3). ■

KOROLAR 6.18 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\operatorname{tr} \odot_2 A = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2 A + \operatorname{tr} A^2)$
(2) $\operatorname{tr} \wedge_2 A = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2 A - \operatorname{tr} A^2)$
(3) $\operatorname{tr} \odot_3 A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr}^3 A + 3 \operatorname{tr} A \operatorname{tr} A^2 + 2 \operatorname{tr} A^3)$
(4) $\operatorname{tr} \wedge_3 A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr}^3 A - 3 \operatorname{tr} A \operatorname{tr} A^2 + 2 \operatorname{tr} A^3)$

Dokaz Koristeći formulu (1) iz prethodne propozicije razvijemo u Taylorov red $\det(I - zA)^{-1}$ i $\det(I + zA)$ do treće potencije, a onda usporedimo koeficijente redova koristeći formule (2) i (3) iz prethodne propozicije. Na ovaj način se mogu dobiti formule za $\operatorname{tr} \odot_k A$ i $\operatorname{tr} \wedge_k A$, za svaki k, ali su one prilično komplicirane pa ih ne navodimo. ■

PROPOZICIJA 6.19 *Neka su $X_1, \ldots, X_k$ unitarni prostori nad $\mathbb{K}$. Tada je $X_1 \otimes \cdots \otimes X_k$ unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ sa skalarnim produktom definiranim na tenzorima ranga 1 sa*

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k | y_1 \otimes \cdots \otimes y_k) = (x_1|y_1) \cdots (x_k|y_k)$$

i proširenim po linearnosti. Nadalje, vrijedi

$$\|x_1 \otimes \cdots \otimes x_k\| = \|x_1\| \cdots \|x_k\|, \ x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, k$$

Dokaz Aksiomi skalarnog produkta se provjere neposredno. ■

PROPOZICIJA 6.20 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$. Tada za svaki $x_1, \ldots, x_k$ i $y_1, \ldots, y_k$ iz X vrijedi*

(1) $(x_1 \odot \cdots \odot x_k | y_1 \odot \cdots \odot y_k) = \frac{1}{k!} \operatorname{per}[(x_i|y_j)]$.
(2) $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k | y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) = \frac{1}{k!} \det[(x_i|y_j)]$.

Dokaz Zamijetimo prvo da je $\mathcal{P}(\sigma)^* = \mathcal{P}(\sigma^{-1}) = \mathcal{P}(\sigma)^{-1}$, što znači da je operator $\mathcal{P}(\sigma)$ unitaran, pa su $\mathcal{S}_k$ i $\mathcal{A}_k$ projektori, za svaki k. Sada imamo

$$\begin{aligned}(x_1 \odot \cdots \odot x_k | y_1 \odot \cdots \odot y_k) &= (\mathcal{S}_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) | \mathcal{S}_k(y_1 \otimes \cdots \otimes y_k)) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k | \mathcal{S}_k(y_1 \otimes \cdots \otimes y_k)) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k | \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma y_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k | y_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma (x_1 | y_{\sigma^{-1}(1)}) \cdots (x_k | y_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_\sigma (x_1 | y_{\sigma(1)}) \cdots (x_k | y_{\sigma(k)})\end{aligned}$$

iz čega slijedi prva formula. Druga formula se dokazuje slično. ■

TEOREM 6.21 *Neka su X i Y unitarni prostori nad $\mathbb{K}$, $A \in L(X)$ i $B \in L(Y)$. Tada vrijedi:*

(1) $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

(2) $(\otimes_k A)^* = \otimes_k A^*$. *Slično vrijedi za $\odot_k A$ i $\wedge_k A$.*

(3) *Ako je A normalan (odnosno: hermitski, unitaran, projektor, parcijalna izometrija) onda je $\otimes_k A$ normalan (odnosno: hermitski, unitaran, projektor, parcijalna izometrija), za svaki k. Slično vrijedi za $\odot_k A$ i $\wedge_k A$.*

Za antihermitske operatore ova tvrdnja vrijedi samo za neparne k.

(4) *Ako su A i B regularni onda je $A \otimes B$ regularan i $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*

(5) *Ako je A regularan onda je $\otimes_k A$ regularan, za svaki k, i vrijedi jednakost $(\otimes_k A)^{-1} = \otimes_k A^{-1}$. Slično vrijedi za $\odot_k A$ i $\wedge_k A$.*

Dokaz (1) $((A \otimes B)x \otimes y | x' \otimes y') = (Ax \otimes By | x' \otimes y') = (Ax|x')(By|y') = (x|A^*x')(y|B^*y') = (x \otimes y | (A^* \otimes B^*)x' \otimes y')$ pa dobijemo traženu formulu. (2) Slijedi iz (1). (3) Slijedi iz (2), Propozicije 6.5 i Propozicije 6.14. (4) Slijedi iz Propozicije 6.5. (5) Slijedi iz (4) i Propozicije 6.14. ■

KOROLAR 6.22 *Neka su X i Y unitarni prostori nad $\mathbb{K}$, $A \in L(X)$ i $B \in L(Y)$. Tada vrijedi:*

(1) $|A \otimes B| = |A| \otimes |B|$

(2) $| \otimes_k A| = \otimes_k |A|$. *Slično vrijedi za $\odot_k A$ i $\wedge_k A$.*

(3) *Ako su $A = U|A|$ i $B = V|B|$ polarni rastavi onda je polarni rastav od $A \otimes B$ dan formulom $A \otimes B = (U \otimes V)(|A| \otimes |B|)$.*

(4) *Ako je $A = U|A|$ polarni rastav onda je $\otimes_k A = (\otimes_k U)(\otimes_k |A|)$ također polarni rastav. Slično vrijedi za $\odot_k A$ i $\wedge_k A$.*

Dokaz Slijedi neposredno iz prethodnog teorema. ■

KOROLAR 6.23 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A, B \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) $\rho(A \otimes B) = \rho(A)\rho(B)$

(2) $\rho(\otimes_k A) = \rho(\odot_k A) = \rho(A)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

(3) *Ako je* $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *i* $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ *onda je*

$$\rho(\wedge_k A) = |\lambda_1| \cdots |\lambda_k|, \ k = 1, \ldots, n$$

(4) $\| \otimes_k A\| = \| \odot_k A\| = \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

(5) $\| \wedge_k A\| = s_1(A) \cdots s_k(A)$, $k = 1, \ldots, n$

Dokaz Slijedi iz prethodnog korolara i Teorema 6.15. ■

KOROLAR 6.24 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) $\| \otimes_k A\|_p = \|A\|_p^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$

(2) $s_{n^k}(\otimes_k A) = s_n(A)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

(3) $s_{\binom{n+k-1}{k}}(\odot_k A) = s_n(A)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

(4) $s_{\binom{n}{k}}(\wedge_k A) = s_n(A)s_{n-1}(A) \cdots s_{n-k+1}(A)$, $k = 1, \ldots, n$

Dokaz Slijedi iz Korolara 6.22 i Teorema 6.15. ■

KOROLAR 6.25 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$. Tada je operator $\mathcal{P}(\sigma)$ unitaran, za svaku permutaciju σ, dok su $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{A}_k$ i $\mathcal{N}_k$ projektori. Nadalje, vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\operatorname{tr} \mathcal{S}_k = \binom{n+k-1}{k}$, $\operatorname{tr} \mathcal{A}_k = \binom{n}{k}$, $\operatorname{tr} \mathcal{N}_k = n^k - \binom{n+k-1}{k} - \binom{n}{k}$, $k \geq 2$

(2) *Podprostori $\odot_k X$, $\wedge_k X$ i $\nabla_k X$ su ortogonalni, za $k \geq 2$.*

(3) *Svaki $z \in \otimes_k X$, za $k \geq 2$, se može napisati, na jedinstven način, u obliku $z = z_1 + z_2 + z_3$, gdje je z_1 simetričan, z_2 antisimetričan, a z_3 asimetričan tenzor, pri čemu vrijedi $\|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + \|z_3\|^2$.*

Dokaz Tvrdnje (1) i (2) slijede iz Propozicije 6.9 i 6.11, a (3) iz (2). ■

KOROLAR 6.26 *Neka su X i Y unitarni prostori nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i m, $A \in L(X)$ i $B \in L(Y)$. Tada vrijedi:*

(1) *Ako su $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$ i $B = \sum_\mu \mu Q_\mu$ spektralni rastavi onda se spektralni rastav od $A \otimes B = \sum_\lambda \sum_\mu \lambda\mu P_\lambda \otimes Q_\mu$ dobije grupiranjem članova uz iste produkte $\lambda\mu$.*

(2) *Ako su $A = \sum_\lambda \lambda U_\lambda$ i $B = \sum_\mu \mu V_\mu$ Schmidtovi rastavi onda se Schmidtov rastav od $A \otimes B = \sum_\lambda \sum_\mu \lambda\mu U_\lambda \otimes V_\mu$ dobije grupiranjem članova uz iste produkte $\lambda\mu$.*

(3) *Singularni spektar od $A \otimes B$ je jednak produktu singularnog spektra od A i singularnog spektra od B.*

Dokaz (1) Slijedi iz Teorema 6.21, a (2) i (3) iz Korolara 6.22. ■

KOROLAR 6.27 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$. Tada za svaki $x_1, \ldots, x_k$ i $y_1, \ldots, y_k$ iz X vrijede sljedeće formule:*

(1) $|\operatorname{per}[(x_i|y_j)]|^2 \leq \operatorname{per}[(x_i|x_j)] \operatorname{per}[(y_i|y_j)]$

(2) $|\det[(x_i|y_j)]|^2 \leq \Gamma(x_1, \ldots, x_k)\Gamma(y_1, \ldots, y_k)$

(3) $|\operatorname{per} AB|^2 \leq \operatorname{per} AA^* \operatorname{per} BB^*,\ A, B \in gl_n(\mathbb{K})$

(4) $|\operatorname{per} A|^2 \leq \operatorname{per} |A|^2,\ A \in gl_n(\mathbb{K})$

Dokaz Tvrdnje (1) i (2) slijede iz Propozicije 6.20 primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti. (3) Ako su $x_1, \ldots, x_n$ stupci od A^*, a $y_1, \ldots, y_n$ stupci od B onda vrijedi $AB = [(y_j|x_i)]$, $AA^* = [(x_i|x_j)]$, $BB^* = [(y_i|y_j)]$ pa tvrdnja slijedi iz (1). (4) Slijedi iz (3) ako stavimo A^* umjesto A i $B = I$. ■

DEFINICIJA 6.28 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $A \in L(X)$ i $k \geq 2$. Definiramo operator $\otimes_k^+ A \in L(\otimes_k X)$ sa*

$$\otimes_k^+ A = A \otimes I \otimes \cdots \otimes I + I \otimes A \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes I \otimes A$$

Lako se vidi, kao i u slučaju $\otimes_k A$, da su podprostori $\odot_k X$, $\wedge_k X$ i $\nabla_k X$ invarijantni na $\otimes_k^+ A$, pa definiramo operatore $\odot_k^+ A$, $\wedge_k^+ A$ i $\nabla_k^+ A$ kao restrikcije od $\otimes_k^+ A$ na $\odot_k X$, $\wedge_k X$ i $\nabla_k X$. Uvodimo posebne oznake $\otimes_0^+ A = 0$, $\odot_0^+ A = 0$ i $\wedge_0^+ A = 0$ te $\otimes_1^+ A = A$, $\odot_1^+ A = A$ i $\wedge_1^+ A = A$.

