Ljuban Dedić

VJEROJATNOST I STATISTIKA

skripta

21.02.2007

Sadržaj

Predgovor

Ova skripta je napisana s namjerom da pomogne studentima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Splitu pri polaganju kolegija **Uvod u vjerojatnost i statistiku**. Podijeljena je u pet poglavlja.

U prvom poglavlju se proučava diskretni vjerojatnostni prostor. Uvode se diskretne slučajne varijable, njihove distribucije, srednje vrijednosti, momenti i disperzije. Pozornost se posvećuje važnim primjerima slučajnih varijabla kao što su Poissonova, binomijalna, Bernoullijeva, polinomijalna, geometrijska itd. Promatraju se prostori integrabilnih diskretnih slučajnih varijabla i uvodi uvjetno očekivanje te uvjetna vjerojatnost. Dokazuju se i neke elementarne verzije zakona velikih brojeva.

U drugom poglavlju se uvode prostori s mjerom i vjerojatnostni prostori, izmjerive funkcije i slučajne varijable te funkcije distribucije i gustoće na n-dimenzionalnom realnom prostoru. Uvodi se i pojam Lebesgueove mjere.

U trećem poglavlju se uvodi Lebesgueov integral izmjerive funkcije na prostoru s mjerom i vjerojatnostnom prostoru te proučavaju neka njegova elementarna svojstva. Daje se usporedba Riemannovog i Lebesgueovog integrala te definira integral vektorskih i matričnih funkcija. U četvrtom poglavlju se uvode L_p-prostori i proučavaju neka njihova osnovna svojstva, pri čemu je naglasak na primjerima kao što su Hilbertovi prostori te l_p-prostori.

Posljednje poglavlje je središnji dio skripte. U njemu se proučavaju slučajne varijable, nizovi i redovi slučajnih varijabla, nezavisnost slučajnih varijabla, njihove distribucije i marginalne distribucije te razne vrste konvergencija slučajnih varijabla. Posebna pozornost se posvećuje slučajnim uzorcima, njihovim statistikama, srednjim vrijednostima i disperzijama slučajnih uzoraka, rednim statistikama te distribucijama povezanim sa slučajnim uzorcima kao što su Studentova, Fischerova, Gaussova, χ^2-distribucija itd. U ovom poglavlju se proučavaju slabi i jaki zakoni velikih brojeva te centralni granični teorem u nekoliko jednostavnih verzija.

Skripta obiluje primjerima svih vrsta - od jednostavnih do suptilnih kao što su Cantorova mjera i njezini momenti, Rademacherovi nizovi te Brownovo gibanje i Wienerova mjera.

Poglavlje 1

Diskretna vjerojatnost

1.1 Diskretni vjerojatnostni prostor

DEFINICIJA 1.1 *Neka je* Ω *neprazan konačan ili prebrojiv skup,* 2^{Ω} *partitivni skup od* Ω *i* $P : 2^{\Omega} \to [0,1]$ *funkcija za koju vrijedi:*

(a) $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1$

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,,$ *za* $A \cap B = \varnothing$

Tada se P *zove* ***vjerojatnost*** *na* Ω*, a uređeni par* (Ω, P) *se zove* ***diskretni vjerojatnostni prostor.*** *Svaki* $A \subset \Omega$ *se zove* ***događaj****, a* $P(A)$ *se zove* ***vjerojatnost događaja*** A*. Svaki jednočlani podskup od* Ω *se zove* ***elementarni događaj****. Svojstvo* (b) *se zove* ***aditivnost od*** P*.*

TEOREM 1.2 *Neka je* (Ω, P) *diskretni vjerojatnostni prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *Ako su* $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ *disjunktni i* $n \in \mathbb{N}$ *onda je*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

(2) *Ako je* $A \subset B$ *onda je* $P(A) \leq P(B)$ *(**Monotonost od** P).*

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,,\ A, B \subset \Omega$

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)\,,\ A \subset \Omega$

(5) *Svaki događaj* $A \subset \Omega,\ A \neq \varnothing$*, je unija elementarnih događaja i vrijedi*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

(6) *Ako su* $A_n \subset \Omega,\ n \geq 1,$ *disjunktni onda je*

$$P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$$

Ovo svojstvo zovemo σ-***aditivnost vjerojatnosti*** P*.*

Dokaz (1) Slijedi iteracijom iz aditivnosti od P. (2) Iz $A \subset B$ slijedi $B = A \cup (B \backslash A)$ pa je $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$ što znači $P(B) \geq P(A)$. (3) $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ i $(A \cap B) \cup (B \backslash A) = B$ pa je $P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A)$ i $P(A \cap B) + P(B \backslash A) = P(B)$ iz čega dobijemo tvrdnju. (4) $A \cup A^c = \Omega$ pa je $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$. (5) Slijedi iz (1) i (2) i apsolutne konvergencije danog reda. (6) Neka je $A = \bigcup A_n$. Tada grupiranjem članova u sumi po (5) imamo

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_n \sum_{\omega \in A_n} P(\{\omega\}) = \sum_n P(A_n)$$

pa slijedi tvrdnja.

PRIMJERI 1.3

(1) Neka je Ω neprazan konačan skup, $|\Omega| = n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$. Ako je P vjerojatnost na Ω onda je $1 = P(\{\omega_1\}) + \cdots + P(\{\omega_n\})$ pa ako stavimo $p_k = P(\{\omega_k\})$, $k = 1, \ldots, n$, onda je

$$p_1 + \cdots + p_n = 1, \ 0 \leq p_k \leq 1, \ k = 1, \ldots, n$$

Ako uvedemo oznaku $p = (p_1, \ldots, p_n)^\tau$ onda je $p \in \mathbb{R}^n$ i skup svih ovakvih p, pridruženih vjerojatnostima na Ω, čini **simpleks** u $\mathbb{R}^n$ dimenzije $n-1$ čiji su **vrhovi** bazni vektori $e_1, \ldots, e_n$.
(2) Neka su Ω i P iz (1). Kažemo da je P **uniformna diskretna vjerojatnost** na Ω ako je $P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\})$, $\omega, \omega' \in \Omega$. Tada je $P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n}$, za svaki k. Pripadni vektor pridružen ovoj vjerojatnosti je $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^\tau \in \mathbb{R}^n$ i to je upravo **težište simpleksa**.
(3) Neka je Ω prebrojiv skup, $\Omega = \{\omega_n; n \in \mathbb{N}\}$ i P vjerojatnost na Ω. Ako uvedemo oznaku $p_k = P(\{\omega_k\})$, $k \geq 1$, onda je

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \ 0 \leq p_k \leq 1, \ k \geq 1$$

Obratno, ako zadamo niz (p_k), za koji vrijedi gornji uvjet, onda postoji jedinstvena vjerojatnost P na Ω, takva da je $p_k = P(\{\omega_k\})$, $k \geq 1$. Dakle, sve vjerojatnosti na Ω čine beskonačno dimenzionalni simpleks u $\mathbb{R}^\infty$. Zamijetimo da ovaj simpleks nema težište, tj. ne postoji uniformna diskretna vjerojatnost na prebrojivom skupu Ω.

DEFINICIJA 1.4 *Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor.*
(1) *Kažemo da su $A, B \subset \Omega$ **nezavisni** ako vrijedi $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.*
(2) *Kažemo da je **familija** $\{A_i \subset \Omega; i \in I\}$ **nezavisna**, ako za svaku konačnu podfamiliju $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ vrijedi*

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n})$$

(3) *Neka je $A \subset \Omega$, $P(A) > 0$. Tada se funkcija*

$$P_A : 2^{\Omega} \to [0,1]\,,\ P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$$

zove ***uvjetna vjerojatnost uz uvjet*** *A. Ona je, evidentno, vjerojatnost na Ω i za nju uvodimo dodatnu oznaku $P_A(B) = P(B|A)$.*
(4) *Konačna ili prebrojiva familija $\{E_n; n \geq 1\}$ nepraznih disjunktnih podskupova od Ω se zove* ***particija*** *od Ω ili* ***potpun sistem događaja*** *na Ω ako je $\Omega = \bigcup_n E_n$.*

PRIMJERI 1.5

(1) Ako su A i B nezavisni, onda su također nezavisni sljedeći parovi: $(A^c, B)\,,\ (A, B^c)\,,\ (A^c, B^c)$.
(2) Ako je familija $\{A_i; i \in I\}$ nezavisna, onda je također nezavisna i familija $\{B_i; i \in I\}$, gdje je $B_i = A_i$ ili A_i^c.
(3) Ako je $P(A) = 0$ ili 1, onda je A nezavisan od svakog drugog događaja, čak i od samog sebe!
(4) Ako je neka familija nezavisna, onda je nezavisna svaka njezina prava podfamilija. Obrat ne vrijedi, što pokazuje slijedeći primjer. Neka su A_1 i A_2 nezavisni, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ i $A_3 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$. Tada su svaka dva događaja iz $\{A_1, A_2, A_3\}$ nezavisna, ali familija $\{A_1, A_2, A_3\}$ nije nezavisna zbog $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)$.
(5) Ako je $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \neq 0$ onda vrijedi formula $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})$.

PROPOZICIJA 1.6 *Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor i $\{E_n\}$ potpun sistem događaja. Tada za $A \subset \Omega$ vrijedi:*
(a) *$P(A) = \sum_n P(E_n)\, P(A|E_n)$ (**Formula totalne vjerojatnosti**).*
(b) *$P(E_n|A) = P(E_n)\, P(A|E_n)/P(A)$, $P(A) \neq 0$, (**Bayesova formula**).*

Dokaz (a) Koristimo σ-aditivnost od P. Za $A \subset \Omega$ je $P(A) = P(A \cup \Omega) = P(A \cap \bigcup E_n) = P(\bigcup (A \cap E_n)) = \sum P(A \cap E_n) = \sum P(E_n)\, P(A|E_n)$.
(b) $P(E_n|A) = P(E_n \cap A)/P(A) = P(E_n)\, P(A|E_n)/P(A)$.

PROPOZICIJA 1.7 *Neka su (Ω_1, P_1) i (Ω_2, P_2) diskretni vjerojatnostni prostor i $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Tada postoji jedinstvena vjerojatnost P na Ω takva da je*

$$P(A_1 \times A_2) = P(A_1)\, P(A_2)\,,\ A_1 \subset \Omega_1,\ A_2 \subset \Omega$$

Ova ***vjerojatnost*** *P* ***se zove produkt od*** *P_1* ***i*** *P_2 i označavamo je sa $P = P_1 \times P_2$. Diskretni vjerojatnostni prostor $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$ zovemo* ***produkt vjerojatnostnih prostora*** *(Ω_1, P_1) i (Ω_2, P_2).*

Dokaz P je jednoznačno određena svojim vrijednostima na elementarnim događajima $\{\omega\} \subset \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Definiramo P sa

$$P(\{\omega\}) = P_1(\{\omega_1\}) P_2(\{\omega_2\})$$

i po Teoremu 1.2 imamo

$$\begin{aligned} P(A_1 \times A_2) &= \sum_{\omega \in A_1 \times A_2} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega_1 \in A_1} \sum_{\omega_2 \in A_2} P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} \sum_{\omega_2 \in A_2} P_1(\{\omega_1\}) P_2(\{\omega_2\}) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} P_1(\{\omega_1\}) \sum_{\omega_2 \in A_2} P_2(\{\omega_2\}) \\ &= P_1(A_1) P_2(A_2) \end{aligned}$$

za svaki $A_1 \subset \Omega_1$, $A_2 \subset \Omega_1$.

NAPOMENA 1.8 Pri formulaciji praktičnih problema iz vjerojatnosti, često govorimo o "slučajnom eksperimentu" ili "pokusu". Formalni ekvivalent tog pojma je vjerojatnostni prostor (Ω, P). Ako je sada zadano n eksperimenata opisanih sa (Ω_i, P_i), $i = 1, \ldots, n$, onda novi složeni eksperiment "provesti sve dane eksperimente zajedno i nezavisno" je opisan produktom ovih vjerojatnostnih prostora $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, P_1 \times \ldots \times P_n)$. Posebno čest slučaj je ponavljanje danog eksperimenta, opisanog sa (Ω, P), nezavisno n puta, što se opisuje produktom $(\Omega, P)^n = (\Omega^n, P^n)$.

1.2 Diskretne slučajne varijable

DEFINICIJA 1.9 *Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostnti prostor.*

(1) *Neka je Ω_1 neprazan skup i $X : \Omega \to \Omega_1$ proizvoljna funkcija. Tada se X zove* ***slučajna varijabla u*** *Ω_1. Nama je najvažniji slučaj $\Omega_1 = \mathbb{R}^n$.*

(2) *Ako je X slučajna varijabla u Ω_1 i $E \subset \Omega_1$, onda uvedimo oznaku $(X \in E) = X^{-1}(E)$ i $P(X \in E) = P(X^{-1}(E))$. Ako je $\Omega_1 = \mathbb{R}$ onda također uvodimo oznaku $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$, i analogne oznake $(X < a)$, $(X > a)$, $(X \geq a)$, $(X = a)$.*

(3) *Neka je $A \subset \Omega$ i $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$, $\chi_A(\omega) = 1$, za $\omega \in A$, $\chi_A(\omega) = 0$, za $\omega \notin A$. Tada se χ_A zove* ***indikator*** *od A.*

PROPOZICIJA 1.10 *Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor i $X : \Omega \to \Omega_1$ slučajna varijabla u Ω_1. Ako je $\Omega' = X(\Omega)$ i $P' : 2^{\Omega'} \to [0,1]$, $P'(E) = P(X \in E)$, onda je (Ω', P') diskretni vjerojatnostni prostor. Vjerojatnost P' se zove* ***distribucija slučajne varijable*** *X i često je označavamo sa $P' = P_X$.*

Dokaz Ω' je, evidentno, najviše prebrojiv i $P'(\varnothing) = 0$, $P'(\Omega') = 1$. Ako su $E_1, E_2 \subset \Omega'$ disjunktni, onda su i $X^{-1}(E_1), X^{-1}(E_2) \subset \Omega$ također disjunktni pa je

$$\begin{aligned} P'(E_1 \cup E_2) &= P(X^{-1}(E_1 \cup E_2)) = P(X^{-1}(E_1) \cup X^{-1}(E_2)) \\ &= P(X^{-1}(E_1)) + P(X^{-1}(E_2)) = P'(E_1) + P'(E_2) \end{aligned}$$

što znači da je P' aditivna.

PRIMJERI 1.11 Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor.

(1) Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ i $\Omega' = X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots\}$, pri čemu su svi vektori a_k međusobno različiti. Ako je $E_k = (X = a_k)$, $k \geq 1$, onda je $\{E_k; k \geq 1\}$ potpun sistem događaja u Ω i vrijedi $X = \sum_k a_k \chi_{E_k}$. Ako stavimo $p_k = P(E_k)$, $k \geq 1$, onda za distribuciju $P' = P_X$ od X vrijedi $P'(\{a_k\}) = p_k$, $k \geq 1$.
(2) Svaka slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ **se može napisati na jedinstven način u obliku** $X = \sum_k a_k \chi_{E_k}$, gdje su $a_k \in \mathbb{R}^n$ međusobno različiti i $\{E_k; k \geq 1\}$ potpun sistem događaja na Ω. Budući da je $X(\Omega)$ najviše prebrojiv, ovakve slučajne varijable se također zovu **diskretne slučajne varijable**.
(3) Neka je $A \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ i $p = P(A)$. Slučajna varijabla $X : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n$$

se zove **binomijalna slučajna varijabla s parametrima** n **i** p. Ako je $n = 1$ onda je $X = \chi_A$ i zovemo je **Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom** p. Distribucija P' slučajne varijable χ_A je vjerojatnost na $\{0, 1\}$ definirana sa $P'(\{0\}) = 1 - p$, $P'(\{1\}) = p$.
(4) Vektor $\omega \in \mathbb{R}^n$ se zove **multiindeks** ako su sve njegove koordinate iz $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $i = 1, \ldots, n$. Skup svih multiindeksa označavamo sa $\mathbb{N}_0^n$ i uvodimo simbole: $\omega! = \omega_1! \omega_2! \cdots \omega_n!$, $|\omega| = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$, $\binom{\omega}{\eta} = \binom{\omega_1}{\eta_1} \cdots \binom{\omega_n}{\eta_n}$, $x^\omega = x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \cdots x_n^{\omega_n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial^\omega = \partial_1^{\omega_n} \cdots \partial_n^{\omega_n}$, gdje je $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$, za $\omega, \eta \in \mathbb{N}_0^n$.

Neka su sada $k \in \mathbb{N}$, $p_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$, $p = p_1 e_1 + \cdots + p_n e_n$, $\Omega' = \{\omega \in \mathbb{N}_0^n; |\omega| = k\}$. Definiramo vjerojatnost P' na Ω' sa $P'(\{\omega\}) = \frac{k!}{\omega!} p^\omega$. Tada se P' zove **polinomijalna vjerojatnost na** $\mathbb{R}^n$ **s parametrima** k **i** p. Ona je zaista vjerojatnost:

$$P'(\Omega') = \sum_{|\omega| = k} P'(\{\omega\}) = \sum_{|\omega| = k} \frac{k!}{\omega!} p^\omega = (p_1 + \cdots + p_n)^k = 1$$

Ona se često pojavljuje u praktičnim problemima. Naime, ako imamo slučajni eksperiment opisan s (Ω, P) i ako je $\{E_1, \ldots, E_n\}$ potpun sistem događaja u Ω tako da je $p_1 = P(E_1), \ldots, p_n = P(E_n)$, onda ponavljajući nezavisno k puta ovaj eksperiment, uvodimo slučajnu varijablu $X = X_1 e_1 + \cdots + X_n e_n$ u $\mathbb{R}^n$, pri čemu je X_i broj koliko se puta dogodio E_i, $i = 1, \ldots, n$, i zaključujemo da X ima polinomijalnu distribuciju s parametrima k i p. Slučajnu varijablu X koja ima polinomijalnu distribuciju, zovemo **polinomijalna slučajna varijabla**.

(5) Kažemo da je $X : \Omega \to \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ **Poissonova slučajna varijabla u** $\mathbb{R}$ **s parametrom** $\lambda > 0$ ako vrijedi

$$P(X = k) = \tfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k \geq 0$$

Distribucija P' od X je vjerojatnost na $\Omega' = \mathbb{N}_0$, pri čemu je $P'(\{k\}) = P(X = k)$, za $k \geq 0$. Vjerojatnost P' se zove **Poissonova vjerojatnost na** $\mathbb{R}$ **s parametrom** $\lambda > 0$.

(6) Kažemo da je $X : \Omega \to \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ **Pascalova slučajna varijabla u** $\mathbb{R}$ **s parametrima** p **i** r, gdje je $0 < p < 1$, i $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, ako vrijedi

$$P(X = k) = \tbinom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k,\ k \geq 0$$

Distribucija P' od X je vjerojatnost na $\Omega' = \mathbb{N}_0$ i zove se **Pascalova vjerojatnost na** $\mathbb{R}$ **s parametrima** p **i** r. Ako je $r = 1$ onda se X zove **geometrijska slučajna varijabla s parametrom** p, a njezina distribucija P' se zove **geometrijska vjerojatnost s parametrom** p.

(7) Kažemo da je $X : \Omega \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ **logaritamska slučajna varijabla u** $\mathbb{R}$ **s parametrom** p, gdje je $0 < p < 1$, ako vrijedi

$$P(X = k) = -\tfrac{1}{\log p} \tfrac{(1-p)^k}{k},\ k \geq 1$$

Distribucija P' od X je vjerojatnost na $\mathbb{N}$ i zove se **geometrijska vjerojatnost s parametrom** p.

DEFINICIJA 1.12 *Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor.*

(1) *Kažemo da su* ***slučajne varijable*** *$X_1 : \Omega \to \Omega_1, \ldots, X_n : \Omega \to \Omega_n$* ***nezavisne****, ako su događaji $(X_1 \in E_1), \ldots, (X_n \in E_n)$ nezavisni, za svaki $E_i \subset \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

(2) *Kažemo da je* ***familija*** *$\{X_i; i \in I\}$* ***slučajnih varijabla*** *$X_i : \Omega \to \Omega_i$* ***nezavisna****, ako je nezavisna svaka njezina konačna podfamilija.*

PROPOZICIJA 1.13 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s koordinatama $X_1, \ldots, X_n$. Tada su koordinate od X nezavisne ako i samo ako vrijedi formula $P_X = P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n}$.*

Dokaz Koordinate od X su nezavisne ako i samo ako je

$$P\left((X_1 \in E_1) \cap \cdots \cap (X_n \in E_n)\right) = P(X_1 \in E_1) \cdots P(X_n \in E_n)$$

za svaki $E_i \subset \mathbb{R}$. Ovu relaciju možemo drugačije zapisati u obliku

$$P(X \in E_1 \times \cdots \times E_n) = P(X_1 \in E_1) \cdots P(X_n \in E_n)$$

ili u obliku $P_X(E_1 \times \cdots \times E_n) = P_{X_1}(E_1) \cdots P_{X_n}(E_n)$ što je ekvivalentno sa $P_X = P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n}$.

DEFINICIJA 1.14 (1) *Neka je* (Ω, P) *diskretni vjerojatnostni prostor i* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla. Ako red* $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$ *konvergira apsolutno, onda kažemo da je* X ***integrabilna slučajna varijabla****, a broj*

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

zovemo ***očekivanje*** *ili* ***srednja vrijednost od*** X.

(2) *Ako su* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$*, onda* ***kažemo da je*** $X = Y$ ***skoro svuda u odnosu na*** P *i pišemo* $X = Y$ *s.s., ako je* $X(\omega) = Y(\omega)$, *za svaki* $\omega \in \Omega$ *za koji je* $P(\{\omega\}) \neq 0$.

(3) *Označimo sa* $L_1(\Omega, P)$ *skup svih integrabilnih slučajnih varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, pri čemu identificiramo slučajne varijable koje su jednake skoro svuda u odnosu na* P*. Tada se* $L_1(\Omega, P)$ *zove* ***prostor integrabilnih slučajnih varijabla****.*

TEOREM 1.15 *Neka je* (Ω, P) *diskretni vjerojatnostni prostor i* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrabilne slučajne varijable. Tada vrijedi:*

(1) $X + Y$ *je integrabilna i* $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

(2) αX *je integrabilna,* $\alpha \in \mathbb{R}$, *i* $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}X$

(3) *Ako je* $X \leq Y$ *onda je* $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$

(4) *Ako je* $X = \chi_A$ *onda je* $\mathbb{E}X = P(A)$

(5) *Ako je* $X = Y$ *s.s. onda je* $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$

(6) *Ako je* $X = \sum_n a_n \chi_{E_n}$ *onda je* $\mathbb{E}X = \sum_n a_n P(E_n)$

(7) *Ako je* Ω *konačan skup onda je svaka slučajna varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrabilna.*

(8) $L_1(\Omega, P)$ *je vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$

(9) *Formulom* $\|X\|_1 = \mathbb{E}|X|$ *je dana norma na* $L_1(\Omega, P)$

(10) $(L_1(\Omega, P), \|.\|_1)$ *je* ***Banachov prostor****, tj.* ***potpun normiran vektorski prostor****.*

(11) $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$

(12) *Ako je* $X(\Omega) = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ *i* $P' = P_X$ *distribucija od* X*, onda je*

$$\mathbb{E}X = \sum_n a_n P'(\{a_n\})$$

Dokaz Tvrdnje (1) do (7) slijede neposredno iz definicije od $\mathbb{E}X$. (8) Slijedi iz (1) i (2). (11) Slijedi iz relacije trokuta i definicije od $\mathbb{E}X$. (12) slijedi iz (6). Dokažimo (9): Relacija trokuta: $\|X+Y\| = \mathbb{E}\,|X+Y| \leq \mathbb{E}\,(|X|+|Y|) = \mathbb{E}\,|X| + \mathbb{E}\,|Y| = \|X\|_1 + \|Y\|_1$, pri čemu smo koristili (1) i (3). Nadalje, $\|X\|_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\,|X| = 0 \Leftrightarrow \sum_\omega |X(\omega)|\, P(\{\omega\}) = 0 \Leftrightarrow X(\omega) = 0$, za svaki $\omega \in \Omega$ za koji je $P(\{\omega\}) \neq 0 \Leftrightarrow X = 0$ *s.s.* $\Leftrightarrow X = 0$ u $L_1(\Omega, P)$. Ostali aksiomi za $\|.\|_1$ su evidentni. (10) Sve osim potpunosti slijedi iz (8) i (9). Potpunost će biti dokazana kasnije. Vidi Poglavlje 4.

PRIMJERI 1.16 Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor.