PROPOZICIJA 6.29 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $A, B \in L(X)$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:*

(1) $\otimes_k^+(A + B) = \otimes_k^+ A + \otimes_k^+ B$

(2) $\otimes_k^+ \alpha A = \alpha \otimes_k^+ A,\ \alpha \in \mathbb{K}$

(3) $\otimes_k \exp A = \exp \otimes_k^+ A$

(4) $[\otimes_k^+ A, \otimes_k^+ B] = \otimes_k^+ [A, B]$

(5) $(\otimes_k T)(\otimes_k^+ A)(\otimes_k T)^{-1} = \otimes_k^+ TAT^{-1}$, *za regularni $T \in L(X)$*

(6) *Ako je A poluprost (odnosno nilpotentan) onda je $\otimes_k^+ A$ poluprost (odnosno nilpotentan).*

(7) *Ako je $A = P + N$ Jordanov rastav onda je $\otimes_k^+ A = \otimes_k^+ P + \otimes_k^+ N$ također Jordanov rastav.*

Sve tvrdnje također vrijede ako umjesto $\otimes_k^+$ stavimo $\odot_k^+$ ili $\wedge_k^+$.

Dokaz Tvrdnje (1)-(7) se provjere neposredno, a posljednju tvrdnju dobijemo restrikcijom na $\odot_k X$ i $\wedge_k X$. ■

PROPOZICIJA 6.30 *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n, $A \in L(X)$ i $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Tada vrijedi:*

(1) $\sigma(\otimes_k^+ A) = \{\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n\}$

(2) $\sigma(\odot_k^+ A) = \{\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}; i_1 \leq \cdots \leq i_k\}$

(3) $\sigma(\wedge_k^+ A) = \{\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}; i_1 < \cdots < i_k\}$, $k = 1, \ldots, n$

(4) $\operatorname{tr} \otimes_k^+ A = kn^{k-1} \operatorname{tr} A$

(5) $\operatorname{tr} \odot_k^+ A = \alpha \operatorname{tr} A$, *za* $\alpha = \frac{k}{n}\binom{n+k-1}{k}$

(6) $\operatorname{tr} \wedge_k^+ A = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \operatorname{tr} A$

Dokaz (1) Spektar operatora je jednak spektru njegovog poluprostog dijela, pa možemo smatrati da je A poluprost. Ako se A dijagonalizira u bazi e u X tj. $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$, onda je

$$(\otimes_k^+ A)(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = (\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

iz čega slijedi tvrdnja. Tvrdnje (2) i (3) se dokazuju slično, dok (4), (5) i (6) slijede iz (1), (2) i (3). ■

PROPOZICIJA 6.31 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A, B \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) $(\otimes_k^+ A)^* = \otimes_k^+ A^*$

(2) *Ako je A normalan (odnosno hermitski, antihermitski) onda je $\otimes_k^+ A$ normalan (odnosno hermitski, antihermitski), za svaki k.*

Tvrdnje također vrijede ako umjesto $\otimes_k^+$ stavimo $\odot_k^+$ ili $\wedge_k^+$.

Dokaz (1) Slijedi iz Teorema 6.21. (2) Slijedi iz (1) i komutatorske formule $[\otimes_k^+ A, \otimes_k^+ A^*] = \otimes_k^+ [A, A^*]$, dok posljednju tvrdnju dobijemo restrikcijom na $\odot_k X$ i $\wedge_k X$. ■

PRIMJERI 6.32

(1) Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n, $A \in L(X)$ regularan operator i $\varkappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Tada se $\varkappa(A)$ zove **kondicionalni broj** od A i za njega vrijedi:

(a) $\varkappa$ je unitarno invarijantan i $\varkappa(A) \geq 1$.

(b) $\varkappa(AB) \leq \varkappa(A)\varkappa(B)$

(c) $\varkappa(A^*A) = \varkappa(AA^*) = \varkappa(A)^2$

(d) Ako je A normalan onda je $\varkappa(A^k) = \varkappa(A)^k$, za svaki k.

(e) $\varkappa(A) = s_1(A)/s_n(A)$

(f) $\varkappa(\otimes_k A) = \varkappa(\odot_k A) = \varkappa(A)^k$, za svaki k

(g) $\varkappa(\wedge_k A) = s_1(A) \cdots s_k(A)/s_n(A) \cdots s_{n-k+1}(A)$, $k = 1, \ldots, n$

(2) Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$. Tada za svaki k vrijedi:

(a) $|\operatorname{tr} \otimes_k A| \leq n^k \|A\|^k$

(b) $|\operatorname{tr} \odot_k A| \leq \binom{n+k-1}{k} \|A\|^k$

(c) $|\operatorname{tr} \wedge_k A| \leq \binom{n}{k} \|A\|^k$

(3) Neka su X i Y unitarni prostor nad $\mathbb{K}$, $A \in L(X)$ i $B \in L(Y)$. Tada vrijedi:

(a) Ako je $A \geq 0$ i $B \geq 0$ onda je $A \otimes B \geq 0$.

(b) Ako je $A \geq B$ i $C \geq 0$ onda je $A \otimes C \geq B \otimes C$.

(c) Ako je $A \geq A_1 \geq 0$ i $B \geq B_1 \geq 0$ onda je $A \otimes B \geq A_1 \otimes B_1 \geq 0$.

(4) Ako je $A \in L(X)$ operator ranga 1 onda je $\odot_k A$ operator ranga 1, za svaki k, i vrijedi $\operatorname{tr} \odot_k A = (\operatorname{tr} A)^k$.

(5) Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $P, Q \in L(X)$ projektori ranga k, $1 \leq k \leq n$. Tada vrijedi:

(a) $\|P - Q\|^2 = 1 - \operatorname{tr} PQ$, za $k = 1$

(b) $\|P - Q\|^2 = n - 1 - \operatorname{tr} PQ$, za $k = n - 1$

(c) $\| \wedge_m P - \wedge_m Q\|^2 = 1 - s_k(PQ)^2 \cdots s_{k-m+1}(PQ)^2$, $1 \leq m \leq k$

(d) $\| \otimes_m P - \otimes_m Q\|^2 = \| \odot_m P - \odot_m Q\|^2 = 1 - s_k(PQ)^{2m}$, $m \geq 0$

pa su preslikavanja $P \mapsto \otimes_m P$, $P \mapsto \odot_m P$, $m \geq 1$, i $P \mapsto \wedge_m P$, $1 \leq m \leq k$ neprekidna i injektivna.

(6) Postoji jedinstven izomorfizam unitarnih prostora $\Phi : gl_n(\mathbb{R}) \to \otimes_2 \mathbb{R}^n$ takav da je $\Phi(ab^\tau) = a \otimes b$, za svaki $a, b \in \mathbb{R}^n$. Specijalno, vrijede formule $\Phi(ab^\tau + ba^\tau) = 2a \odot b$ i $\Phi(ab^\tau - ba^\tau) = 2a \wedge b$, za svaki $a, b \in \mathbb{R}^n$. Nadalje, ako je $B \in gl_n(\mathbb{R})$ i $\mathcal{A}_B \in L(gl_n(\mathbb{R}))$ operator definiran sa $\mathcal{A}_B A = BAB^\tau$ onda vrijedi formula $\mathcal{A}_B = \Phi^{-1}(\otimes_2 B)\Phi$. Podprostor X svih antisimetričnih matrica i $X^\perp$ svih simetričnih matrica su invarijantni na $\mathcal{A}_B$ pri čemu vrijedi $\mathcal{A}_B|X = \Phi^{-1}(\wedge_2 B)\Phi$ i $\mathcal{A}_B|X^\perp = \Phi^{-1}(\odot_2 B)\Phi$.

(7) Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{R}$ i $\Phi : L(X) \otimes L(X) \to L(L(X))$ operator definiran sa $\Phi(A \otimes B) = M_{A,B}$, proširen po linearnosti na cijeli prostor, gdje je $M_{A,B} \in L(L(X))$, $M_{A,B}C = ACB^*$. Tada je Φ izomorfizam unitarnih prostora i C^*-algebra.

(8) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Tada za kompleksifikaciju X_c prostora X vrijedi $X_c = X \otimes \mathbb{C}$.

(9) Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ i $x_1, \ldots, x_k \in X$. Tada za svaki $A \in L(X)$ vrijedi nejednakost

$$\Gamma(Ax_1, \ldots, Ax_k) \leq s_1(A)^2 \cdots s_k(A)^2 \cdot \Gamma(x_1, \ldots, x_k)$$

(10) Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$ pozitivan operator. Tada su operatori $\otimes_k^+ A$, $\odot_k^+ A$ i $\wedge_k^+ A$ također pozitivni i vrijedi:

(a) $\| \otimes_k^+ A\| = \| \odot_k^+ A\| = k\|A\|$, za svaki k

(b) $\| \wedge_k^+ A\| = s_1(A) + \cdots + s_k(A)$, $1 \leq k \leq n$

(c) Ako je A projektor ranga 1 onda je $\wedge_k^+ A$ projektor ranga $\frac{k}{n}\binom{n}{k}$.

(11) Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A, B \in L(X)$. Tada vrijede formule:

(a) $\operatorname{tr}(\otimes_k^+ A)(\otimes_k^+ B) = kn^{k-1} \operatorname{tr} AB + k(k-1)n^{k-2} \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$

(b) $\operatorname{tr}(\odot_k^+ A)(\odot_k^+ B) = \binom{n+k}{k-1} \operatorname{tr} AB + \binom{n+k-1}{k-2} \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$

(c) $\operatorname{tr}(\wedge_k^+ A)(\wedge_k^+ B) = \binom{n-2}{k-1} \operatorname{tr} AB + \binom{n-2}{k-2} \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$

Poglavlje 7

Tenzorske algebre

Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Osnovni objekt ovog poglavlja je vektorski prostor $\otimes X = \sum_{k\geq 0} \otimes_k X$. On je direktna suma prostora $\otimes_k X$, $k \geq 0$, što znači da se svaki $z \in \otimes X$ može napisati, na jedinstven način, u obliku $z = \sum_{k\geq 0} z_k$, pri čemu je suma konačna (tj. samo konačno z_k je različito od nule) i $z_k \in \otimes_k X$, za svaki k. Na vektorskom prostoru $\otimes X$ uvodimo strukturu algebre nad $\mathbb{K}$: prvo definiramo množenje tenzora ranga 1, a zatim proširujemo množenje na ostale tenzore po linearnosti. Neka su $x_1, \ldots, x_k$ i $y_1, \ldots, y_m$ vektori iz X, $z = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \otimes_k X$ i $w = y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in \otimes_m X$. Definiramo $z \otimes w \in \otimes_{k+m} X$ sa

$$z \otimes w = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$$

Nadalje, ako je $z = \sum_{k\geq 0} z_k \in \otimes X$ i $w = \sum_{k\geq 0} w_k \in \otimes X$ onda definiramo $z \otimes w = v$, gdje je $v = \sum_{k\geq 0} v_k \in \otimes X$ i

$$v_k = \sum_{k_1+k_2=k} z_{k_1} \otimes w_{k_2}$$

Neposredno se provjeri da je, uz ovako definirano množenje, $\otimes X$ algebra nad $\mathbb{K}$. Ona je beskonačno dimenzionalna, nije komutativna, za $n \geq 2$, ima jedinicu $1 \in \otimes_0 X = \mathbb{K}$ i generirana je sa $\mathbb{K} \cup X$.