(1) Ako su $A, B \subset \Omega$, onda je
(a) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$
(b) $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$
(c) $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\triangle B}$, gdje je $A \triangle B$ simetrična razlika.
(2) Ako je $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, onda je $A^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$ pa je

$$\chi_A = 1 - \chi_{A^c} = 1 - (1-\chi_{A_1})\cdots(1-\chi_{A_n})$$

Ako izmnožimo faktore na desnoj strani dobijemo

$$\chi_A = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}\!\!\cdots\sum \chi_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_r}}$$

Ako sada uzmemo srednju vrijednost i uvedemo oznaku

$$s_r = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}\!\!\cdots\sum P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_r})$$

dobijemo **formulu uključenja-isključenja**

$$P(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} s_r$$

Njezin specijalni slučaj za $n = 2$ je

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

što smo već imali, dok za $n = 3$ dobijemo

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1\cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2\cap A_3) \\ &\quad + P(A_1\cap A_2\cap A_3) \end{aligned}$$

(3) Ako su $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ i B_k skup svih $\omega \in \Omega$ koji leže u točno k skupova $A_1, \ldots, A_n$, onda je

$$\chi_{B_k} = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \cdots \sum \chi_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}}$$

pa dobijemo formulu

$$P(B_k) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} s_r$$

gdje je s_r iz (2).
(4) Neka je $X \in L_1(\Omega, P)$, $X \ge 0$ i $\mathbb{E}X = 1$. Definiramo $P' : 2^{\Omega} \to [0,1]$ sa $P'(A) = \mathbb{E}[X\chi_A]$. Tada je P' vjerojatnost na Ω. Nadalje, ako sa $\mathbb{E}'$ označimo očekivanje u odnosu na P', onda je $\mathbb{E}'Y = \mathbb{E}(XY)$ za svaku slučajnu varijablu Y za koju je XY integrabilna u odnosu na P. Dakle, $Y \in L_1(\Omega, P')$ ako i samo ako $XY \in L_1(\Omega, P)$. Ovaj X se zove **gustoća od P' u odnosu na P**. Zamijetimo da iz $P(A) = 0$ slijedi $P'(A) = 0$ dok obrat općenito ne vrijedi.
(5) Ako je $X \in L_1(\Omega, P)$ i $P(X < 0) = 0$ onda je $\mathbb{E}X \ge 0$.
(6) Ako je X ograničena slučajna varijabla, $a = \inf_{\omega} X(\omega)$ i $b = \sup_{\omega} X(\omega)$ onda je $X \in L_1(\Omega, P)$ i vrijedi $a \le \mathbb{E}X \le b$.
(7) Neka je P' distribucija od $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega' = X(\Omega)$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija. Tada je f slučajna varijabla u odnosu na P' i vrijedi $f \in L_1(\Omega', P')$ ako i samo ako je $f(X) = f \circ X \in L_1(\Omega, P)$, pri čemu je $\mathbb{E}f(X) = \mathbb{E}'f$, gdje je $\mathbb{E}'$ očekivanje na (Ω', P'). Naime, ako je $X = \sum a_n \chi_{E_n}$, $E_n = (X = a_n)$, onda je $f(X) = \sum f(a_n)\chi_{E_n}$ pa je

$$\mathbb{E}f(X) = \sum f(a_n) P(E_n) = \sum f(a_n) P'(\{a_n\}) = \mathbb{E}'f$$

(8) Neka je $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$ i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla. Kažemo da je X **p-integrabilna** ako je $|X|^p \in L_1(\Omega, P)$. Skup svih p-integrabilnih slučajnih varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ označavamo sa $L_p(\Omega, P)$, pri čemu također identificiramo slučajne verijable koje su jednake skoro svuda, kao i u $L_1(\Omega, P)$. U Poglavlju 4 će biti dokazano da je $L_p(\Omega, P)$ Banachov prostor s normom $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$.

Posebno je važan $L_2(\Omega, P)$. On je **Hilbertov prostor**, tj. **potpun unitaran vektorski prostor**. Skalarni produkt na $L_2(\Omega, P)$ je dan sa $(X|Y) = \mathbb{E}XY$ i vrijedi $\|X\|_2 = (X|X)^{1/2}$.

Nadalje, definiramo $L_\infty(\Omega, P)$ kao skup svih slučajnih varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ koje su ograničene skoro svuda. Slučajna varijabla X je **ograničena skoro svuda** ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $|X| \le \alpha$ $s.s.$ Infimum svih ovakvih α označavamo sa $\|X\|_\infty$. U Poglavlju 4 će biti dokazano da je $(L_\infty(\Omega, P), \|.\|_\infty)$ također Banachov prostor. Zamijetimo da je $L_\infty(\Omega, P) \subset L_p(\Omega, P)$, za svaki $p \ge 1$, i $\|X\|_p \le \|X\|_\infty$, za $X \in L_\infty(\Omega, P)$.

PROPOZICIJA 1.17 *Ako su $X, Y \in L_1(\Omega, P)$ nezavisne onda je slučajna varijabla XY integrabilna i $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.*

Dokaz Neka je $X = \sum_n a_n \chi_{E_n}$ i $Y = \sum_k b_k \chi_{F_k}$. Tada je

$$\mathbb{E}XY = \sum\sum a_n b_k P(E_n \cap F_k) = \sum\sum a_n b_k P(E_n) P(F_k) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

iz čega slijedi tvrdnja.

PROPOZICIJA 1.18 *Prostori $L_p(\Omega, P)$ opadaju po inkluziji kako indeks p raste tj. za svaki $1 \leq p \leq q \leq \infty$ vrijedi*

$$L_1(\Omega, P) \supset L_p(\Omega, P) \supset L_q(\Omega, P) \supset L_\infty(\Omega, P)$$

Dokaz Ako je $1 \leq s \leq r < \infty$ i $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ onda zbog $|X|^s \leq 1 + |X|^r$ slijedi $\mathbb{E}|X|^s \leq 1 + \mathbb{E}|X|^r < \infty$.

DEFINICIJA 1.19 *Neka su $X, Y \in L_1(\Omega, P)$.*
*(1) Ako je $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ onda se $\mathbb{E}X^n$ zove n-**ti moment od** X*
(2) Ako je $X \in L_2(\Omega, P)$ onda se realni broj

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

*zove **disperzija od** X.*
(3) Ako su $X, Y \in L_2(\Omega, P)$ onda se broj

$$r(X, Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{(\mathbb{D}X)^{1/2}(\mathbb{D}Y)^{1/2}}$$

*zove **koeficijent korelacije od** X **i** Y. Ako je $r(X, Y) = 0$ onda kažemo da su X i Y **nekorelirane**.*

PROPOZICIJA 1.20 *Neka su $X, Y \in L_2(\Omega, P)$. Tada vrijedi:*

(1) *Ako su X i Y nezavisne onda su one i nekorelirane.*
(2) $|r(X, Y)| \leq 1$
(3) $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$
(4) $\mathbb{D}(aX + b) = a^2\mathbb{D}X,\ a, b \in \mathbb{R}$
(5) $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y + 2(\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y)$
(6) *X i Y su nekorelirane ako i samo ako je $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$*
(7) *Ako su X i Y nezavisne onda je $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$*
(8) *Ako su X i Y nezavisne onda je $XY \in L_2(\Omega, P)$ i vrijedi formula*

$$\mathbb{D}(XY) = \mathbb{D}X \cdot \mathbb{D}Y + (\mathbb{E}X)^2 \mathbb{D}Y + (\mathbb{E}Y)^2 \mathbb{D}X$$

Dokaz (1) Slijedi iz 1.17. (2) Ako je V unitaran prostor i $a, b \in V$, onda je $(a|b) = \|a\| \, \|b\| \cos\varphi$, gdje je φ kut između a i b. Sada za $V = L_2(\Omega, P)$, $a = X - \mathbb{E}X$, $b = Y - \mathbb{E}Y$ dobijemo $\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = (\mathbb{D}X)^{1/2}(\mathbb{D}Y)^{1/2} \cos\varphi$ tj. $r(X, Y) = \cos\varphi$. Sve ostale tvrdnje slijede iz definicije neposrednim računom.

DEFINICIJA 1.21 *Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor.*

(1) *Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajna varijabla, $X = X_1e_1 + \cdots + X_ne_n$, s koordinatama $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, onda kažemo da je X* ***integrabilna*** *ako su sve koordinate X_i integrabilne i definiramo* ***očekivanje*** *ili* ***srednju vrijednost od*** *X formulom*

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1e_1 + \cdots + \mathbb{E}X_ne_n$$

(2) *Ako je $X : \Omega \to gl_n(\mathbb{R})$ slučajna varijabla, $X = [X_{ij}]$, s koordinatama $X_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, onda kažemo da je X* ***integrabilna*** *ako su integrabilne sve koordinate X_{ij} i definiramo* ***očekivanje*** *ili* ***srednju vrijednost od*** *X formulom $\mathbb{E}X = [\mathbb{E}X_{ij}] \in gl_n(\mathbb{R})$.*

(3) *Neka je $X = X_1e_1 + \cdots + X_ne_n$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$. Ako je $X_i \in L_2(\Omega, P)$, $i = 1, \ldots, n$, onda se matrica $\mathbb{D}X \in gl_n(\mathbb{R})$ s (i, j)-tim elementom $\mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j$ zove* ***disperzija od*** *X.*

PROPOZICIJA 1.22 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$. Ako postoji $\mathbb{D}X$ onda vrijedi:*

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^\tau = \mathbb{E}XX^\tau - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^\tau$$

Dokaz Ako su $a, b \in \mathbb{R}^n$ onda je $ab^\tau \in gl_n(\mathbb{R})$ matrica s (i, j)-tim elementom a_ib_j. Formula slijedi neposredno iz definicije.

PROPOZICIJA 1.23 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ koja ima disperziju. Tada za svaki $a \in \mathbb{R}^m$ i svaki linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vrijedi:*

(1) $\mathbb{E}(AX + a) = A\mathbb{E}X + a$

(2) $\mathbb{D}(AX + a) = A \cdot \mathbb{D}X \cdot A^\tau$

Dokaz (1) Slijedi iz definicije od $\mathbb{E}X$ i linearnosti od $\mathbb{E}$, dok (2) slijedi iz (1) i prethodne propozicije.

PRIMJERI 1.24 Neka je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor.

(1) Ako je X binomijalna slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ onda je:
(a) $\mathbb{E}X = np$ (b) $\mathbb{E}X^2 = np + n(n-1)p^2$
(c) $\mathbb{E}X^3 = np(1-p)(1-2p)$ (d) $\mathbb{D}X = np(1-p)$
(2) Ako je X Poissonova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s parametrom λ onda je:
(a) $\mathbb{E}X = \lambda$ (b) $\mathbb{E}X^2 = \lambda^2 + \lambda$
(c) $\mathbb{E}X^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$ (d) $\mathbb{D}X = \lambda$
(3) Neka su $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ i $X = \chi_{A_1} e_1 + \cdots + \chi_{A_n} e_n$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki $i, j = 1, \ldots, n$ vrijedi:
(a) $\mathbb{E}X = P(A_1)e_1 + \cdots + P(A_n)e_n$
(b) $\mathbb{D}X_i = P(A_i)(1 - P(A_i))$
(c) $\mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j = P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j)$
(4) Ako je X polinomijalna slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s param. k i p onda je

$$\mathbb{E}X = kp, \quad \mathbb{D}X = k\overline{p} - kpp^\tau$$

gdje je $\overline{p}$ dijagonalna matrica s $p_1, \ldots, p_n$ na dijagonali.
(5) Neka je $X : \Omega \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}$, definirana sa

$$P(X = k) = \tfrac{6}{\pi^2}\tfrac{1}{k^2}, \ k \geq 1$$

Tada $\mathbb{E}X$ **ne postoji** tj. $X \notin L_1(\Omega, P)$, a onda $\mathbb{D}X$ **pogotovo ne postoji**.

PROPOZICIJA 1.25 (Čebyševljeva nejednakost)
(1) *Ako je* $|X|^\alpha$ *integrabilna, za neki* $\alpha > 0$, *onda vrijedi*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\mathbb{E}|X|^\alpha, \ \varepsilon > 0$$

(2) *Ako je* $X \in L_1(\Omega, P)$ *onda je* $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\,|X|\,, \varepsilon > 0$
(3) *Ako je* $X \in L_2(\Omega, P)$ *onda vrijedi*

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{D}X, \ \varepsilon > 0$$

i ovu nejednakost zovemo ***Čebyševljeva nejednakost.***

Dokaz (1) Neka je $X = \sum_n a_n \chi_{E_n}$. Tada za $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^\alpha &= \sum_n |a_n|^\alpha P(E_n) \geq \sum_{|a_n| \geq \varepsilon} |a_n|^\alpha P(E_n) \\ &\geq \sum_{|a_n| \geq \varepsilon} \varepsilon^\alpha P(E_n) = \varepsilon^\alpha P(|X| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

(2) i (3) slijede iz (1) za $\alpha = 1$ i $\alpha = 2$.