Algebru $\otimes X$ zovemo **tenzorska algebra prostora** X.

Neka je sada X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n. Tada je, po prethodnom poglavlju, $\otimes_k X$ unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n^k, za svaki k. Ako je $z = \sum_{k\geq 0} z_k \in \otimes X$ i $w = \sum_{k\geq 0} w_k \in \otimes X$ onda definiramo skalarni produkt na $\otimes X$ sa

$$(z|w) = \sum_{k\geq 0} (z_k|w_k)$$

Specijalno je $\|z\| = (\sum_{k\geq 0} \|z_k\|^2)^{1/2}$ norma generirana skalarnim produktom. Na taj način $\otimes X$ postaje unitarni prostor nad $\mathbb{K}$. Zamijetimo da su $\otimes_k X$ i $\otimes_m X$ okomiti za $k \neq m$, pa je $\sum_{k\geq 0} \otimes_k X$ ustvari ortogonalna suma.

Ako je $x \in X$ onda uvodimo oznaku $x^{\otimes k} = x \otimes \cdots \otimes x \in \otimes_k X$. Razmotrimo niz (z_k) u $\otimes X$, gdje je $z_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} z^{\otimes m}$. Lako se vidi da je (z_k) Cauchyjev niz u $\otimes X$ koji nije konvergentan pa zaključujemo da $\otimes X$ nije potpun prostor. Opišimo upotpunjenje $\overline{\otimes} X$ prostora $\otimes X$. Hilbertov prostor $\overline{\otimes} X$ se sastoji od svih suma oblika $z = \sum_{k \geq 0} z_k$, gdje je $z_k \in \otimes_k X$, za svaki k, i $\sum_{k \geq 0} \|z_k\|^2 < \infty$. Ako su $z, w \in \overline{\otimes} X$, $z = \sum_{k \geq 0} z_k$ i $w = \sum_{k \geq 0} w_k$ onda je $(z|w) = \sum_{k \geq 0} (z_k|w_k)$. Zamijetimo da niz (z_k) konvergira u prostoru $\overline{\otimes} X$ prema $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^{\otimes m} \in \overline{\otimes} X$. Prostor $\overline{\otimes} X$ ima i jedan nedostatak, naime on nije algebra, budući da nije zatvoren na množenje.

Ako u gornjoj konstrukciji zamijenimo znak $\otimes$ sa $\odot$ onda umjesto algebre $\otimes X$ dobijemo algebru $\odot X$ i njezino upotpunjenje $\overline{\odot} X$.

Algebru $\odot X$ zovemo **simetrična algebra prostora** X. Ona je unitarni podprostor od $\otimes X$, ali nije podalgebra od $\otimes X$ budući da su operacije množenja u ovim algebrama različite. Simetrična algebra je komutativna za svaki n, za razliku od tenzorske algebre koja je komutativna samo za $n = 1$, pri čemu je tada $\otimes X = \odot X$.

Ako je $x \in X$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza u X i $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ multiindeks onda uvodimo oznake $x^{\odot k} = x \odot \cdots \odot x \in \odot_k X$ i $e^{\odot \omega} = e_1^{\odot \omega_1} \odot \cdots \odot e_n^{\odot \omega_n}$.

7.1 Simetrične algebre

LEMA 7.1 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $e = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza u X. Tada vrijedi:*

(1) $(e^{\odot \omega}|e^{\odot \eta}) = 0$, *za* $\omega \neq \eta$

(2) $(e^{\odot \omega}|e^{\odot \omega}) = \omega!/k!$, *za* $|\omega| = k$

(3) $\{e^{\odot \omega}; |\omega| = k\}$ *je ortogonalna baza u* $\odot_k X$

(4) *Svaki $z \in \odot X$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku konačne sume $z = \sum_\omega \alpha_\omega e^{\odot \omega}$, gdje su $\alpha_\omega \in \mathbb{K}$, pri čemu vrijedi*

$$\|z\|^2 = \sum_{\omega} \tfrac{\omega!}{|\omega|!} |\alpha_\omega|^2$$

(5) *Ako je $a \in X$, $a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, onda je $a^{\odot k} \in \odot_k X$, za svaki k, i vrijedi*

$$a^{\odot k} = \sum_{|\omega| = k} \tfrac{k!}{\omega!} a^\omega e^{\odot \omega}$$

gdje je, kao i prije, $a^\omega = a_1^{\omega_1} \cdots a_n^{\omega_n}$.

(6) *Ako su $a, b \in X$ onda je $(a^{\odot k}|b^{\odot k}) = (a|b)^k$, $k \geq 0$.*

(7) *Ako su $a, b, x \in X$ onda za svaki $m, k \geq 0$ vrijedi*

$$(a^{\odot m} \odot b^{\odot k}|x^{\odot (m+k)}) = (a|x)^m (b|x)^k$$

Dokaz (1) i (2) slijede iz Propozicije 6.20. (3) Slijedi iz dokaza Teorema 6.11. (4) Slijedi iz (3). (5) Slijedi iz Newtonove polinomijalne formule koja vrijedi u svakoj komutativnoj algebri. (6) i (7) slijede iz Propozicije 6.20. ∎

LEMA 7.2 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *Prostor* $\overline{\odot}X$ *je generiran sa* $\{\exp_\odot a; a \in X\}$, *gdje je*

$$\exp_\odot a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!}} a^{\odot k}$$

pri čemu vrijedi $(\exp_\odot a | \exp_\odot b) = \exp(a|b)$, $a, b \in X$.

(2) *Upotpunjenje* $\overline{\mathbb{K}}\langle n\rangle$ *prostora polinoma* $\mathbb{K}\langle n\rangle$ *je generirano sa* $\{\exp a^*; a \in \mathbb{K}^n\}$, *gdje je* a^* *homogeni polinom stupnja* 1, $a^*(x) = (a|\overline{x})$, *pri čemu vrijedi* $(\exp a^* | \exp b^*) = \exp(a|b)$, $a, b \in \mathbb{K}^n$.

Dokaz (1) Prva tvrdnja znači da su sve linearne kombinacije tenzora $\exp_\odot a$, $a \in X$, guste u $\overline{\odot}X$. Ovo se može preformulirati: ako je $z \in \overline{\odot}X$ i $(z|\exp_\odot a) = 0$, $a \in X$, onda je $z = 0$. Dakle, ako je $z = \sum_{k\geq 0} z_k \in \overline{\odot}X$ takav da je $(z|\exp_\odot a) = 0$, $a \in X$, onda je $(z_k|a^{\odot k}) = 0$, $a \in X$, $k \geq 0$, pa je

$$0 = \sum_{|\omega|=k} \frac{k!}{\omega!} a^\omega (z_k|e^{\odot\omega}) = \sum_{|\omega|=k} \frac{k!}{\omega!} (z_k|e^{\odot\omega}) h_\omega(a)$$

a kako je $\{h_\omega; |\omega| = k\}$ baza u podprostoru $\mathbb{K}_k\langle n\rangle$ svih k-homogenih polinoma, zaključujemo da je $(z_k|e^{\odot\omega}) = 0$, $|\omega| = k$, $k \geq 0$, tj. $z_k = 0$, $k \geq 0$, što znači $z = 0$.
(2) Skalarni produkt na $\overline{\mathbb{K}}\langle n\rangle$ je definiran uvjetom: $(h_\omega|h_\eta) = 0$, za $\omega \neq \eta$, i $(h_\omega|h_\omega) = \omega!$. Nadalje, ako su $a, b \in \mathbb{K}^n$ onda je $(a^*|b^*) = (a|b)$ i

$$(\exp a^* | \exp b^*) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!^2} (a^{*k}|b^{*k}) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!^2} k! (a|b)^k = \exp(a|b)$$

pa za svaki $f \in \overline{\mathbb{K}}\langle n\rangle$ imamo $(f|\exp a^*) = f(\overline{a})$. Dakle, ako je $(f|\exp a^*) = 0$, $a \in \mathbb{K}^n$, onda je $f(\overline{a}) = 0$, $a \in \mathbb{K}^n$, tj. $f = 0$. Time smo dokazali da $\{\exp a^*; a \in \mathbb{K}^n\}$ generira $\overline{\mathbb{K}}\langle n\rangle$. ∎

TEOREM 7.3 *Neka je* X *unitarni prostor nad* $\mathbb{K}$ *dimenzije* n. *Tada vrijedi:*

(1) *Algebre* $\odot X$, $\odot\mathbb{K}^n$ *i* $\mathbb{K}\langle n\rangle$ *su izomorfne.*

(2) *Postoji jedinstven izomorfizam Hilbertovih prostora* $\Psi : \overline{\odot}\mathbb{K}^n \to \overline{\mathbb{K}}\langle n\rangle$ *takav da vrijedi* $\Psi(\exp_\odot a) = \exp a^*$, $a \in \mathbb{K}^n$.

Dokaz (1) Neka je e ortonormirana baza u X i $f : \odot X \to \mathbb{K}\langle n\rangle$, $f(e^{\odot\omega}) = h_\omega$, $\omega \in \mathbb{N}_0^n$, proširen po linearnosti. Tada je f izomorfizam algebra nad $\mathbb{K}$.
(2) Definiramo Ψ na gustom podprostoru svih linearnih kombinacija tenzora $\exp_\odot a$, $a \in X$, sa $\Psi(\exp_\odot a) = \exp a^*$. Po prethodnoj lemi je Ψ izometrija i slika od Ψ je gusta u $\overline{\mathbb{K}}\langle n\rangle$. Prema tome se Ψ proširuje, na jedinstven način, do izometrije Hilbertovih prostora. ∎

KOROLAR 7.4 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\Psi(z)(x) = (z|\exp_{\odot} x)$, $x \in \mathbb{K}^n$, $z \in \overline{\odot}\mathbb{K}^n$

(2) $\Psi(e^{\odot\omega}) = \frac{1}{\sqrt{k!}} h_\omega$, *za* $|\omega| = k$, $k \geq 0$

(3) $\Psi(a^{\odot k}) = \frac{1}{\sqrt{k!}} a^{*k}$, *za* $a \in \mathbb{K}^n$, $k \geq 0$

(4) $\Psi(\odot_k \mathbb{K}^n) = \mathbb{K}_k\langle n\rangle$, $k \geq 0$

Dokaz (1) Po prethodnom teoremu tvrdnja vrijedi za $z = \exp_{\odot} a$, $a \in \mathbb{K}^n$, a onda i za svaki $z \in \overline{\odot}\mathbb{K}^n$. Formule (2) i (4) slijede iz (3), dok (3) slijedi iz $\Psi(\exp_{\odot} \alpha a) = \exp \alpha a^*$, $a \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \in \mathbb{K}$, razvojem u red po α i uspoređivanjem koeficijenata. ■

DEFINICIJA 7.5 *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *neprazan otvoren skup i* $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(1) *Kažemo da je* f ***klase*** C^k *na* Ω *ako postoje parcijalne derivacije* $\partial^\omega f$ *i neprekidne su, za svaki multiindeks* $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ *takav da je* $|\omega| \leq k$. *Vektorski prostor svih funkcija klase* C^k *na* Ω *označavamo sa* $C^k(\Omega)$.

(2) *Neka je* $C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$. *Ako je* $f \in C^\infty(\Omega)$ *onda kažemo da je* f ***beskonačno derivabilna*** *na* Ω. *Lako se vidi da su* $C^k(\Omega)$ *i* $C^m(\Omega)$ *različiti za* $k \neq m$ *i* $C^\infty(\Omega) \subset C^m(\Omega) \subset C^k(\Omega) \subset C^0(\Omega)$, *za svaki* $m > k$, *pri čemu su sve inkluzije stroge.*

(3) *Kažemo da je* f ***analitička*** *na* Ω *ako za svaki* $a \in \Omega$ *postoje* $\alpha_\omega \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $f(x) = \sum_\omega \alpha_\omega (x-a)^\omega$ *pri čemu red konvergira uniformno na nekoj okolini od* a. *Lako se vidi da su brojevi* α_ω *jedinstveni i* $\alpha_\omega = \partial^\omega f(a)/\omega!$, *za svaki* ω. *Vektorski prostor svih analitičkih funkcija na* Ω *označavamo sa* $A(\Omega)$. *Evidentno je* $A(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ *i ova dva prostora su različita.*

PRIMJERI 7.6

(1) Ako je $\Omega_1 \subset \Omega_2$ onda $C^k(\Omega_1) \supset C^k(\Omega_2)$ i $A(\Omega_1) \supset A(\Omega_2)$, $k \geq 0$.
(2) Svaki polinom je analitička funkcija na $\mathbb{R}^n$ tj. $\mathbb{R}\langle n\rangle \subset A(\mathbb{R}^n)$.
(3) Ako je $f = \exp a^*$, $a \in \mathbb{R}^n$, tj. $f(x) = \exp(a|x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, onda vrijedi $\partial^\omega f(x) = a^\omega f(x)$, za svaki ω. Nadalje, $f \in A(\mathbb{R}^n)$ i razvoj od f u Taylorov red oko $b \in \mathbb{R}^n$ je dan sa

$$f(x) = \sum_\omega \tfrac{1}{\omega!} a^\omega e^{(a|b)} (x-b)^\omega$$

pri čemu red konvergira uniformno po kompaktima na $\mathbb{R}^n$.
(4) Ako su $f, g \in C^\infty(\Omega)$ onda za svaki ω vrijedi

$$\partial^\omega (fg)(x) = \sum_\eta \tbinom{\omega}{\eta} \partial^\eta f(x) \partial^{\omega-\eta} g(x)$$

Specijalno za $f = \exp a^*$ i $g = \exp b^*$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, dobijemo

$$(a+b)^\omega = \sum_\eta \tbinom{\omega}{\eta} a^\omega b^{\omega-\eta}$$

DEFINICIJA 7.7 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup i e standardna baza od $\mathbb{R}^n$.*

(1) *Ako je $f \in C^\infty(\Omega)$ onda se funkcija*

$$f^{(k)} : \Omega \to \odot_k \mathbb{R}^n, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} \partial^\omega f(x) e^{\odot\omega}$$

*zove k-**ta derivacija funkcije** f.*

(2) *Neka je zadana funkcija*

$$g : \Omega \to \sum_{i=0}^{m} \odot_i \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \sum_{|\omega|\le m} g_\omega(x) e^{\odot\omega}$$

gdje je $g_\omega \in C^\infty(\Omega)$, $|\omega| \le m$. Tada se funkcija

$$g^{(k)} : \Omega \to \sum_{i=k}^{k+m} \odot_i \mathbb{R}^n, \quad g^{(k)}(x) = \sum_{|\omega|\le m} g_\omega^{(k)}(x) \odot e^{\odot\omega}$$

*zove k-**ta derivacija funkcije** g.*

LEMA 7.8 *Za svaki $k \ge 0$ vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *Za operator $\partial = \partial_1 e_1 + \cdots + \partial_n e_n$ vrijedi*

$$\partial^{\odot k} = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} \partial^\omega e^{\odot\omega}$$

(2) *Za **Laplaceov operator** $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ vrijedi*

$$\Delta^k = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} \partial^{2\omega}$$

(3) *Ako je $\delta = e_1^{\odot 2} + \cdots + e_n^{\odot 2} \in \odot_2 \mathbb{R}^n$ onda je*

$$\delta^{\odot k} = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} e^{\odot 2\omega}$$

Dokaz Tvrdnje slijede iz Newtonove polinomijalne formule koja vrijedi u svakoj komutativnoj algebri. ■

PROPOZICIJA 7.9 *Ako su f i g iz prethodne definicije onda vrijedi:*

(1) $f^{(k)}(x) = \partial^{\odot k} f(x)$, $g^{(k)}(x) = \partial^{\odot k} \odot g(x)$, $x \in \Omega$, $k \ge 0$

(2) $(g^{(m)})^{(k)}(x) = g^{(m+k)}(x)$, $x \in \Omega$, $m, k \ge 0$

(3) $\Delta^k f(x) = (f^{(2k)}(x) | \delta^{\odot k})$, $x \in \Omega$, $k \ge 0$

Dokaz Tvrdnja (1) slijedi iz prethodne leme, a (2) iz (1) i

$$(g^{(m)})^{(k)}(x) = \partial^{\odot k} \odot g^{(m)}(x) = \partial^{\odot k} \odot \partial^{\odot m} \odot g(x) = \partial^{\odot k+m} \odot g(x)$$

Ova tvrdnja vrijedi naravno i za f, kao specijalni slučaj. (3) Imamo

$$\begin{aligned}(f^{(2k)}(x)|\delta^{\odot k}) &= (\sum_{|\omega|=2k} \tfrac{(2k)!}{\omega!}\partial^\omega f(x) e^{\odot\omega} | \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} e^{\odot 2\omega}) \\ &= \sum_{|\omega|=k} \tfrac{(2k)!}{(2\omega)!}\partial^{2\omega} f(x) \tfrac{k!}{\omega!}(e^{\odot 2\omega}|e^{\odot 2\omega}) = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!}\partial^{2\omega} f(x)\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

PRIMJERI 7.10

(1) Ako je $f = \exp a^*$ onda je $f^{(k)}(x) = f(x)a^{\odot k}$, $x \in \mathbb{R}^n,\ k \geq 0$.
(2) Ako je $f \in C^\infty(\Omega)$ onda je $(f^{(k)}(x)|e^{\odot\omega}) = \partial^\omega f(x)$, za $|\omega| = k$.
(3) Ako je $f \in C^\infty(\Omega)$ i $g(t) = f(ta)$ onda je $g^{(k)}(t) = (f^{(k)}(ta)|a^{\odot k})$
(4) $\Psi(\delta^{\odot k})(x) = (x|x)^k/[(2k)!]^{1/2}$, $k \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$
(5) Ako je $f \in \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$ onda je

$$\Psi^{-1} f = \sum_{k\geq 0} \tfrac{1}{\sqrt{k!}} f^{(k)}(0)$$

Ovim je dana eksplicitna formula za inverz operatora Ψ iz Teorema 7.3.
(6) $(\delta^{\odot k}|a^{\odot 2k}) = (a|a)^k$, $a \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$
(7) Ako je $g : \mathbb{R}^n \to \odot_k \mathbb{R}^n$, $g(x) = x^{\odot k}$, onda je $g^{(k)}(x) = k! \cdot \delta^{\odot k}$
(8) $\|\delta^{\odot k}\|^2 = n(n+2)\cdots(n+2k-2)$, $k \geq 1$.
(9) Ako je $A \in gl_n(\mathbb{R})$ onda je $(f \circ A)^{(k)} = (\odot_k A^\tau)(f^{(k)} \circ A)$
(10) Ako su $f, g \in C^\infty(\Omega)$ onda za svaki $x \in \Omega$ i $m \geq 0$ vrijedi

$$(fg)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} f^{(m-k)}(x) \odot g^{(k)}(x)$$

Ova formula se zove **Leibnitzova formula** za derivaciju produkta.
(11) Ako je $U \in O(n)$ i $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ onda je $\Delta^k(f \circ U) = (\Delta^k f) \circ U$, $k \geq 1$.

DEFINICIJA 7.11 *Ako je $f \in C^2(\Omega)$ i $\Delta f = 0$ onda se f zove* ***harmonijska funkcija*** *na Ω. Vektorski prostor svih harmonijskih funkcija na Ω označavamo sa $H(\Omega)$, a $H\langle n\rangle = H(\Omega) \cap \mathbb{R}\langle n\rangle$ zovemo* ***vektorski prostor harmonijskih polinoma****. Nadalje, $H_k\langle n\rangle = H\langle n\rangle \cap \mathbb{R}_k\langle n\rangle$, $k \geq 0$, zovemo podprostor k-**homogenih harmonijskih polinoma**. Evidentno je $H_0\langle n\rangle = \mathbb{R}_0\langle n\rangle = \mathbb{R}$ i $H_1\langle n\rangle = \mathbb{R}_1\langle n\rangle$.*

PROPOZICIJA 7.12 *Ako su $f, g, h \in \mathbb{R}\langle n\rangle$ onda vrijede sljedeće tvrdnje:*
(1) $(g|fh) = (f(\partial)g|h)$
(2) $(g|\theta h) = (\Delta g|h)$, *gdje je* $\theta(x) = (x|x)$, $x \in \mathbb{R}^n$
(3) $\mathbb{R}_k\langle n\rangle = H_k\langle n\rangle + \theta \cdot \mathbb{R}_{k-2}\langle n\rangle$, $k \geq 2$, *i suma je ortogonalna.*
(4) $\mathbb{R}_k\langle n\rangle = \sum_{m=0}^{[k/2]} \theta^m H_{k-2m}\langle n\rangle$ *i suma je ortogonalna.*
(5) *Dimenzija prostora* $H_k\langle n\rangle$ *je dana formulom:*

$$\dim H_k\langle n\rangle = \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k-1}$$

Dokaz (1) Po definiciji skalarnog produkta na $\mathbb{R}\langle n\rangle$ imamo $(g|fh) = (hf|g) = (hf)(\partial)g(0) = h(\partial)f(\partial)g(0) = (h|f(\partial)g) = (f(\partial)g|h)$. (2) Slijedi iz (1) zbog $\theta(\partial) = \Delta$. (3) Slijedi iz (2), a (4) iteracijom iz (3). (5) Po (3) je

$$\dim H_k\langle n\rangle = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2} = \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k-1}$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