DEFINICIJA 1.26 *Kažemo da niz slučajnih varijabla* (X_n) *u* $\mathbb{R}$ ***konvergira prema slučajnoj varijabli*** X ***po vjerojatnosti*** *i pišemo* $X_n \xrightarrow{P} X$ *ako* $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$, *za svaki* $\varepsilon > 0$.

PROPOZICIJA 1.27 *Neka je* (X_n) *niz u* $L_2(\Omega, P)$ *za kojeg* $\mathbb{D}X_n \to 0$. *Tada* $X_n - \mathbb{E}X_n \xrightarrow{P} 0$.

Dokaz Po prethodnoj propoziciji je $P(|X_n - \mathbb{E}X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{D}X_n \to 0$.

TEOREM 1.28 (Zakon velikih brojeva)
Neka je (X_n) *niz nezavisnih slučajnih varijabla u* $\mathbb{R}$ *takav da je niz* $(\mathbb{D}X_n)$ *ograničen. Ako je* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *onda* $\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{P} 0$.

Dokaz Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije zbog

$$\mathbb{D}(\tfrac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n)) = \tfrac{1}{n^2}\mathbb{D}S_n \leq \tfrac{1}{n^2}n\alpha = \tfrac{1}{n}\alpha \to 0$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{D}X_n \leq \alpha$, za svaki $n \geq 1$.

KOROLAR 1.29 *Neka vrijede uvjeti prethodnog teorema i neka za svaki* $n \geq 1$ *vrijedi* $\mathbb{E}X_n = a$. *Tada* $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} a$.

NAPOMENA 1.30 Prethodne tvrdnje su posljedice Čebyševljeve nejednakosti. Zanimljivo je da se ona također može koristiti za dokaz nekih tvrdnja iz analize. Za ilustraciju dajemo dokaz Weierstrassova teorema aproksimacije na $I = [0,1]$. Neka je $C(I)$ vektorski prostor svih neprekidnih funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. On je Banachov prostor s normom $\|f\| = \max\limits_{x \in I}|f(x)|$.

TEOREM 1.31 (Weierstrassov teorem aproksimacije)
Za svaki $f \in C(I)$ *i svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji polinom* P *takav da je* $\|P - f\| < \varepsilon$.

Dokaz Ovo je izuzetno popularna tvrdnja. Postoji više od stotinu dokaza za nju! Ovaj dokaz je dao S. N. Bernstein početkom dvadesetog stoljeća. Za $f \in C(I)$ i $\delta > 0$ stavimo

$$\omega(f, \delta) = \max\{|f(x) - f(y)|\,;\,|x - y| \leq \delta\}$$

Tada zbog neprekidnosti od f vrijedi $\omega(f, \delta) \to 0$, za $\delta \to 0$. Definiramo n-**ti Bernsteinov polinom od** f formulom

$$B_{n,f}(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} f(\tfrac{r}{n})$$

Dokažimo da niz $(B_{n,f})$ konvergira prema f u $C(I)$, tj. $\|B_{n,f} - f\| \to 0$, $n \to \infty$, iz čega slijedi tvrdnja teorema. Ako je $x \in I$ i S_n binomijalna slučajna varijabla s parametrima n i $p = x$ onda je $B_{n,f}(x) = \mathbb{E} f(\frac{1}{n} S_n)$ pa imamo

$$\begin{aligned}
|B_{n,f}(x) - f(x)| &= |\sum_{r=0}^{n} \tbinom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} (f(\tfrac{r}{n}) - f(x))| \\
&\leq \sum_{|\frac{r}{n} - x| \leq \delta} \tbinom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \omega(f, \delta) \\
&\quad +2\,\|f\| \sum_{|\frac{r}{n} - x| > \delta} \tbinom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \\
&\leq \omega(f, \delta) + 2\,\|f\| \cdot P(|\tfrac{1}{n} S_n - x| > \delta)
\end{aligned}$$

Sada po Čebyševljevoj nejednakosti imamo

$$P(|\tfrac{1}{n} S_n - x| > \delta) \leq \tfrac{1}{n^2 \delta^2} n x (1-x) \leq \tfrac{1}{4 n \delta^2}$$

pa za $\delta = n^{-1/4}$ dobijemo

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| \leq \omega(f, n^{-1/4}) + \tfrac{1}{2\sqrt{n}}\,\|f\| \to 0,\ n \to \infty$$

što znači da $B_{n,f} \to f$ u $C(I)$.

PRIMJERI 1.32 Uvedimo oznaku $B_n(f) = B_{n,f}$, za $f \in C(I)$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) Ako je $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = x^2$ onda za svaki $n \geq 1$ vrijedi
(a) $B_n(f_0) = f_0$
(b) $B_n(f_1) = f_1$
(c) $B_n(f_2) = (1 - \frac{1}{n}) f_2 + \frac{1}{n} f_1$
(2) $B_n : C(I) \to C(I)$ je linearni operator, za svaki $n \geq 1$. Nadalje
(a) $B_n(f)(0) = f(0)$, $B_n(f)(1) = f(1)$, $f \in C(I)$
(b) $B_1(f) = f(0)(1 - f_1) + f(1) f_1$
(c) $B_n B_1 = B_1 B_n = B_1$, $n \geq 1$
(3) Vrijede sljedeće nejednakosti:
(a) $B_n(f) \geq 0$, za $f \geq 0$
(a) $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$, $f \in C(I)$
(c) $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$, $f \in C(I)$
(4) Za svaki $f \in C(I)$ vrijedi $\|B_n(f) - f\| \leq \frac{3}{2} \omega(f, n^{-1/2})$

DEFINICIJA 1.33 *Ako je $X : \Omega \to \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ onda se X zove* ***cjelobrojna slučajna varijabla*** *u $\mathbb{R}$, a funkcija $\psi_X : [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}t^X = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) \cdot t^n$$

se zove ***generatrisa slučajne varijable*** *X.*

PROPOZICIJA 1.34 *Neka su X i Y cjelobrojne slučajne varijable u $\mathbb{R}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
(1) *Ako su X i Y nezavisne onda je $\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\psi_Y(t)$, $t \in [0,1]$*
(2) *Ako postoji n-ti moment od X i ako je*

$$(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

onda vrijedi $\mathbb{E}X^n = D^n\psi_X(1)$ i $\mathbb{E}(X)_n = \psi_X^{(n)}(1)$, gdje je $D = t\frac{d}{dt}$.
(3) *Ako je $X \in L_2(\Omega, P)$ onda je*

$$\mathbb{D}X = D^2\psi_X(1) - (D\psi_X(1))^2 = \psi''_X(1) + \psi'_X(1) - \psi'_X(1)^2$$

(4) *Ako je $\alpha > 0$ onda je*

$$\mathbb{E}(\alpha + X)^{-1} = \int_0^1 \psi_X(t) t^{\alpha-1} dt$$

Dokaz (1) Budući da su X i Y nezavisne zaključujemo da su t^X i t^Y također nezavisne. (2) Neposredno izračunamo $D^n\psi_X(t)$ i $\frac{d^n}{dt^n}\psi_X(t)$ i uvrstimo $t = 1$. (3) Slijedi iz (2) za $n = 2$. (4) Budući da je

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\alpha-1}\psi_X(t)dt &= \int_0^1 t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \int_0^1 t^{\alpha+n-1} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \tfrac{1}{\alpha+n} = \mathbb{E}(\alpha+X)^{-1}
\end{aligned}$$

dobijemo traženu formulu.

PRIMJERI 1.35

(1) Ako je X binomijalna s parametrima p i n onda je
(a) $\psi_X(t) = (1 - p + pt)^n$
(b) $\mathbb{E}(X)_k = \binom{n}{k} k! p^k$, $k \geq 1$, $\mathbb{E}(X)_k = 0$, $k > n$

(2) Ako je X Pascalova s parametrima p i r onda je
(a) $\psi_X(t) = p^r(1-(1-p)t)^{-r}$
(b) $\mathbb{E}(X)_n = \frac{1}{p^n} n!(1-p)^n$, za $r = 1$
(3) Ako je X Poissonova s parametrom λ onda je
(a) $\psi_X(t) = \exp(\lambda t - \lambda)$
(b) $\mathbb{E}(X)_n = \lambda^n$, $n \geq 0$
(4) Ako je X logaritamska s parametrom p onda je

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\log p} \log(1-(1-p)t)$$

(5) Neka je X Poissonova slučajna varijabla s parametrom λ i

$$g_\lambda(x,t) = (1+t)^x e^{-\lambda t},\ t > -1,\ x \in \mathbb{R}$$

Tada vrijedi:
(a) $\mathbb{E} g_\lambda(X,t) = 1$
(b) $\mathbb{E} g_\lambda(X,s) g_\lambda(X,t) = \exp(\lambda s t)$
(c) $g_\lambda(x,t) = \sum\limits_{n\geq 0} P_{n,\lambda}(x) t^n$, $|t| < 1$, $x \in \mathbb{R}$
gdje je $P_{n,\lambda}$ polinom stupnja n dan sa

$$P_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \binom{x}{k},\ n \geq 0$$

(d) $P_{n,0}(x) = \binom{x}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} P_{k,\lambda}(x)$, $n \geq 0$
(e) $P_{n,\lambda_2}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^{n-k}}{(n-k)!} P_{k,\lambda_1}(x)$, $n \geq 0$

DEFINICIJA 1.36 *Neka je* (Ω, P) *diskretni vjerojatnostni prostor,* Ω_1 *neprazan skup,* $X : \Omega \to \Omega_1$ *slučajna varijabla,* $X(\Omega) = \Omega' = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $E_n = (X = a_n)$ *i* $A \subset \Omega$. *Tada se slučajna varijabla* $P(A|X) : \Omega \to [0,1]$, *definirana sa*

$$P(A|X) = \sum_n P(A|E_n) \chi_{E_n}$$

zove ***uvjetna vjerojatnost od*** A ***uz uvjet*** X.

PROPOZICIJA 1.37 (1) $P(\varnothing|X) = 0$, $P(\Omega|X) = 1$
(2) $P(A_1 \cup A_2|X) = P(A_1|X) + P(A_2|X)$, *za* $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
(3) $\mathbb{E} P(A|X) = P(A)$

Dokaz Slijedi neposredno iz definicije.

DEFINICIJA 1.38 *Neka vrijede uvjeti prethodne definicije. Ako je $Y \in L_1(\Omega, P)$ onda se slučajna varijabla*

$$\mathbb{E}_X Y = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}\,|X)$$

zove ***uvjetno očekivanje od*** Y ***uz uvjet*** X.

NAPOMENA 1.39 Neka $(V, \|.\|)$ Banachov prostor, $a_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da red $\sum_n a_n$ **konvergira apsolutno** ako konvergira red $\sum_n \|a_n\|$. Zamijetimo da red $\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}\,|X)$ konvergira apsolutno u $L_1(\Omega, P)$. Naime

$$\sum_{\omega\in\Omega} \|Y(\omega)P(\{\omega\}\,|X)\|_1 = \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|\, P(\{\omega\}) = \|Y\|_1$$

Prema tome, ako je $Y \in L_1(\Omega, P)$ onda je

$$\mathbb{E}\mathbb{E}_X Y = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{E}P(\{\omega\}\,|X) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P\{\omega\} = \mathbb{E}Y$$

pa je $\mathbb{E}_X Y \in L_1(\Omega, P)$. Ako red u Banachovom prostoru konvergira apsolutno onda on konvergira i njegove članove možemo permutirati po volji, a da mu se suma ne mijanja. Ako je $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots\}$ i $E_n = (X = a_n)$ onda se grupiranjem članova reda $\mathbb{E}_X Y$ može zapisati u obliku

$$\mathbb{E}_X Y = \sum_n \tfrac{1}{P(E_n)}\mathbb{E}(Y\chi_{E_n})\chi_{E_n}$$

TEOREM 1.40 (1) $\mathbb{E}_X : L_1(\Omega, P) \to L_1(\Omega, P)$ *je linearni operator, za svaki* $X : \Omega \to \Omega_1$. *Operator* $\mathbb{E}_X$ *zovemo* ***uvjetno očekivanje uz uvjet*** X.
(2) $\mathbb{E}\mathbb{E}_X Y = \mathbb{E}Y$, $Y \in L_1(\Omega, P)$
(3) *Ako je* $Y \geq 0$ *onda je* $\mathbb{E}_X Y \geq 0$
(4) *Ako je* $Y_1 \leq Y_2$ *onda je* $\mathbb{E}_X Y_1 \leq \mathbb{E}_X Y_2$
(5) *Ako je* $Y = \chi_A$ *onda je* $\mathbb{E}_X Y = P(A|X)$, $A \subset \Omega$
(6) *Ako je* $Y = \sum_k b_k \chi_{A_k}$ *onda je* $\mathbb{E}_X Y = \sum_k b_k P(A_k|X)$
(7) $|\mathbb{E}_X Y| \leq \mathbb{E}_X |Y|$
(8) $\|\mathbb{E}_X Y\|_1 \leq \|Y\|_1$
(9) $\mathbb{E}_X 1 = 1$

Dokaz Prvih šest svojstava slijede iz definicije i gornje napomene. (7) Slijedi iz relacije trokuta za apsolutnu vrijednost i (4), a (8) iz (7) uzimanjem očekivanja, dok je (9) evidentno.