PRIMJERI 7.13

(1) Ako je $\tau(n,k) = \|\theta^k\|^2$ onda je

$$\tau(n,k) = (2k)!! \cdot n(n+2)\cdots(n+2k-2)$$

za $k \geq 1$ i $\tau(n,0) = 1$, gdje je $\theta(x) = (x|x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.
(2) Ako je $\varphi = \sum_{k\geq 0} \theta^k/\tau(n,k)$ onda je $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$ i $\Delta\varphi = \varphi$.
(3) Ako je $|\alpha| < 1$ onda je $\exp(\frac{1}{2}\alpha\theta) \in \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$ i

$$\|\exp(\tfrac{1}{2}\alpha\theta)\|^2 = (1-\alpha^2)^{-n/2}$$

dok $\exp(\frac{1}{2}\alpha\theta) \notin \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$, za $|\alpha| \geq 1$
(4) $\Psi(\delta^{\odot k}) = \theta^k/[(2k)!]^{1/2}$, $k \geq 0$
(5) Ako je $P_k \in L(\mathbb{R}\langle n\rangle)$ projektor na $\mathbb{R}_k\langle n\rangle$ onda je

$$P_k f = \sum_{|\omega|=k} \frac{1}{\omega!}\partial^\omega f(0) \cdot h_\omega$$

i vrijedi $P_k f(x) = (f|x^{*k})/k!$, $x \in \mathbb{R}^n$.
(6) Ako je $Q_k \in L(\mathbb{R}_k\langle n\rangle)$ projektor na $H_k\langle n\rangle$ onda za svaki $f \in \mathbb{R}_k\langle n\rangle$ vrijede sljedeće formule:
(a) $Q_2 f = (I - \frac{1}{2n}\theta\Delta)f$, za $k = 2$
(b) $Q_3 f = (I - \frac{1}{2(n+2)}\theta\Delta)f$, za $k = 3$
(c) $Q_4 f = (I - \frac{1}{2(n+4)}\theta\Delta + \frac{1}{8(n+2)(n+4)}\theta^2\Delta^2)f$, za $k = 4$

(d) Ako je $\tau(n,k)$ iz (1) onda je

$$Q_k f = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m \theta^m \Delta^m f}{\tau(n+2k-2m-2,m)}$$

(7) Neka je μ_n **standardna Gaussova mjera** na $\mathbb{R}^n$ tj.

$$d\mu_n(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp[-\tfrac{1}{2}(x|x)]dx,\ x \in \mathbb{R}^n$$

i $L_2(\mu_n)$ skup svih izmjerivih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\textstyle\int f(x)^2 d\mu_n(x) < \infty$$

Tada je $L_2(\mu_n)$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \textstyle\int f(x)g(x)d\mu_n(x)$$

Zamijetimo da je $\mathbb{R}\langle n\rangle \subset L_2(\mu_n)$ i

$$\xi(a) = \exp[a^* - \tfrac{1}{2}(a|a)] \in L_2(\mu_n), \quad a \in \mathbb{R}^n$$

Naime, u prostoru $L_2(\mu_n)$ vrijedi $(\xi(a)|\xi(b)) = \exp(a|b)$ i

$$(\exp a^* | \exp b^*) = \exp[(a|b) + \tfrac{1}{2}(a|a) + \tfrac{1}{2}(b|b)]$$

(8) Postoji jedinstven izomorfizam Hilbertovih prostora $\Phi : \overline{\odot \mathbb{R}^n} \to L_2(\mu_n)$ takav da vrijedi $\Phi(\exp_\odot a) = \xi(a)$, za svaki $a \in \mathbb{R}^n$.
(9) Ako je $\Xi : L_2(\mu_n) \to \overline{\mathbb{R}}\langle n\rangle$, $\Xi = \Psi\Phi^{-1}$, onda je Ξ izomorfizam Hilbertovih prostora i vrijedi $\Xi\xi(a) = \exp a^*$, za svaki $a \in \mathbb{R}^n$. Nadalje, za svaki $f \in L_2(\mu_n)$ vrijedi

$$\Xi f(x) = \textstyle\int f(x+y)d\mu_n(y) = \int f(y)\exp[(x|y) - \tfrac{1}{2}(x|x)]d\mu_n(y)$$

(10) Vrijede sljedeće tvrdnje:
(a) $\Xi f = [\exp(\tfrac{1}{2}\Delta)]f$, za $f \in \mathbb{R}\langle n\rangle$
(b) $\Xi f = f$, za $f \in H\langle n\rangle$
(c) $\Xi^{-1} f(x) = \int f(x+iy)d\mu_n(y)$, za $f \in \mathbb{R}\langle n\rangle$
(d) Vrijedi sljedeća formula:

$$\textstyle\int x^{\odot 2k} d\mu_n(x) = (2k-1)!! \cdot \delta^{\odot k}$$

7.2 Grassmannove algebre

Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i

$$\wedge X = \wedge_0 X \dot{+} \wedge_1 X \dot{+} \cdots \dot{+} \wedge_n X$$

Tada je $\wedge X$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije

$$\dim \wedge X = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Na $\wedge X$ uvodimo strukturu algebre. Množenje u $\wedge X$ prvo definiramo za antisimetrične tenzore ranga 1, a zatim ga proširujemo po linearnosti na cijeli $\wedge X$. Neka su $x_1, \ldots, x_k$ i $y_1, \ldots, y_m$ iz X, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq n$, $z = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \in \wedge_k X$ i $w = y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \in \wedge_m X$. Definiramo antisimetrični produkt od z i w sa

$$z \wedge w = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \in \wedge_{k+m} X$$

za $k + m \leq n$, i $z \wedge w = 0$, za $k + m > n$, pri čemu stavljamo $1 \wedge z = z \wedge 1 = z$, za svaki $z \in \wedge X$. Na taj način $\wedge X$ postaje algebra s jedinicom i zovemo je **Grassmannova algebra** od X (ili **vanjska algebra** od X ili **antisimetrična algebra** od X). Ona nije komutativna: npr. za gornje tenzore z i w vrijedi $w \wedge z = (-1)^{km} z \wedge w$.

Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza u X. Tada je

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}; i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n,\ i_1 < \cdots < i_k\}$$

baza u $\wedge_k X$ i ona ima $\binom{n}{k}$ elemenata. Radi lakšeg zapisivanja uvodimo oznaku $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = e_A$, gdje je $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, pri čemu smatramo da je A uređen uzlazno. Dakle $\{e_A; |A| = k\}$ je baza u $\wedge_k X$ pa je $\{e_A; A \subset \{1, \ldots, n\}\}$ baza u $\wedge X$, pri čemu je $e_\varnothing = 1$.

Dakle, svaki $z \in \wedge X$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku $z = \sum_A \alpha_A e_A$, za neke skalare α_A. Ako stavimo $z_k = \sum_{|A|=k} \alpha_A e_A$ onda je $z = \sum_k z_k$ i $z_k \in \wedge_k X$ za svaki k.

Neka su $A, B \subset \{1, \ldots, n\}$ uzlazno uređeni podskupovi. Označimo sa $n(k, A)$ broj elemenata iz A koji su strogo manji od k i uvedimo oznaku

$$n(A, B) = \sum_{k \in A} n(k, B)$$

Tada je $n(A, B) + n(B, A) = |A| \cdot |B| - |A \cap B|$ i specijalno $n(A, A) = \binom{k}{2}$, za $k = |A|$. U ovim oznakama imamo

$$e_A \wedge e_B = (-1)^{n(A,B)} e_{A \cup B},\ \text{za } A \cap B = \varnothing$$

i $e_A \wedge e_B = 0$, za $A \cap B \neq \emptyset$, pri čemu smatramo da je $A \cup B$ također uređen uzlazno. Zamijetimo da je

$$e_A \wedge e_B = (-1)^{|A|\cdot|B|} e_B \wedge e_A$$

Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ i e ortonormirana baza u X. Budući da je $\wedge X$ podprostor od $\otimes X$ (ali nije podalgebra zbog različitih operacija množenja) zaključujemo da je $\wedge X$ unitarni prostor nad $\mathbb{K}$. Po Propoziciji 6.20 je

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k | y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) = \tfrac{1}{k!} \det[(x_i|y_j)]$$

iz čega slijedi $(e_A|e_A) = 1/k!$, za $k = |A|$, i $(e_A|e_B) = 0$, za $A \neq B$. Ovaj skalarni produkt nam ne odgovara, iz tehničkih razloga, pa uvodimo novi zahtjevom: $(e_A|e_A) = 1$, za svaki A, i $(e_A|e_B) = 0$, za $A \neq B$. U ovom skalarnom produktu je $\{e_A; A \subset \{1, \ldots, n\}\}$ ortonormirana baza u $\wedge X$.

U daljem koristimo samo **novi skalarni produkt**. Dakle, ako su $z = \sum_A \alpha_A e_A$ i $w = \sum_A \beta_A e_A$ iz $\wedge X$ onda je

$$(z|w) = \textstyle\sum_A \alpha_A \overline{\beta}_A \quad \text{i} \quad \|z\|^2 = \sum_A |\alpha_A|^2$$

DEFINICIJA 7.14 *Neka su X i Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X,Y)$. Definiramo operator $\otimes A : \otimes X \to \otimes Y$ sa $\otimes A = \sum_{k\geq 0} \dot{+} \otimes_k A$, dok za $X = Y$ definiramo operator $\otimes^+ A : \otimes X \to \otimes X$ sa $\otimes^+ A = \sum_{k\geq 0} \dot{+} \otimes_k^+ A$.*

Analogno definiramo $\odot A$ i $\odot^+ A$ te $\wedge A$ i $\wedge^+ A$.