PRIMJERI 1.41

(1) Ako su X i Y nezavisne onda je $\mathbb{E}_X Y = \mathbb{E}Y$.
(2) Ako je X konstantna slučajna varijabla onda je $\mathbb{E}_X Y = \mathbb{E}Y$, za svaku slučajnu varijablu $Y \in L_1(\Omega, P)$.
(3) Ako je $X = \chi_A$ onda je $\mathbb{E}_X Y = \alpha\chi_A + \beta\chi_{A^c}$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(4) Neka je $X : \Omega \to \Omega_1$ i $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ takav da je $f(X) \in L_1(\Omega, P)$. Ako je $Y \in L_1(\Omega, P)$ takav da je $Yf(X) \in L_1(\Omega, P)$ onda vrijedi

$$\mathbb{E}_X [Yf(X)] = f(X)\mathbb{E}_X Y$$

(5) Ako je $X : \Omega \to \Omega_1$ i $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ onda za svaki $Y \in L_1(\Omega, P)$ vrijedi

$$\mathbb{E}_X \mathbb{E}_{f(X)} Y = \mathbb{E}_{f(X)} \mathbb{E}_X Y = E_{f(X)} Y$$

(6) Vrijedi formula $\mathbb{E}_X^2 = \mathbb{E}_X$ i $\|\mathbb{E}_X\| = 1$, pri čemu je norma operatora $A : L_1(\Omega, P) \to L_1(\Omega, P)$ dana sa

$$\|A\| = \sup_{\|Y\|_1 = 1} \|AY\|_1 = \sup_{Y \neq 0} \tfrac{\|AY\|_1}{\|Y\|_1}$$

(7) Ako je $Y \in L_2(\Omega, P)$ onda je $\mathbb{E}_X Y \in L_2(\Omega, P)$, za svaki X.
(8) Ako su $Y_1, Y_2 \in L_2(\Omega, P)$ onda je $\mathbb{E}((\mathbb{E}_X Y_2) Y_2) = \mathbb{E}(Y_1 \mathbb{E}_X Y_2)$, tj.

$$(\mathbb{E}_X Y_1 | Y_2) = (Y_1 | \mathbb{E}_X Y_2)$$

što znači da je $\mathbb{E}_X^* = \mathbb{E}_X$ pa zaključujemo da je $\mathbb{E}_X$ projektor u $L_2(\Omega, P)$.
(9) Možemo smatrati da je $\mathbb{R} \subset L_p(\Omega, P)$, za svaki $p \in [1, \infty]$. Naime, svaki $a \in \mathbb{R}$ smatramo za konstantnu slučajnu varijablu $a : \Omega \to \mathbb{R}$, $a(\omega) = a$. Tada je $\mathbb{E}_a = \mathbb{E}$ linearni operator na $L_1(\Omega, P)$ i slika od $\mathbb{E}$ je $\mathbb{R}$. Nadalje, restrikcija od $\mathbb{E}$ na $L_2(\Omega, P)$ je projektor na pravac $\mathbb{R} \subset L_2(\Omega, P)$.
(10) $\mathbb{E}_{f(X)} = \mathbb{E}_X$, ako je f injektivna na slici od X.
(11) Neka su $X_1, \ldots, X_n \in L_1(\Omega, P)$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Ako je $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ onda je $\mathbb{E}_{\overline{X}} X_i = \overline{X}$, za svaki $i = 1, \ldots, n$.
(12) Neka je X slučajna varijabla u Ω_1, $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots\}$ i Y slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$, $Y(\Omega) = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Distribucija P' od Y je vjerojatnost na $Y(\Omega)$ definiranu sa $P'(\{b_k\}) = P(Y = b_k)$, $k \geq 1$. Definiramo **uvjetnu distribuciju P'' od Y uz uvjet** $(X = a_k)$ na $Y(\Omega)$ sa

$$P''(\{b_i\}) = P(Y = b_i | X = a_k), \ i \in \mathbb{N}$$

Zamijetimo da je P'' zaista vjerojatnost, naime

$$\sum_i P''(\{b_i\}) = \sum_i P(Y = b_i | X = a_k) = \tfrac{P(X = a_k)}{P(X = a_k)} = 1$$

(13) Ako je $Y \in L_2(\Omega, P)$ i X slučajna varijabla u Ω_1 onda definiramo **uvjetnu disperziju od** Y **uz uvjet** X formulom

$$\mathbb{D}_X Y = \mathbb{E}_X Y^2 - (\mathbb{E}_X Y)^2$$

Zamijetimo da je $\mathbb{D}Y = \mathbb{E}\mathbb{D}_X Y + \mathbb{D}\mathbb{E}_X Y$. Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\mathbb{D}_X Y &= \mathbb{E}\mathbb{E}_X Y^2 - \mathbb{E}(\mathbb{E}_X Y)^2 \\
&= \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 - \mathbb{E}(\mathbb{E}_X Y)^2 + (\mathbb{E}Y)^2 \\
&= \mathbb{D}Y - \mathbb{E}(\mathbb{E}_X Y)^2 + (\mathbb{E}\mathbb{E}_X Y)^2 \\
&= \mathbb{D}Y - \mathbb{D}\mathbb{E}_X Y
\end{aligned}$$

(14) Uvjetno očekivanje $\mathbb{E}_X Y$ integrabilne slučajne varijable Y u $\mathbb{R}^n$ ili u $gl_n(\mathbb{R})$ definiramo po koordinatama kao u 1.21.

Poglavlje 2

Prostori s mjerom

DEFINICIJA 2.1 *Neka je Ω neprazan skup, 2^Ω partitivni skup od Ω i $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ takav da vrijedi:*
(1) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$.
(2) *Ako je $A \in \mathcal{A}$ onda je $A^c \in \mathcal{A}$.*
(3) *Ako je $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$.*
*Tada se $\mathcal{A}$ zove σ-algebra, a uređeni par $(\Omega, \mathcal{A})$ se zove **izmjerivi prostor**. Svaki element od $\mathcal{A}$ se zove **izmjerivi skup**.*

PRIMJERI 2.2

(1) Skup svih σ-algebra $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ je **parcijalno uređen inkluzijom**. Najmanja σ-algebra je $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$, a najveća je $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Ako je $\mathcal{A}_0 \subset 2^\Omega$ neprazan skup i $\sigma(\mathcal{A}_0)$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}_0$ onda kažemo da je $\sigma(\mathcal{A}_0)$ **generirana sa** $\mathcal{A}_0$. Zamijetimo da je $\sigma(\mathcal{A}_0)$ jednaka presjeku svih σ-algebra na Ω koje sadrže skup $\mathcal{A}_0$.
(2) Prefiks σ u nazivu σ-algebre označava da je ona zatvorena na prebrojive unije svojih elemenata. Ako u (3) umjesto zatvorenosti na prebrojive unije tražimo zatvorenost na konačne unije onda takvu strukturu zovemo **algebra skupova**. Ako je Ω konačan onda se pojam algebre i σ-algebre podudara.
(3) Ako je $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ σ-algebra i $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\bigcap_n A_n = (\bigcup_n A_n^c)^c \in \mathcal{A}$ što znači da je $\mathcal{A}$ također zatvorena na prebrojive presjeke. Ako u prethodnoj definiciji svojstvo (3) zamijenimo sa: Ako su $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$ ništa se ne mijenja: nova definicija ekvivalentna je staroj.
(4) Ako je $A \subset \Omega$ onda je $\{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$ najmanja σ-algebra koja sadrži A.
(5) Ako je $A_n \subset \Omega$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ i $A = \bigcup_n A_n$ onda kažemo da je (A_n) rastući niz i pišemo $A_n \uparrow A$. Ako je $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ i $A = \bigcap_n A_n$ onda kažemo da je (A_n) padajući niz i pišemo $A_n \downarrow A$. Zamijetimo da vrijedi:
(a) Ako $A_n \uparrow A$ onda $A_n^c \downarrow A^c$.

(b) Ako $A_n \downarrow A$ onda $A_n^c \uparrow A^c$.
(6) Ako je (A_n) niz u 2^Ω onda definiramo

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k$$

Skup $\overline{\lim} A_n$ se zove **limes superior** niza skupova (A_n), a skup $\underline{\lim} A_n$ se zove **limes inferior** niza skupova (A_n). Termini su uvedeni po analogiji na niz realnih brojeva. Ako je (a_n) niz u $\mathbb{R}$ onda je:

$$\overline{\lim} x_n = \inf_n \sup_{k \geqslant n} x_k, \quad \underline{\lim} x_n = \sup_n \inf_{k \geqslant n} x_k$$

Zamijetimo da vrijedi:
(a) $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.
(b) $\omega \in \underline{\lim} A_n$ ako i samo ako je $\omega \in A_n$, osim za konačno $n \in \mathbb{N}$.
(c) $\omega \in \overline{\lim} A_n$ ako i samo ako je $\omega \in A_n$, za beskonačno $n \in \mathbb{N}$.
(d) $(\underline{\lim} A_n)^c = \overline{\lim} A_n^c$ i $(\overline{\lim} A_n)^c = \underline{\lim} A_n^c$.
(e) Ako $A_n \uparrow A$ ili $A_n \downarrow A$ onda je $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A$.
Ako je $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ onda kažemo da (A_n) **konvergira** i pišemo $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \lim A_n$.
(7) Neka je $\chi_A : \Omega \to \{0,1\}$, $\chi_A(\omega) = 1$, za $\omega \in A$ i $\chi_A(\omega) = 0$, za $\omega \notin A$. Tada vrijedi

$$\chi_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \chi_{A_n}, \quad \chi_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \chi_{A_n}$$

(8) Neka je Ω topološki prostor i $B(\Omega)$ σ-algebra generirana svim otvorenim skupovima. Tada se $B(\Omega)$ zove **Borelova σ-algebra od** Ω. Svaki element iz $B(\Omega)$ se zove **Borelov skup**. Posebno je svaki otvoreni ili zatvoreni skup Borelov. Najvažniji ovakav slučaj je $\Omega = \mathbb{R}^n$. Npr. (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ i $[a,b]$ su Borelovi skupovi, za svaki $a, b \in \mathbb{R}$.

Zamijetimo da je $B(\mathbb{R})$ također generirana sa $\{(-\infty, a) ; a \in \mathbb{R}\}$ ili sa $\{(-\infty, a] ; a \in \mathbb{R}\}$ ili sa $\{(a, \infty) ; a \in \mathbb{R}\}$ ili sa $\{[a, \infty) ; a \in \mathbb{R}\}$.

Ako je $a \in \mathbb{R}^n$, $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ i $(-\infty, a] = (-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$ onda je $B(\mathbb{R}^n)$ generirana sa $\{(-\infty, a] ; a \in \mathbb{R}^n\}$ i slično sa ostalima, kao za $n = 1$.
(9) Ponekad nam umjesto $\mathbb{R}$ treba $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. On je topološki prostor homeomorfan segmentu $[0,1]$ i za $B(\overline{\mathbb{R}})$ vrijede analogna svojstva kao za $B(\mathbb{R})$ u (8).
(10) Ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω i $A \subset \Omega$ onda je $\mathcal{A} \cap A = \{B \cap A; B \in \mathcal{A}\}$ σ-algebra na A.

DEFINICIJA 2.3 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A})$ *izmjerivi prostor i* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ *funkcija za koju vrijedi:*
(1) $\mu(\varnothing) = 0$

(2) *Ako su* $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, *disjunktni onda je* $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ *Tada se* μ *zove* ***mjera*** *na* $(\Omega, \mathcal{A})$, *a uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *se zove* ***prostor s mjerom****. Svojstvo* (2) *se zove* σ-***aditivnost mjere*** μ.

PROPOZICIJA 2.4 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mjerom. Tada vrijedi:*
(1) *Ako su* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *disjunktni onda je*

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

Ovo svojstvo zovemo ***aditivnost od*** μ.
(2) *Ako su* $A, B \in \mathcal{A}$ *i* $A \subset B$ *onda je* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ *(**Monotonost od*** μ*)*.
(3) *Ako su* $A, A_n \in \mathcal{A}$ *i* $A \subset \bigcup_n A_n$ *onda je* $\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$. *Ovo svojstvo se zove* σ-***poluaditivnost od*** μ.

Dokaz (1) Slijedi iz definicije za $A_k = \varnothing$, $k > n$. (2) Ako je $A \subset B$ onda je $B = A \cup (B \backslash A)$ pa je $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A)$. (3) Ako je $B_n = A_n \cap A$ onda je $B_n \in \mathcal{A}$ i $\bigcup_n B_n = A$. Neka je $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \backslash B_1$, $\ldots, C_n = B_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$, $n \geq 1$. Tada je $C_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, niz disjunktnih skupova i $\bigcup_n C_n = A$, pa je $\mu(A) = \mu(\bigcup_n C_n) = \sum_n \mu(C_n) \leqslant \sum_n \mu(B_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$.

TEOREM 2.5 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mjerom i* (A_n) *niz u* $\mathcal{A}$.
(1) *Ako* $A_n \uparrow A$ *onda je* $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$.
(2) *Ako* $A_n \downarrow A$ *i* $\mu(A_n) < \infty$, *za neki* $n \geq 1$, *onda je* $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$.

Dokaz (1) Ako je $\mu(A_n) = \infty$, za neki $n \geq 1$, onda je relacija trivijalna i svodi se na $\infty = \infty$. Zato pretpostavimo da je $\mu(A_n) < \infty$, za svaki $n \geq 1$. Budući da je $A = A_1 \bigcup \bigcup_{n \geq 2} (A_n \backslash A_{n-1})$ i unija disjunktna slijedi

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_1) + \textstyle\sum_{n \geq 2} \mu(A_n \backslash A_{n-1}) \\
&= \mu(A_1) + \lim \textstyle\sum_{i=2}^{n} \mu(A_i \backslash A_{i-1}) \\
&= \mu(A_1) + \lim [\mu(A_2) - \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] \\
&= \mu(A_1) + \lim(-\mu(A_1) + \mu(A_n)) = \lim \mu(A_n)
\end{aligned}$$

(2) Možemo smatrati da je $\mu(A_1) < \infty$. Tvrdnju je dovoljno dokazati za $A = \varnothing$. Opći slučaj slijedi iz ovog primjenom na $A_n \backslash A$, $n \geq 1$. Dakle, $A_1 = \bigcup_n (A_n \backslash A_{n+1})$ i $A_n = \bigcup_{k \geq n} (A_k \backslash A_{k+1})$, $n \geq 1$, su disjunktne unije pa je

$$\mu(A_1) = \sum_k \mu(A_k \backslash A_{k+1}), \quad \mu(A_n) = \sum_{k \geq n} \mu(A_k \backslash A_{k+1}), \ n \geq 1$$

Budući da red $\sum_k \mu(A_k \backslash A_{k+1})$ konvergira prema $\mu(A_1)$ njegov ostatak konvergira prema 0 tj. $\mu(A_n) \to 0$, $n \to \infty$.

DEFINICIJA 2.6 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom.*

(1) *Kažemo da je μ **konačna mjera** ako je $\mu(\Omega) < \infty$ i tada je, naravno, $\mu(A) \leq \mu(\Omega) < \infty$, za svaki $A \in \mathcal{A}$. Ako je $\mu(\Omega) = \infty$ onda kažemo da je μ **beskonačna mjera**. Ako je $\mu(\Omega) = 1$ onda kažemo da je μ **vjerojatnostna mjera** ili **vjerojatnost** na $(\Omega, \mathcal{A})$. Tada se $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ zove **vjerojatnostni prostor**. Vjerojatnost obično označavamo sa P. Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor i $A \in \mathcal{A}$ onda se A zove **događaj**, a $P(A)$ se zove **vjerojatnost događaja** A. Tada je $0 \leqslant P(A) \leq 1$.*

(2) *Ako je Ω topološki prostor i $B(\Omega) \subset \mathcal{A}$ onda kažemo da je μ **Borelova mjera** na Ω.*

(3) *Kažemo da je μ **koncentrirana** na $E \in \mathcal{A}$ ako je $\mu(E^c) = 0$.*

(4) *Kažemo da je μ **diskretna mjera** ako je μ koncentrirana na konačnom ili prebrojivom skupu.*

(5) *Kažemo da je μ σ-**konačna** ako postoje $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, takvi da je $\Omega = \bigcup_n A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$, za svaki $n \geq 1$.*

(6) *Neka je μ Borelova mjera na $(\Omega, B(\Omega))$, gdje je Ω Hausdorffov topološki prostor. Kažemo da je μ **neprekidna** ili **difuzna** ako je $\mu(\{x\}) = 0$, za svaki $x \in \Omega$. Najmanji zatvoreni skup, na kojem je μ koncentrirana, se zove **nosač** od μ i označavamo ga sa* $\operatorname{supp}\mu$.

PRIMJERI 2.7

(1) Ako su μ_1 i μ_2 mjere na $(\Omega, \mathcal{A})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, onda su $\mu_1 + \mu_2$ i $\alpha\mu_1$ također mjere na $(\Omega, \mathcal{A})$.
(2) Neka je Ω neprazan skup, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $a \in \Omega$, i $\delta_a : \mathcal{A} \to [0,1]$ definirana sa $\delta_a(A) = \chi_A(a)$. Tada je δ_a mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$ i zovemo je **Diracova mjera** na Ω. Ona je koncentrirana u točki a tj. $\delta_a(\{a\}^c) = 0$. Neka je (α_n) niz u $[0, \infty)$, $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ skup različitih točaka u Ω i $\mu = \sum_n \alpha_n \delta_{a_n}$. Tada je μ mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$. Ona je diskretna i koncentrirana na skupu $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Svaka diskretna mjera ima ovaj oblik.
(3) Neka je Ω neprazan konačan ili prebrojiv skup. Ako je (Ω, P) diskretni vjerojatnostni prostor u smislu Poglavlja 1 onda je on vjerojatnostni prostor pri čemu je $\mathcal{A} = 2^\Omega$, pa zbog toga ispuštamo $\mathcal{A}$. Ova mjera P je diskretna budući da je koncentrirana na najviše prebrojivom skupu Ω. Ona se može napisati u obliku

$$P = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \, \delta_\omega$$

(4) Diskretna mjera $\mu = \sum_n \alpha_n \delta_{a_n}$ je konačna ako je $\sum_n \alpha_n < \infty$ i beskonačna ako je $\sum_n \alpha_n = \infty$. Naime, $\mu(\Omega) = \sum_n \alpha_n$. Ona je vjerojatnost ako je $\sum_n \alpha_n = 1$. Napišimo u ovom obliku neke vjerojatnosti iz Poglavlja 1.

(a) **Bernoullijeva mjera** na $\mathbb{R}$ s parametrom p je dana sa

$$P = (1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1$$

(b) **Binomijalna mjera** na $\mathbb{R}$ s parametrima p i n je dana sa

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,\delta_k$$

(c) **Poissonova mjera** na $\mathbb{R}$ s parametrom λ je dana sa

$$P = \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\delta_k$$

(d) **Polinomijalna mjera** na $\mathbb{R}^n$ s parametrima k i p je dana sa

$$P = \sum_{|\omega|=k} \frac{k!}{\omega!} p^\omega \delta_\omega$$

Sve ove mjere su Borelove i njihov nosač je $\operatorname{supp} P = \{\omega; P(\{\omega\}) \neq 0\}$, pa je $(\operatorname{supp} P, P)$ diskretni vjerojatnostni prostor.

(5) Neka je $\mu = \sum_{n\geqslant 1} \delta_n$ mjera na $\mathbb{R}$. Ona je diskretna Borelova mjera na $\mathbb{R}$ i $\mu(A) = |A \cap \mathbb{N}|$ pa je ona beskonačna mjera zbog $\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{N}) = |\mathbb{N}| = \infty$.

(6) Neka je Ω prebrojiv skup, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ i $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu(A) = 0$, ako je A konačan i $\mu(A) = \infty$, ako je A beskonačan. Tada je μ aditivna funkcija ali nije σ-aditivna, tj. nije mjera.

(7) Neka je μ iz (5), $A_n = n + \mathbb{N}_0 = \{n, n+1, \ldots\}$. Tada $A_n \downarrow \varnothing$, $\mu(A_n) = \infty$, $n \geq 1$, pa vidimo da tvrdnja (2) iz Teorema 2.5 ne vrijedi bez pretpostavke $\mu(A_n) < \infty$, za neki $n \geq 1$.

(8) Neka je Ω prebrojiv i $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ skup svih konačnih podskupova iz Ω i njihovih komplemenata. Tada je $\mathcal{A}$ algebra, ali nije σ-algebra. Definiramo $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$, $\mu(A) = 0$, ako je A konačan i $\mu(A) = 1$, ako je A^c konačan. Tada je μ aditivna, ali nije σ-aditivna. Nadalje, ako je $\Omega = \{\omega_n; n \in \mathbb{N}\}$, $A_n = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ onda $A_n \uparrow \Omega$ i $\mu(A_n) = 0$, $n \geq 1$, dok je $\mu(\Omega) = 1$, što znači da $\mu(A_n)$ ne konvergira prema $\mu(\Omega)$.

DEFINICIJA 2.8 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom.*

(1) *Ako je $A \in \mathcal{A}$ i $\mu(A) = 0$ onda se A zove* ***zanemariv skup****. Skup svih zanemarivih skupova od μ označavamo sa $Z(\mu)$.*

(2) *Kažemo da je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$* ***potpun prostor*** *ili da je μ* ***potpuna mjera*** *ako je podskup zanemarivog skupa zanemariv tj. ako $B \subset A$ i $A \in Z(\mu)$ povlači $B \in Z(\mu)$.*

(3) *Neka su μ, ν mjere na $(\Omega, \mathcal{A})$. Kažemo da je ν* ***apsolutno neprekidna*** *u odnosu na μ i pišemo $\nu \ll \mu$ ako $Z(\nu) \supseteq Z(\mu)$. Kažemo da su ν i μ ekvivalentne i pišemo $\nu \approx \mu$ ako je $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$ tj. $Z(\nu) = Z(\mu)$.*

2.1 Lebesgueova mjera

PRIMJERI 2.9

(1) Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom, $\mathcal{A}^*$ skup svih $A \cup E$, gdje je $A \in \mathcal{A}$ i E podskup nekog zanemarivog skupa. Nadalje, neka je $\mu^* : \mathcal{A}^* \to [0, \infty]$, $\mu^*(A \cup E) = \mu(A)$. Tada vrijedi:
(a) $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ je potpun prostor s mjerom.
(b) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ i $\mu = \mu^* | \mathcal{A}$
(c) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^*$ i $(\mu^*)^* = \mu^*$
Prostor $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ se zove **upotpunjenje** od $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ potpun onda je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ i $\mu^* = \mu$.
(2) Neka je μ Borelova mjera na $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je μ **lokalno konačna** ako je $\mu(K) < \infty$, za svaki kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$. Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća tj. $F(a) \leq F(b)$, za $a \leq b$, i zdesna neprekidna funkcija tj. F ima limes zdesna

$$\lim_{x \to a+0} F(x) = F(a), \ a \in \mathbb{R}$$

Tada se F zove **funkcija distribucije na** $\mathbb{R}$. Ovakve funkcije nam služe kako bismo konstruirali lokalno konačne mjere na $\mathbb{R}$. Naime, ako je zadana funkcija distribucije F na $\mathbb{R}$ onda se može dokazati, što mi nećemo raditi zbog toga što je to jako dugačko, da postoji jedinstvena lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}$ takva da je

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a), \ a \leq b$$

Obratno, ako je zadana lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}$ onda je ovom formulom, do na aditivnu konstantu, jedinstveno određena funkcija distribucije F na $\mathbb{R}$ i za nju vrijedi

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \mu((0, x]), \ x \geq 0 \\ F(x) &= F(0) - \mu((x, 0]), \ x < 0 \end{aligned}$$

Neprekidnost zdesna od F se dobije iz σ-aditivnosti od μ i obratno.
(3) Neka je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ i μ pripadna mjera kao u (2). Ako za limes slijeva uvedemo oznaku

$$F(a-) = \lim_{x \to a-0} F(x), \ a \in \mathbb{R}$$

onda za svaki $a \leq b$ vrijedi:
(a) $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$
(b) $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a-)$