PROPOZICIJA 7.15 *Neka su X, Y i Z vektorski prostori nad $\mathbb{K}$, $A \in L(X,Y)$ i $B \in L(Y,Z)$. Tada vrijedi:*

(1) $(\otimes B)(\otimes A) = \otimes BA$

(2) *Ako je A bijekcija onda je $\otimes A$ također bijekcija i $(\otimes A)^{-1} = \otimes A^{-1}$*

(3) $\otimes^+(A+B) = \otimes^+ A + \otimes^+ B$, *za $X = Y = Z$*

(4) $\otimes \exp A = \exp \otimes^+ A$, *za $X = Y$*

Analogne tvrdnje vrijede za $\odot$ i $\wedge$

Dokaz Tvrdnje slijede iz 6.5, 6.14, 6.21 i 6.29. ■

PROPOZICIJA 7.16 *Neka su X i Y unitarni prostori nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X,Y)$. Tada vrijedi:*

(1) *Ako je A kontrakcija tj. $\|A\| \leq 1$ onda su $\otimes A$ i $\odot A$ neprekidni operatori i vrijedi formula $\|\otimes A\| = \|\odot A\| = 1$.*

(2) *Ako A nije kontrakcija onda su $\otimes A$ i $\odot A$ prekidni operatori.*

(3) *$\wedge A : \wedge X \to \wedge Y$ je neprekidni homomorfizam algebra, za svaki A.*

(4) $\operatorname{tr} \wedge A = \det(I + A)$, $\det \wedge A = (\det A)^m$, $m = 2^{n-1}$, *za $X = Y$.*

Dokaz Tvrdnje (1) i (2) slijede iz formule $\|\otimes A\| = \|\odot A\| = \sup_{k\geq 0}\|A\|^k$. (3) Evidentno. (4) Prva tvrdnja slijedi iz Propozicije 6.17, formula (3), za $z=1$, dok je $\det \wedge A = (\det A)^m$, gdje je $m = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$. ■

PROPOZICIJA 7.17 *Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i $A \in L(X)$. Tada vrijedi:*

(1) *Ako je A normalna (odnosno hermitaska) kontrakcija onda su $\otimes A$, $\odot A$ i $\wedge A$ normalne (odnosno hermitske) kontrakcije.*

(2) *Ako je A unitaran operator (odnosno projektor, parcijalna izometrija) onda su $\otimes A$, $\odot A$ i $\wedge A$ unitarni operatori (odnosno projektori, parcijalne izometrije).*

Dokaz Zamijetimo prvo da je po Teoremu 6.21 $(\otimes A)^* = \otimes A^*$ i $(\odot A)^* = \odot A^*$ za svaku kontrakciju $A \in L(X)$ i $(\wedge A)^* = \wedge A^*$ za svaki $A \in L(X)$ pa tvrdnje slijede iz prethodne dvije propozicije. ■

PRIMJERI 7.18 Neka je $A \in gl_n(\mathbb{R})$ i $M_A : \mathbb{R}\langle n\rangle \to \mathbb{R}\langle n\rangle$ operator definiran sa $M_A f(x) = f(A^\tau x)$. Tada vrijedi:

(1) $M_{AB} = M_A M_B$, $A, B \in gl_n(\mathbb{R})$
(2) Ako je A regularna onda je M_A regularan i $(M_A)^{-1} = M_{A^{-1}}$
(3) Ako je A kontrakcija onda je M_A također kontrakcija.
(4) Ako A nije kontrakcija onda je M_A prekidan operator.
(5) $M_A a^{*k} = (Aa)^{*k}$, $a \in \mathbb{R}^n$
(6) M_0 je projektor na $\mathbb{R}$
(7) $M_A = \Psi(\odot A)\Psi^{-1}$, gdje je Ψ iz Teorema 7.3.

DEFINICIJA 7.19 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup i*

$$\varphi : \Omega \to \wedge\mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = \textstyle\sum_A \varphi_A(x) e_A$$

*gdje je $\varphi_A \in C^\infty(\Omega)$, za svaki A. Tada se φ zove **diferencijalna forma** na Ω ili kraće **forma** na Ω. Skup svih forma na Ω označavamo sa $F(\Omega)$. Ako je $\varphi \in F(\Omega)$, $0 \leq k \leq n$ i*

$$\varphi_k(x) = \textstyle\sum_{|A|=k} \varphi_A(x) e_A$$

*onda se φ_k zove k-**forma** na Ω. Skup svih k-forma na Ω označavamo sa $F_k(\Omega)$. Evidentno je $F_0(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ i $F(\Omega) = F_0(\Omega) \dotplus \cdots \dotplus F_n(\Omega)$. Zamijetimo da je $F(\Omega)$ algebra s jedinicom i $\dim F(\Omega) = \infty$.*

DEFINICIJA 7.20 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup. Definiramo operator* ***vanjskog diferencijala*** $d : F(\Omega) \to F(\Omega)$ *sa:*

(1) $df(x) = \sum_i \partial_i f(x) e_i,\ f \in C^\infty(\Omega)$

(2) $d\varphi(x) = \sum_A d\varphi_A(x) \wedge e_A$, *gdje je* $\varphi = \sum_A \varphi_A e_A$

Tada se $d\varphi$ *se zove* ***vanjski diferencijal forme*** φ. *Zamijetimo da je* $dF_k(\Omega) \subset F_{k+1}(\Omega),\ k = 0, \ldots, n-1,\ i\ dF_n(\Omega) = \{0\}$.

PROPOZICIJA 7.21 *Vanjski diferencijal je nilpotentan indeksa* 2.

Dokaz (1) Ako je $f \in C^\infty(\Omega)$ onda je $df(x) = \sum_i \partial_i f(x) e_i$ pa je

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= \textstyle\sum_i d(\partial_i f(x)) \wedge e_i = \sum_i \sum_j \partial_j \partial_i f(x) e_j \wedge e_i \\ &= \textstyle\sum_{i<j} [\partial_i \partial_j f(x) - \partial_j \partial_i f(x)] e_i \wedge e_j = 0 \end{aligned}$$

(2) Ako je $\varphi \in F(\Omega)$ i $\varphi = \sum_A \varphi_A e_A$ onda je $\varphi_A \in C^\infty(\Omega)$ pa po (1) imamo $d^2\varphi(x) = \sum d^2\varphi_A(x) \wedge e_A = \sum 0 \wedge e_A = 0$. ■

PROPOZICIJA 7.22 *Ako je* $\varphi \in F_k(\Omega)$ *i* $\psi \in F_m(\Omega)$ *onda je*

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi$$

Dokaz Ako je $\varphi = \sum_{|A|=k} \varphi_A e_A$ i $\psi = \sum_{|B|=m} \psi_B e_B$ onda vrijedi formula $\varphi \wedge \psi = \sum \sum \varphi_A \psi_B e_A \wedge e_B$ pa imamo

$$\begin{aligned} d(\varphi \wedge \psi) &= \textstyle\sum \sum d(\varphi_A \psi_B) \wedge e_A \wedge e_B \\ &= \textstyle\sum \sum [(d\varphi_A)\psi_B + \varphi_A d\psi_B] \wedge e_A \wedge e_B \\ &= \textstyle\sum \sum (d\varphi_A)\psi_B \wedge e_A \wedge e_B + \sum \sum \varphi_A d\psi_B \wedge e_A \wedge e_B \\ &= \textstyle\sum d\varphi_A \wedge e_A \wedge \sum \psi_B e_B + (-1)^k \sum \varphi_A e_A \wedge \sum d\psi_B \wedge e_B \\ &= d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi \end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja. ■

TEOREM 7.23 *Neka su* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^k$ *i* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ *neprazni otvoreni skupovi i* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *funkcija klase* C^2 *tj. sve kordinate od* f *su klase* C^2. *Tada za operator* $f_* : F(\Omega_2) \to F(\Omega_1)$ *definiran sa*

$$f_*\varphi(x) = (\wedge f'(x)^\tau)\varphi(f(x)),\ x \in \Omega_1$$

vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) f_* *je homomorfizam algebra i* $d(f_*\varphi) = f_* d\varphi,\ \varphi \in F(\Omega_2)$.

(2) *Ako su* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *i* $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ *funkcije klase* C^2 *onda vrijedi formula* $(g \circ f)_* = f_* g_*$.

Dokaz U gornjoj formuli je $f'(x) = [\partial_i f_j(x)]$ derivacija od f u točki $x \in \Omega_1$ tj. $f'(x)$ je $k \times n$-matrica parcijalnih derivacija koordinata od f.
(1) Operator f_* je evidentno linearan. Nadalje, analogno kao i za operator $\wedge A$ dobijemo $f_*(\varphi \wedge \psi) = f_*\varphi \wedge f_*\psi$ iz čega slijedi prva tvrdnja. Drugu tvrdnju je dovoljno dokazati za forme oblika $\varphi(x) = \varphi_A(x)e_A$ što se provjeri neposredno. (2) Slijedi iz formule $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ i 7.15. ■

.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup i $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$ **standardni simpleks** dimenzije k u $\mathbb{R}^k$ s vrhovima $0, e_1, \ldots, e_k$. Ako je $\gamma : \Delta_k \to \Omega$ funkcija klase C^1 na Δ_k (tj. $\gamma \in C^1(\Omega')$, gdje je Ω' neka otvorena okolina od Δ_k) onda se γ zove **singularni simpleks** dimenzije k u Ω. Skup svih singularnih simpleksa dimenzije k u Ω označavamo sa $S'_k(\Omega)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Neka je $S_k(\Omega)$ vektorski prostor generiran sa $S'_k(\Omega)$ tj. svaki $\gamma \in S_k(\Omega)$ ima oblik $\gamma = \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_m\gamma_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ i $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in S'_k(\Omega)$. Tada se $S_k(\Omega)$ zove **vektorski prostor k-lanaca** u Ω, a $\gamma \in S_k(\Omega)$ se zove **k-lanac** u Ω. Nadalje, $S(\Omega) = S_0(\Omega) \dot{+} \cdots \dot{+} S_n(\Omega)$ se zove **vektorski prostor lanaca** u Ω, gdje je $S_0(\Omega) = \mathbb{R}^n$. Dakle, svaki $\gamma \in S(\Omega)$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n$, gdje je $\gamma_k \in S_k(\Omega)$ za svaki k.

Ako je $\gamma \in S'_k(\Omega)$ i $\varphi \in F_k(\Omega)$ onda je $\gamma_*\varphi$ k-forma na nekoj okolini Ω' od Δ_k pa postoji $f \in C^\infty(\Omega')$ takva da je $\gamma_*\varphi(x) = f(x)e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$, $x \in \Omega'$. Definiramo **integral od φ po singularnom simpleksu** γ sa

$$(\varphi|\gamma) = \int\limits_{\Delta_k} f(x)dx$$

Za $k = 0$ stavljamo $(\varphi|\gamma) = \varphi(\gamma(0))$. Specijalno, za $k = 1$ dobijemo

$$(\varphi|\gamma) = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i(\gamma(t))\gamma'_i(t)dt$$

gdje je $\varphi(x) = \varphi_1(x)e_1 + \cdots + \varphi_n(x)e_n$ i $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^\tau$, dok za $k = n$ dobijemo

$$(\varphi|\gamma) = \int\limits_{\Delta_n} g(\gamma(x)) \det \gamma'(x)dx$$

gdje je $\varphi(x) = g(x)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ i $\gamma \in S_n(\Omega)$.

Ako je $\gamma = \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_m\gamma_m \in S_k(\Omega)$ i $\varphi \in F_k(\Omega)$ onda definiramo **integral od φ po lancu** γ sa

$$(\varphi|\gamma) = \alpha_1(\varphi|\gamma_1) + \cdots + \alpha_m(\varphi|\gamma_m)$$

Ako su $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n \in S(\Omega)$, $\gamma_k \in S_k(\Omega)$, i $\varphi = \varphi_0 + \cdots + \varphi_n \in F(\Omega)$, $\varphi_k \in F_k(\Omega)$, za svaki k, onda definiramo **integral od φ po** γ sa

$$(\varphi|\gamma) = (\varphi_0|\gamma_0) + \cdots + (\varphi_n|\gamma_n)$$

Ako su $\gamma_1, \gamma_2 \in S(\Omega)$ i $(\varphi|\gamma_1) = (\varphi|\gamma_2)$ za svaki $\varphi \in F(\Omega)$ onda kažemo da su γ_1 i γ_2 **homologni** i pišemo $\gamma_1 \simeq \gamma_2$. Kažemo da je forma $\varphi \in F(\Omega)$ **zatvorena** ako vrijedi $d\varphi = 0$. Vektorski podprostor svih zatvorenih forma $\varphi \in F(\Omega)$ označavamo sa $Z(\Omega)$. Kažemo da je forma $\varphi \in F(\Omega)$ **egzaktna** ako vrijedi $\varphi = d\psi$, za neki $\psi \in F(\Omega)$. Vektorski podprostor svih egzaktnih forma $\varphi \in F(\Omega)$ označavamo sa $E(\Omega)$. Po Propoziciji 7.22 je $Z(\Omega)$ podalgebra od $F(\Omega)$, a $E(\Omega)$ je **ideal** u $Z(\Omega)$. Kvocijentna algebra $Z(\Omega)/E(\Omega)$ se zove **algebra kohomologije** od Ω.