(c) $\mu((a,b)) = \mu((a,b]) - \mu(\{b\}) = F(b-) - F(a)$
(d) $\mu([a,b]) = \mu((a,b]) + \mu(\{a\}) = F(b) - F(a-)$
(e) $\mu([a,b)) = \mu((a,b]) + \mu(\{a\}) - \mu(\{b\}) = F(b-) - F(a-)$

(4) Neka su F i μ kao u (3). Tada vrijedi:
(a) μ je neprekidna ako i samo ako je F neprekidna.
(b) μ je konačna ako i samo ako je F ograničena i tada je

$$\mu(\mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) = \lim_{x\to\infty}(F(x) - F(-x))$$

(5) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, integrabilna po Riemannu na svakom intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Definiramo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$F(x) = \alpha + \int_0^x f(t)\,dt,\ x \geq 0; \quad F(x) = \alpha - \int_x^0 f(t)\,dt,\ x < 0$$

za neki $\alpha = F(0) \in \mathbb{R}$. Tada je F neprekidna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ i za pripadnu mjeru μ vrijedi

$$\mu((a,b]) = \int_a^b f(t)\,dt,\ a \leq b$$

Funkcija f se zove **gustoća od** μ. Ako stavimo $f = 1$ onda je $F(x) = \alpha + x$. Tada za pripadnu mjeru μ vrijedi $\mu((a,b]) = b - a$. Ova mjera je posebno važna. Ona se zove **Lebesgueova mjera** na $\mathbb{R}$. Nju ćemo u daljem označavati sa m_1. Upotpunjenje Borelove σ-algebre $B(\mathbb{R})$ u odnosu na m_1 označavamo sa $B(\mathbb{R})^*$ i zovemo je **Lebesgueova σ-algebra** na $\mathbb{R}$, a mjeru m_1^* također zovemo Lebesgueova mjera. Zamijetimo da $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), m_1)$ nije potpun prostor. Njegovo upotpunjenje je $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})^*, m_1^*)$. Elementi od $B(\mathbb{R})^*$ se zovu **Lebesgueovi skupovi**.

(6) Na $\mathbb{R}^n$ uvodimo **parcijalni uređaj**: za $a, b \in \mathbb{R}^n$ pišemo $a \leq b$ ako je $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, gdje su a_i, b_i koordinate vektora $a, b \in \mathbb{R}^n$. Ako je $a \leq b$ onda uvodimo oznaku

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n; a_i < x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

i slične oznake: (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$. Skup $B = (a,b]$ se zove **pravokutnik** i za njega vrijedi

$$(a,b] = (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n,b_n]$$

On ima 2^n vrhova v_i, $i = 1, \ldots, 2^n$. Koordinate nekog vrha v_i se sastoje od nekih koordinata od a i od nekih koordinata od b. Definiramo **predznak** ε_i **vrha** v_i sa $\varepsilon_i = (-1)^{k_i}$, gdje je k_i broj koordinata vrha v_i koje su koordinate od a.

Ako je $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ i $B=(a,b]$ pravokutnik s vrhovima v_i, $i=1,\ldots,2^n$, onda definiramo

$$\Delta_F(B)=\sum_{i=1}^{2^n}\varepsilon_i F(v_i)$$

Npr. za $n=2$, $B=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]$ imamo

$$\Delta_F(B)=F(a_1,a_2)+F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)$$

Neka je sada $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi:

(a) $\Delta_F(B)\geq 0$, za svaki $B=(a,b]\,,\ a\leq b$

(b) Ako je (x_k) niz u $\mathbb{R}^n$, $x_1\geq x_2\geq\cdots$ i $x_k\to x\in\mathbb{R}^n$ onda je $\lim F(x_k)=F(x)\,.$ Ovo svojstvo od F zovemo **neprekidnost zdesna**.

Tada se F zove **funkcija distribucije** na $\mathbb{R}^n$. Za $n=1$ ponovno dobijemo već prije definiranu funkciju distribucije na $\mathbb{R}$.

(7) Neka je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$. Tada se može dokazati, što mi opet nećemo raditi zbog toga što je to jako dugačko, da postoji jedinstvena lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}^n$ takva da je

$$\mu(B)=\Delta_F(B)\,,\ B=(a,b]\,,\ a\leq b,\ a,b\in\mathbb{R}^n$$

(8) Ako je μ konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}^n$ i $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definirana sa

$$F(x)=\mu((-\infty,x]),\ \ (-\infty,x]=(-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_n]$$

onda je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$ i vrijedi $\mu(B)=\Delta_F(B)\,,\ B=(a,b]\,,$ $a\leq b$. Ona je ograničena i vrijedi $0\leq F(x)\leq\mu(\mathbb{R}^n)\,,\ x\in\mathbb{R}^n$.

(9) Ako su $F_1,\ldots,F_n$ funkcije distribucije na $\mathbb{R}$ i $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$F(x)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n)$$

onda je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$ i za $B=(a,b]$ vrijedi:

$$\Delta_F(B)=(F_1(b_1)-F_1(a_1))\cdots(F_n(b_n)-F_n(a_n))$$

Ako su $\mu_1,\ldots,\mu_n$ i μ pripadne mjere onda je

$$\mu((a,b])=\mu_1((a_1,b_1])\cdots\mu_n((a_n,b_n])$$

pa pišemo $\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_n$ i mjeru μ zovemo **produkt mjera** $\mu_1,\ldots,\mu_n$.

Specijalno, ako stavimo $F_i(x)=x,\ i=1,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}$, onda je $\mu_i=m_1$ i $\mu=m_1\times\cdots\times m_1$. Ovu mjeru zovemo **Lebesgueova mjera na** $\mathbb{R}^n$ i označavamo je sa m_n. Funkcija distribucije F od m_n je dana formulom

$$F(x)=x_1x_2\cdots x_n,\ x\in\mathbb{R}^n$$

(10) Ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, integrabilna po Riemannu na svakom pravokutniku i $\int f(x)\,dx < \infty$ onda je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n)\,dy_1 \cdots dy_n$$

funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$. Za njezinu pripadnu mjeru μ vrijedi:

$$\mu((a,b]) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(y_1, \ldots, y_n)\,dy_1 \cdots dy_n$$

za svaki $a \leq b$. Funkcija f se zove **gustoća od** μ.
(11) Analogno kao u (5) definiramo **Lebesgueovu σ-algebru** $B(\mathbb{R}^n)^*$ i **Lebesgueove skupove** na $\mathbb{R}^n$. Ponovno vrijede analogna svojstva kao za $n = 1$. Nadalje, također vrijedi:

(a) Ako je $A \in B(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, onda je $a + A \in B(\mathbb{R}^n)$ tj. Borelova σ-algebra je **invarijantna na translacije**. Analogno vrijedi za Lebesgueovu σ-algebru $B(\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Lebesgueova mjera m_n je **invarijantna na translacije** tj.

$$m_n(a + A) = m_n(A), \;\; A \in B(\mathbb{R}^n), \;\; a \in \mathbb{R}^n$$

Naime, ako je $A = (a', b']$ onda je $a + A = (a + a', a + b']$ pa je tvrdnja evidentna. Nadalje, pravokutnici generiraju Borelovu σ-algebru.

TEOREM 2.10 (Teorem o produktu mjera)

Neka su $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ prostori sa σ-konačnim mjerama, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ σ-algebra na $\Omega_1 \times \Omega_2$ generirana svim skupovima oblika $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Tada postoji jedinstvena mjera μ na $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ takva da je

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1)\,\mu(A_2), \;\; A_1 \in \mathcal{A}_1, \;\; A_2 \in \mathcal{A}_2$$

*Mjera μ se zove **produkt mjera** μ_1 i μ_2 i označava se sa $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Prostor s mjerom $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ se zove **produkt prostora s mjerom** $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$.*

Dokaz Dokaz je dosta kompliciran pa ga ne navodimo. Diskretnu verziju ovog teorema za vjerojatnostne mjere smo dokazali u Poglavlju 1. Vidi Propoziciju 1.7.

PRIMJERI 2.11

(1) Ako je $n_1 + n_2 = n$ onda je

(a) $B\left(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\right) = B\left(\mathbb{R}^{n_1}\right) \times B\left(\mathbb{R}^{n_2}\right)$

(b) $B\left(\mathbb{R}^{n}\right) = B\left(\mathbb{R}\right) \times \cdots \times B\left(\mathbb{R}\right)$, n-puta

(c) $m_{n_1+n_2} = m_{n_1} \times m_{n_2}$

(d) $m_n = m_1 \times \cdots \times m_1$, n-puta

(2) Kažemo da su mjere μ_1 i μ_2 **okomite** i pišemo $\mu_1 \perp \mu_2$ ako su μ_1 i μ_2 koncentrirane na disjunktnim skupovima. Npr. svaka diskretna mjera μ na $\mathbb{R}^n$ je okomita na m_n. Ako je μ Borelova mjera na $\mathbb{R}^n$ onda kažemo da je μ **singularna** ako je μ neprekidna i okomita na m_n.

2.2 Izmjerive funkcije

DEFINICIJA 2.12 (1) *Neka su* $(\Omega, \mathcal{A})$ *i* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *izmjerivi prostori i* $f : \Omega \to \Omega'$. *Kažemo da je* f ***izmjeriva funkcija*** *ako je* $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$ *tj.* $\{f^{-1}(A'); A' \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{A}$.

(2) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* Ω' *topološki prostor i* $f : \Omega \to \Omega'$. *Kažemo da je* f ***izmjeriva funkcija*** *ako je* $f^{-1}(B(\Omega')) \subset \mathcal{A}$.

PROPOZICIJA 2.13 (1) *Neka su* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3$, *izmjerivi prostori* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *i* $g : \Omega_2 \to \Omega_3$. *Ako su* f *i* g *izmjerive onda je* $g \circ f$ *također izmjeriva.*

(2) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* Ω' *topološki prostor i* $f : \Omega \to \Omega'$. *Ako je* $f^{-1}(U) \subset \mathcal{A}$, *za svaki otvoreni skup* $U \subset \Omega'$, *onda je* f *izmjeriva.*

(3) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* Ω', Ω'' *topološki prostori,* $f : \Omega \to \Omega'$ *izmjeriva funkcija i* $g : \Omega' \to \Omega''$ *neprekidna funkcija. Tada je* $g \circ f$ *izmjeriva.*

Dokaz (1) $(g \circ f)^{-1}(A_3) = f^{-1}(g^{-1}(A_3)) \in \mathcal{A}_1$, za $A_3 \in \mathcal{A}_3$. (2) $B(\Omega')$ je generirana topologijom. (3) Slijedi iz (1) i (2).

KOROLAR 2.14 *Ako su* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *izmjerive i* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *neprekidna onda je* $h = \Phi(f, g)$ *izmjeriva.*

Dokaz $(f, g) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je izmjeriva pa po prethodnoj propoziciji zaključujemo da je $h = \Phi \circ (f, g) = \Phi(f, g)$ izmjeriva.

KOROLAR 2.15 *Neka su* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *izmjerive funkcije. Tada su izmjerive sljedeće funkcije:* $f + g$, αf, *za* $\alpha \in \mathbb{R}$, fg, $\min(f, g)$, $\max(f, g)$, $|f|$, $1/f$, *za* $f(x) \neq 0$, $x \in \Omega$.

Dokaz Tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara biranjem pogodne funkcije Φ. Npr. $f + g = \Phi(f, g)$, za $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(t_1 + t_2) = t_1 + t_2$.

KOROLAR 2.16 *Neka je* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija,* $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0)$. *Tada su* f_+ *i* f_- *izmjerive funkcije i vrijedi:*
(a) $f_+ \geq 0,\ f_- \geq 0,\ f_+ f_- = 0$
(b) $f = f_+ - f_-,\ |f| = f_+ + f_-$
(c) $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f),\ f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$
Nadalje, ako je $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija onda vrijedi:*
(e) $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$
(f) $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$
(g) $\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$
(h) $\max(f, g) - \min(f, g) = |f - g|$

Dokaz Slijedi iz prethodnog korolara.

PROPOZICIJA 2.17 *Neka je* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *funkcija s koordinatama* $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. *Tada je* f *izmjeriva ako i samo ako su izmjerive sve koordinate* f_i, $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz $f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$, $U_i \subset \mathbb{R}$. Nadalje, svi produkti $U_1 \times \cdots \times U_n$, U_i otvoreni u $\mathbb{R}$, čine bazu topologije na $\mathbb{R}^n$.