TEOREM 7.24 (Stokes)
Postoji operator $\partial : S(\Omega) \to S(\Omega)$ takav da je $\partial S_{k+1}(\Omega) \subset S_k(\Omega)$, $k = 0, \ldots, n-1$, pri čemu vrijedi formula $(d\varphi|\gamma) = (\varphi|\partial\gamma)$, $\varphi \in F(\Omega)$, $\gamma \in S(\Omega)$.
*Ovu formulu zovemo **Stokesova formula**, a operator ∂ zovemo **operator ruba** na $S(\Omega)$.*

Dokaz Dokaz je dosta kompliciran pa ga ne navodimo. ■

KOROLAR 7.25 *Ako je $\varphi \in F(\Omega)$ i $\gamma \in S(\Omega)$ onda vrijedi:*
(1) $(\varphi|\partial^2\gamma) = (d\varphi|\partial\gamma) = 0$
(2) $(\varphi|\partial\gamma) = 0$, $\varphi \in Z(\Omega)$

Dokaz Tvrdnje slijede iz prethodnog teorema i $d^2 = 0$. ■

7.3 Cliffordove algebre

Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n i e baza u X. Ako su $x, y \in X$, $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ i $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, -1, 1\}$ onda definiramo bilinearni funkcional $B : X \times X \to \mathbb{K}$ sa $B(x, y) = \sum \varepsilon_i x_i y_i$. Za njega vrijedi $B(x, y) = B(y, x)$, $x, y \in X$. Ako su svi $\varepsilon_i \neq 0$ onda kažemo da je B nedegeneriran bilinearni funkcional. Funkcija $q : X \to \mathbb{K}$ definirana sa $q(x) = B(x, x)$, $x \in X$, se zove **kvadratni funkcional** pridružen bilinearnom funkcionalu B, pri čemu vrijedi $B(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$.

Na vektorskom prostoru $\wedge X$ umjesto množenja $\wedge$ uvodimo novo množenje sljedećom formulom

$$e_A e_B = (-1)^{n(A,B)} \prod_{k \in A \cap B} q(e_k) \cdot e_{A \triangle B}$$

gdje je $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ simetrična razlika skupova A i B uređena uzlazno, a zatim ga proširimo po linearnosti. Zamijetimo da je

$$e_A e_B = (-1)^{n(A,B)+n(B,A)} e_B e_A$$

Na ovaj način $\wedge X$ postaje algebra s jedinicom u odnosu na novu operaciju množenja i zove se **Cliffordova algebra para** (X, q) i označavamo je sa $C(X, q)$. Množenje u $C(X, q)$ zovemo **Cliffordov produkt**. Podprostor $\wedge_k X$ označavamo sa $C_k(X, q)$, $k = 0, \ldots, n$, i zovemo ga k-**ti homogeni podprostor** ili k-**ti kaos** u $C(X, q)$. Dakle, $C(X, q) = C_0(X, q) + \cdots + C_n(X, q)$.

Cliffordovu algebru $C(X, -q)$ zovemo **suprotna algebra** od $C(X, q)$ i označavamo je sa $C^\natural(X, q)$.

Neposredno iz definicije slijedi:

(a) $e_i^2 = q(e_i) = \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$

(b) $e_i e_j + e_j e_i = 0$, $i \neq j$

(c) $x^2 = q(x)$, $x \in X$.

(d) $xy + yx = 2B(x, y)$, $x, y \in X$

(e) $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $i_1 < \cdots < i_k$

(f) Svaki $z \in C(X, q)$ je linearna kombinacija tenzora oblika $x_1 x_2 \cdots x_k$, gdje su $x_i \in X$, $1 \leq k \leq n$, i jedinice $1 \in \mathbb{K}$.

(g) Ako je $q = 0$ tj. $\varepsilon_i = 0$, za svaki i, onda je Cliffordov produkt jednak Grassmannovom produktu $\wedge$ pa je $C(X, 0) = \wedge X$.

Ako je X unitarni prostor s ortonormiranom bazom e i $\varepsilon_i = 1$ za svaki i onda se $C(X, q)$ zove **Cliffordova algebra euklidskog prostora** X i označavamo je sa CX. U ovom slučaju je $B(x, y) = (x|y)$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dok je $B(x, y) = (x|Jy)$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gdje je J normalno konjugiranje na X definirano bazom e. Element od CX se zove **spinor**. Zamijetimo da su CX i $\wedge X$ jednaki kao euklidski prostori, a razlikuju se samo po operacijama množenja, tj. razlikuju se kao algebre. Suprotnu algebru od CX označavamo sa $C^\natural X$.

Može se provjeriti, koristeći formule (c) i (d), da definicija Cliffordove algebre ne zavisi od baze e, nego samo od B, odnosno q. Svaku bazu e od X, za koju vrijede formule (a) i (b), zovemo **Cliffordova baza od** $C(X, q)$.

Neka su X i Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$ i $A \in L(X, Y)$. Definiramo operator $CA : C(X, q_1) \to C(Y, q_2)$ formulom $(CA)(x_1 x_2 \cdots x_k) = Ax_1 Ax_2 \cdots Ax_k$, $x_i \in X$, $1 \leq k \leq n$, i $(CA)1 = 1$, proširen po linearnosti. Tada je $C(A_1 A_2) = (CA_1)(CA_2)$, za svaki $A_1 \in L(Y, Z)$ i $A_2 \in L(X, Y)$, što znači da je CA **homomorfizam Cliffordovih algebra**. Ako je A bijekcija onda je CA **izomorfizam Cliffordovih algebra**. Ako je $A \in L(X)$ regularan operator onda je CA **automorfizam** od $C(X, q)$. Na isti način se definira CA za antilinearni operator A. Zamijetimo da za $X = Y$ podprostori $C_k(X, q)$ ne moraju biti invarijantni na CA.

PRIMJERI 7.26

(1) Polje $\mathbb{K}$ je Cliffordova algebra nad $\mathbb{K}$. Naime, $\mathbb{K} = C(\{0\}, 0)$.

(2) Polje $\mathbb{C}$ je Cliffordova algebra nad $\mathbb{R}$. Naime, ako je $X = \mathbb{K}e_1$ i $q(e_1) = \varepsilon_1$ onda je $C(X,q) = \mathbb{K} + \mathbb{K}e_1$, pri čemu je $e_1^2 = \varepsilon_1$. Specijalno, ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i $\varepsilon_1 = -1$ onda je Cliffordova algebra $C(X,q)$ izomorfna sa $\mathbb{C}$, a izomorfizam je dan sa $\alpha + \beta e_1 \mapsto \alpha + \beta i$. Dakle, $\mathbb{C} = C^\natural\mathbb{R}$.
(3) Neka je $X = \mathbb{K}^2$ i $q(x) = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2$. Tada je $e_1^2 = \varepsilon_1$, $e_2^2 = \varepsilon_2$ i $e_1e_2 = -e_2e_1$ pa je $C(X,q) = \mathbb{K} + \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2 + \mathbb{K}e_1e_2$. Ova algebra se zove **algebra kvaterniona** nad $\mathbb{K}$ ako je $\varepsilon_1 \neq 0$ i $\varepsilon_2 \neq 0$. Specijalno, ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ onda je $C(X,q) = \mathbb{H}$ **klasična algebra kvaterniona**.

Dakle, vrijedi formula $\mathbb{H} = C^\natural\mathbb{R}^2$.
(4) Ako su A i B algebre nad $\mathbb{K}$ onda je $A \otimes B$ također algebra nad $\mathbb{K}$ s operacijom množenja $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$, $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, proširenom po linearnosti.
(5) Cliffordova algebra $C(X,q)$ se može definirati, na ekvivalentan način, kao kvocijentna algebra $\otimes X/J$, gdje je J ideal u $\otimes X$ generiran svim tenzorima oblika $x \otimes x - q(x)$, $x \in X$.
(6) $L(C(X,q))$ je Cliffordova algebra izomorfna sa $gl_{2^n}(\mathbb{K})$, $n = \dim X$.
(7) Neka je $z \mapsto z^\pi$ preslikavanje na $C(X,q)$ definirano sa $e_A^\pi = (-1)^{|A|}e_A$, prošireno po linearnosti. Zamijetimo da je π jednak $C(-I)$. Tada je π **automorfizam** od $C(X,q)$ reda 2 i zovemo ga **parnost**. Kažemo da je $z \in C(X,q)$ **paran** ako vrijedi $z^\pi = z$, odnosno **neparan** ako vrijedi $z^\pi = -z$. Svaki $z \in C(X,q)$ se može napisati, na jedinstven način, u obliku $z = z_+ + z_-$, gdje je z_+ paran, a z_- neparan, pri čemu vrijedi $z_+ = \frac{1}{2}(z+z^\pi)$, $z_- = \frac{1}{2}(z-z^\pi)$. Označimo sa $C_+(X,q)$ skup svih parnih elemenata iz $C(X,q)$, a sa $C_-(X,q)$ skup svih neparnih elemenata iz $C(X,q)$. Tada je $C_+(X,q)$ direktna suma svih parnih kaosa, a $C_-(X,q)$ direktna suma svih neparnih kaosa, pri čemu je $C(X,q) = C_+(X,q) + C_-(X,q)$ i ova suma je direktna. Nadalje, $C_+(X,q)$ je podalgebra od $C(X,q)$ i zovemo je **parna podalgebra** od $C(X,q)$.
(8) Neka je $z \mapsto z^\tau$ preslikavanje na $C(X,q)$ definirano sa $e_A^\tau = (-1)^{n(A,A)}e_A$, prošireno po linearnosti. Tada je τ **antiautomorfizam** od $C(X,q)$ reda 2 i zovemo ga **transponiranje**.
(9) Ako je $z = \sum_A \alpha_A e_A \in CX$ i $z^* = \sum_A (-1)^{n(A,A)}\overline{\alpha}_A e_A$ onda je preslikavanje $z \mapsto z^*$ **involucija algebre** CX. Zamijetimo da je $*$ kompozicija transponiranja i konjugiranja, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tj. $z^* = (CJ)z^\tau = ((CJ)z)^\tau$, gdje je J normalno konjugiranje na X definirano bazom e, dok je $* = \tau$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ako je $x \in X$ onda je $x^* = Jx$, za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dok je $x^* = x$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Za bilinearnu formu B vrijedi $B(x,y) = (x|y^*)$.

Kažemo da je $z \in CX$ **normalan** ako vrijedi $zz^* = z^*z$. Hermitske, antihermitske i unitarne spinore te projektore i parcijalne izometrije definiramo na uobičajeni način.

LEMA 7.27 *Ako je e ortonormirana baza u X onda vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $(e_i e_A|e_B) = (e_A|e_i e_B)$, $i = 1, \ldots, n$
(2) $(e_A e_B|e_C) = (-1)^{n(A,A)}(e_B|e_A e_C)$
(3) $(ze_A|e_B) = (e_A|z^* e_B)$, $z \in CX$, *gdje je* z^* *iz prethodnog primjera.*

Dokaz Tvrdnja (1) se provjeri neposredno, a ostale slijede iz (1). ■

LEMA 7.28 *Neka je* $B : CX \to L(CX)$ *operator definiran sa* $B(a)b = ab$, $a, b \in CX$. *Tada je* B *monomorfizam algebra s involucijom.*

Dokaz B je evidentno homomorfizam algebra. Ako je $B(a) = B(b)$ onda je $B(a)1 = B(b)1$ pa je $a = b$, što znači da je B injektivan. Nadalje, po prethodnoj lemi je $(B(a)b|c) = (ab|c) = (b|a^*c) = (b|B(a^*)c)$ iz čega slijedi $B(a)^* = B(a^*)$, za svaki $a \in CX$. ■

TEOREM 7.29 *Neka je* X *euklidski prostor nad* $\mathbb{K}$. *Tada je* CX C^**-algebra s normom* $\|a\|_\infty = \|B(a)\|$, $a \in CX$, *i zovemo je* ***Cliffordova*** C^****-algebra*** *euklidskog prostora* X.

Dokaz Zamijetimo prvo da je $\|a\|_\infty = \max_{b \neq 0} \|ab\|/\|b\|$. Nadalje, ovo je C^*-norma zbog $\|a^*a\|_\infty = \|B(a^*a)\| = \|B(a)^*B(a)\| = \|B(a)\|^2 = \|a\|_\infty^2$, $a \in CX$, pa tvrdnja slijedi iz prethodne leme. Zamijetimo također da norma $\|a\| = (a|a)^{1/2}$ na CX, generirana skalarnim produktom, nije C^*-norma. ■

PRIMJERI 7.30 Neka je X unitarni prostor nad $\mathbb{K}$ dimenzije n.

(1) $x \wedge y = xy - (x|y^*) = \frac{1}{2}(xy - yx)$, $x, y \in X \subset CX$.
(2) Neka su $x_1, \ldots, x_k \in X$ i $a = x_1 \cdots x_k \in CX$. Ako su $x_1, \ldots, x_k$ normalni spinori onda je $aa^* = (x_1|x_1) \cdots (x_k|x_k)$ pa je $\|a\|_\infty = \|x_1\| \cdots \|x_k\|$. Specijalno je $\|x\|_\infty = \|x\|$ za svaki normalni spinor $x \in X$. Zamijetimo da je $x \in X$ normalan spinor ako i samo ako je $x^* = \alpha x$, za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, što je ekvivalentno sa $xx^* = (x|x)$.

Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i $n \geq 2$ onda X sadrži i nilpotentne spinore, npr. $x = e_1 + ie_2$ je nilpotentan zbog $x^2 = 1 + i^2 = 0$ pri čemu je $x^*x - xx^* = 4ie_1e_2$.
(3) Neka su $x_1, \ldots, x_k \in X$ i

$$[x_1, \ldots, x_k]_+ = \textstyle\sum_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}, \quad [x_1, \ldots, x_k]_- = \textstyle\sum_\sigma \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}$$

Tada se $[x_1, \ldots, x_k]_+$ zove k-**antikomutator** od $x_1, \ldots, x_k$, dok se $[x_1, \ldots, x_k]_-$ zove k-**komutator** od $x_1, \ldots, x_k$. Ako su $x_1, \ldots, x_k$ hermitski spinori onda vrijedi:
(a) $[x_1, \ldots, x_k]_- = k! \cdot x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$
(b) $[x_1, \ldots, x_{2k}]_+ \in \mathbb{K}$, $[x_1, \ldots, x_{2k+1}]_+ \in X$

(c) Ako je $a = \frac{1}{k!}[x_1, \ldots, x_k]_-$ onda je $a^2 \in \mathbb{R}$ pa je $aa^* = (-1)^m a^2$, $m = \binom{k}{2}$, iz čega slijedi $\|a\|_\infty = \Gamma(x_1, \ldots, x_k)^{1/2}$.

(4) Neka je $\varphi : CX \to \mathbb{K}$, $\varphi(a) = (a|1)$. Tada je φ linearni funkcional norme 1 i zovemo ga **vakuumsko stanje** na CX. Za njega vrijedi:

(a) $\varphi(e_A) = 0$, $A \neq \varnothing$, i $\varphi(1) = 1$

(b) $\varphi(ab) = \varphi(ba)$, za svaki $a, b \in CX$

(c) $\varphi(a^*a) \geq 0$, za svaki $a \in CX$

(d) Ako je $\varphi(a^*a) = 0$ onda je $a = 0$

(e) $\varphi(xy) = (x|y^*)$, za svaki $x, y \in X$

Nadalje, neka je $\psi : CX \to \mathbb{K}$, $\psi(a) = (a|e)$, gdje je $e = e_1 e_2 \cdots e_n$ jedinični spinor iz posljednjeg kaosa. Tada je ψ linearni funkcional norme 1 i zove se **Berezinov integral**. Za njega vrijedi $\psi(ea) = \varphi(a)$, budući da je e unitaran spinor.

(5) Neka je $\Phi : \mathbb{R}^3 \to gl_2(\mathbb{C})$ operator definiran sa

$$\Phi(x) = x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ove tri matrice se zovu **Paulijeve matrice**. Tada vrijedi:

(a) $\Phi(x)^* = \Phi(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}^3$

(b) $\Phi(x)\Phi(y) + \Phi(y)\Phi(x) = 2(x|y)I$, za svaki $x, y \in \mathbb{R}^3$

(c) Φ se proširuje, na jedinstven način, do izomorfizma Cliffordove algebre $C\mathbb{R}^3$ i $gl_2(\mathbb{C})$, kao algebre nad $\mathbb{R}$.

Zamijetimo da je $gl_2(\mathbb{C})$ također izomorfna sa $C\mathbb{C}^2$ što znači da je $gl_2(\mathbb{C})$ Cliffordova algebra i nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

(6) Ako je $a \in CX$ onda definiramo operatore $B(a), B'(a) \in L(CX)$ sa $B(a)b = ab$, $B'(a)b = a * b$, gdje smo sa $a * b$ označili produkt u suprotnoj algebri $C^\natural X$. Specijalno, za $x \in X$ imamo

(a) $B(x)b = xb$, $b \in CX$

(b) $B'(x)b = b^\pi x$, $b \in CX$

Tada se $B(x)$ zove **operator položaja čestice** x, a $B'(x)$ **operator impulsa čestice** x. Nadalje, za svaki $x, y \in X$ vrijedi:

(c) $B(x)B(y) + B(y)B(x) = 2(x|y^*)I$

(d) $B'(x)B'(y) + B'(y)B'(x) = -2(x|y^*)I$

(e) $B(x)B'(y) + B'(y)B(x) = 0$

(f) $B(x)^* = B(x^*)$, $B'(x)^* = -B'(x^*)$

(g) $\operatorname{tr} B(x) = \operatorname{tr} B'(x) = 0$

(h) $\det B(x) = \det B'(x) = (x|x^*)^m$, $m = 2^{n-1}$, $n \geq 2$

(i) Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e ortonormirana baza u X i Y podprostor od $L(CX)$ s bazom $ce = (B(e_1), \ldots, B(e_n), iB'(e_1), \ldots, iB'(e_n))$ onda je $L(CX) = CY$. Baza ce je **Cliffordova baza** od $L(CX)$.

(7) Neka je $A(x) = \frac{1}{2}(B(x) - B'(x)) \in L(CX)$, $x \in X$. Tada se $A(x)$ zove **anihilacijski operator čestice** x, dok se operator $A(x)^* = \frac{1}{2}(B(x^*) + B'(x^*))$ zove **kreacijski operator čestice** x. Nadalje, $A(x)$ je nilpotentan operator indeksa 2 i za svaki $x, y \in X$ vrijedi:

(a) $B(x) = A(x^*)^* + A(x)$, $B'(x) = A(x^*)^* - A(x)$

(b) $A(x)A(y) + A(y)A(x) = 0$

(c) $A(x)A(y)^* + A(y)^*A(x) = (x|y)I$

(d) $A(x)1 = 0$, $A(x)y = (x|y^*)$

(e) $A(x)^*1 = x^*$, $A(x)^*y = x^* \wedge y$

Jedinica $1 \in CX$ se zove **vakuum**. Dakle, operator $A(x)^*$ **kreira česticu** x^* **iz vakuuma**, dok $A(x^*)^*$ kreira česticu x iz vakuuma.

(8) Neka je Ω neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Ako u algebri diferencijalnih forma $F(\Omega)$ umjesto Grassmannovog produkta $\wedge$ uvedemo Cliffordov produkt definiran kvadratnom formom $q(x) = \sum_i \varepsilon_i x_i^2$, onda se algebra $F(\Omega)$, s novim produktom, označava sa $F(\Omega, q)$.

Definiramo **Cliffordov operator** $\Box : F(\Omega, q) \to F(\Omega, q)$ sa:

(a) $\Box f(x) = \sum_i \partial_i f(x) e_i$, $f \in C^\infty(\Omega)$

(b) $\Box\varphi(x) = \sum_A \Box\varphi_A(x) \cdot e_A$, gdje je $\varphi(x) = \sum_A \varphi_A(x) e_A$

Tada se $\Box\varphi$ zove **Cliffordova derivacija** od φ, a operator $\Box^2 = \sum_i \varepsilon_i \partial_i^2$ zovemo **Clifford-Laplaceov** operator. Nadalje, vrijedi $\Box^{2k+1} = \Box^{2k}\Box$ i

$$\Box^{2k} = \sum_{|\omega|=k} \frac{k!}{\omega!} \varepsilon^\omega \partial^{2\omega}$$

gdje je $\varepsilon^\omega = \varepsilon_1^{\omega_1} \cdots \varepsilon_n^{\omega_n}$. Ako je $q = 0$ tj. $\varepsilon_i = 0$, za svaki i, onda je $\Box = d$ operator vanjskog diferencijala.

(9) U fizici je posebno važna algebra $F(\mathbb{R}^4, q)$, $q(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Ona se zove **algebra prostora-vremena**. Pripadni Clifford-Laplaceov operator $\Box^2 = \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 - \partial_4^2$ zovemo **Dalambertov operator** ili **Dalambertian**.

Ako su $\varphi, \varphi_0 \in F(\mathbb{R}^4, q)$ onda se jednadžba $\Box\varphi = \varphi_0$ zove **Maxwellova jednadžba** i ona je jedna od najvažnijih jednadžbi u elektrodinamici. Ako Maxwellovu jednadžbu raspišemo po koordinatama dobijemo 16 parcijalnih diferencijalnih jednadžbi od kojih su samo neke zanimljive. Koordinatne funkcije φ_A u fizici mogu biti i općenitije, a ne nužno klase C^∞.