PRIMJERI 2.18

(1) Za $f : \Omega \to \Omega'$ uvodimo oznaku $(f \in A) = f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \in A\}$, $A \subset \Omega'$. Ako je $\Omega' = \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, onda također pišemo $(f < \alpha) = f^{-1}((-\infty, \alpha))$ i slične oznake: $(f \leq \alpha)$, $(f \geq \alpha)$, $(f > \alpha)$, $(f = \alpha)$. Budući da vrijedi:

$$(f \geq \alpha) = \bigcap_n (f > \alpha - \tfrac{1}{n}), \quad (f \leq \alpha) = \bigcap_n (f > \alpha + \tfrac{1}{n})$$

zaključujemo da je izmjerivost od f ekvivalentna sa svakim od slijedećih svojstava:
(a) $(f > \alpha) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) $(f \geq \alpha) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(c) $(f < \alpha) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $(f \leq \alpha) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(2) Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ izmjerive. Tada vrijedi:
(a) $(f = \alpha)$ je izmjeriv, $\alpha \in \mathbb{R}$
(b) $(f = g)$ je izmjeriv
(c) χ_A je izmjeriva ako i samo ako je A izmjeriv
(d) Svaka konstantna funkcija je izmjeriva.
Slične tvrdnje vrijede ako umjesto $\mathbb{R}$ stavimo $\overline{\mathbb{R}}$.
(3) Ako je $f : \Omega \to \Omega'$ i $\mathcal{A}'$ σ-algebra na Ω' onda je

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A'); A' \in \mathcal{A}'\}$$

σ-algebra na Ω. Ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω i $\mathcal{A}' = f(\mathcal{A}) = \{f(A); A \in \mathcal{A}\}$ onda $\mathcal{A}'$ ne mora biti σ-algebra. Ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω i

$$\mathcal{A}' = \{A' \subset \Omega'; f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

onda je $\mathcal{A}'$ σ-algebra na Ω'.

TEOREM 2.19 *Ako su $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjerive funkcije, $n \geq 1$, onda su sljedeće funkcije također izmjerive:* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\underline{\lim} f_n$, $\overline{\lim} f_n$, $\lim f_n$ *(ako postoji),* $\sum f_n$ *(ako konvergira).*

Dokaz Ako je $f = \sup f_n$ onda je $(f > \alpha) = \bigcup (f_n > \alpha)$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, iz čega slijedi izmjerivost od f, po prethodnom primjeru. Ako je $f = \inf f_n$ onda je $f = -\sup(-f_n)$ pa je f izmjeriva. Nadalje, izmjerivost preostalih funkcija slijedi iz izmjerivosti ovih dviju, naime $\underline{\lim} f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$ i $\overline{\lim} f_n = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$, a ako postoji $\lim f_n$ onda je $\lim f_n = \underline{\lim} f_n = \overline{\lim} f_n$ te je također $\sum f_n = \lim(f_1 + \cdots + f_n)$.

KOROLAR 2.20 *Neka su $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjerive i $E \subset \Omega$ skup svih $\omega \in \Omega$ za koje postoji* $\lim f_n(\omega) = f(\omega)$. *Tada je E izmjeriv.*

Dokaz Ako je $g = \overline{\lim} f_n$ i $h = \underline{\lim} f_n$ onda je $E = (g = h) \cap (g = f)$.

DEFINICIJA 2.21 (1) *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor sa potpunom mjerom. Ako neka tvrdnja ili svojstvo vrijede za sve $\omega \in \Omega$ osim za $\omega \in E$, $\mu(E) = 0$, onda kažemo da ta tvrdnja ili svojstvo vrijedi* ***skoro svuda****, skraćeno* ***s.s.*** *ili μ* ***s.s.*** *Npr. $f = g$ s.s. znači $f(\omega) = g(\omega)$, $\omega \neq E$, $\mu(E) = 0$, dok $f < \infty$ s.s. znači $f(\omega) < \infty$, $\omega \neq E$, $\mu(E) = 0$.*

(2) *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ izmjeriva i $f(\Omega)$ konačan skup. Tada se f zove* ***prosta funkcija****. Ako je $f(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ i $E_k = (f = \alpha_k)$, $k = 1, \ldots, n$, onda se, evidentno, f može napisati u obliku*

$$f = \alpha_1 \chi_{E_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n}$$

Ovakav prikaz je jedinstven ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ različiti.

Zamijetimo da sve proste funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$ čine algebru nad $\mathbb{R}$. Ako je f prosta onda su $|f|$, f_+ i f_- također proste.

TEOREM 2.22 *Neka je $f : \Omega \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz prostih funkcija $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f$ i* $\lim f_n(x) = f(x)$, $x \in \Omega$.

Dokaz Ako je $n \geq 1$ i $1 \leq k \leq n2^n$ onda stavimo

$$E_{n,k} = (f \in [\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k}{2^n})),\ F_n = (f \geq n)$$

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \tfrac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}$$

Tada je (f_n) traženi niz prostih funkcija.

Zamijetimo da je $f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$, za $f(x) < n$.

KOROLAR 2.23 *Ako je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva onda postoji niz prostih funkcija (f_n) tako da vrijedi $|f_n| \leq |f|$, $n \geq 1$, i $\lim f_n(x) = f(x)$, $x \in \Omega$.*

Dokaz Neka su (g_n) i (h_n) nizovi prostih funkcija iz teorema pridruženi funkcijama f_+ i f_-. Tada niz $f_n = g_n - h_n$, $n \geq 1$, ima traženo svojstvo.

DEFINICIJA 2.24 (1) *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom, Ω_1 topološki prostor i $f : \Omega \to \Omega_1$ izmjeriva funkcija. Ako je $\nu : B(\Omega_1) \to [0, \infty]$, $\nu(E) = \mu(f \in E)$, onda je ν, evidentno, mjera na $(\Omega_1, B(\Omega_1))$ i zovemo je* ***distribucija od f u odnosu na μ*** *i označavamo je sa $\nu = \mu_f = \mu \circ f^{-1}$.*

(2) *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor, Ω_1 topološki prostor i $f : \Omega \to \Omega_1$ izmjeriva funkcija. Tada se f zove* ***slučajna varijabla*** *u Ω_1. Slučajne varijable obično označavamo velikim slovima $X, Y, Z, \ldots$Zamijetimo da je $(\Omega_1, B(\Omega_1), P_f)$ vjerojatnostni prostor.*

(3) *Kažemo da je slučajna varijabla f iz (2) diskretna ako je $f(\Omega)$ najviše prebrojiv skup. Tada je, evidentno, distribucija P_f diskretna vjerojatnost na $f(\Omega)$ i $(f(\Omega), P_f)$ je diskretni vjerojatnostni prostor.*

PRIMJERI 2.25

(1) Lebesgueova mjera m_n je lokalno konačna, σ-konačna, neprekidna i beskonačna. Ako je $n \geq 2$ i $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x_k$, $k = 1, \ldots, n$, onda su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ neprekidne pa su i izmjerive. Označimo sa ν_k distribuciju od f_k u odnosu na m_n. Tada je $\nu_1 = \cdots = \nu_n$ Borelova mjera na $\mathbb{R}$. Ona nije σ-konačna! Naime, $\nu_1(E) = \infty$, čim je $m_1(E) \neq 0$, zbog

$$\nu_1(E) = m_n(E \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) = m_1(E)\, m_1(\mathbb{R})^{n-1} = \infty$$

za $m_1(E) \neq 0$. Prema tome $\nu_1(E) = 0$ ili ∞, za svaki $E \in B(\mathbb{R})$! Mi ćemo veoma rijetko razmatrati mjere koje nisu σ-konačne. Naime, σ-konačnost se može smatrati "minimumom ljepote" za neku mjeru. One koje su "ružnije" nisu uopće popularne, s manjim iznimkama. Gornja mjera ν_1 služi samo kao egzotični primjer i u daljem nam neće trebati.

(2) Neka je ν norma na $\mathbb{R}^n$, $D_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n; \nu(x) < 1\}$ otvorena kugla od ν sa središtem u 0 radiusa 1. Tada je

$$m_n(\nu \leq t) = m_n(tD_\nu) = m_n(D_\nu)t^n, \; t \geq 0$$

Dakle, funkcija distribucije od $m_n \circ \nu^{-1}$ je $F(t) = m_n(D_\nu)\,t^n$, za $t \geq 0$, pa je distribucija $m_n \circ \nu^{-1}$ koncentrirana na $[0,\infty)$ i ima gustoću $n \cdot m_n(D_\nu)\,t^{n-1}$.
(3) Navedimo neka standardna svojstva od m_n, poznata iz analize:
(a) $m_n(\{x\}) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$
(b) $m_n(a+E) = m_n(E)\,,\; a \in \mathbb{R}^n$, $E \in B(\mathbb{R}^n)$
(c) $m_n(UE) = m_n(E)\,,\; U \in O(n)\,,\; E \in B(\mathbb{R}^n)$
(d) $m_n(AE) = |\det A| \cdot m_n(E)\,,\; A \in gl_n(\mathbb{R})$
(e) Ako je $A \in GL_n(\mathbb{R})$ onda je distribucija od A proporcionalna sa m_n tj. $m_n \circ A_n^{-1} = \alpha \cdot m_n$, gdje je $\alpha = 1/\,|\det A|$
(f) Ako je $A \in gl_n(\mathbb{R})$ singularna onda distribucija od A nije σ-konačna!
(4) Definiramo niz otvorenih skupova $E_n \subset I = [0,1]\,,\; n \in \mathbb{N}$, induktivno sa: $E_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, E_n dobijemo tako da svaki od 2^{n-1} segmenata od $I \backslash E_{n-1}$ podijelimo na tri jednaka dijela i uzmemo iz njih srednju otvorenu trećinu. Dakle, E_n je disjunktna unija od 2^{n-1} intervala $E_{n,k}$, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, a svaki $E_{n,k}$ ima duljinu 3^{-n}. Nadalje
(a) E_n, $n \geq 1$, su disjunktni i $m_1(E_n) = 2^{n-1}/3^n$, $n \geq 1$
(b) Ako je $E = \bigcup E_n$ onda je E otvoren i

$$m_1(E) = \sum_{n\geq 1} m_1(E_n) = \sum_{n\geq 1} \tfrac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

(c) Skup $C = I \backslash E$ je zatvoren u I i zovemo ga **Cantorov skup**.
(d) $m_1(C) = m_1(I \backslash E) = 1 - m_1(E) = 1 - 1 = 0$
(e) $x \in C$ ako i samo ako je $x = \sum_{n\geq 1} a_n 3^{-n}$, gdje je $a_n = 0$ ili 2. Ovo se dobije ako x napišemo kao decimalni broj pri čemu koristimo bazu 3. Iz ovoga slijedi neprebrojivost od C.
(5) Definiramo funkciju $\varphi : I \to I$,

$$\varphi(x) = \tfrac{2k-1}{2^n}, \; x \in \overline{E_{n,k}}; \quad k = 1, \ldots, 2^{n-1}$$

Tada je φ neprekidna i monotona funkcija i zovemo je **Cantorova funkcija**. Za nju vrijedi:
(a) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$
(b) $\varphi(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}\varphi(x)\,,\; x \in I$
(c) $\varphi(\frac{x+2}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x)\,,\; x \in I$
(d) φ je derivabilna na $E = C^c$ i $\varphi'(x) = 0$, $x \in E$
(6) Cantorova funkcija φ je funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ pa definira mjeru μ na $\mathbb{R}$ koju zovemo **Cantorova mjera** na $\mathbb{R}$. Ona ima sljedeća svojstva:

(a) μ je Borelova vjerojatnost na $\mathbb{R}$ koncentrirana na $I = [0,1]$
(b) μ je neprekidna i $\operatorname{supp} \mu$ je Cantorov skup.
(c) μ je singularna mjera zbog $m_1(C) = 0$
(d) Ako je $B \subset I$ Borelov skup onda je

$$\mu(\tfrac{1}{3}B) = \mu(\tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{2}\mu(B)$$

Poglavlje 3

Integracija izmjerivih funkcija

3.1 Osnovna svojstva integrala

DEFINICIJA 3.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom.*

(1) *Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f = \alpha_1\chi_{E_1} + \cdots + \alpha_k\chi_{E_k}$ prosta funkcija onda se*

$$\int f d\mu = \alpha_1\mu(E_1) + \cdots + \alpha_k\mu(E_k)$$

*zove **integral od** f **po mjeri** μ, ako je $\mu(f \neq 0) < \infty$.*

(2) *Ako je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva i $f \geq 0$ onda se*

$$\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu; 0 \leq h \leq f,\ h \text{ prosta}\}$$

*zove **integral od** f **po mjeri** μ. Ako je $\int f d\mu < \infty$ onda kažemo da je f **integrabilna** ili μ-**integrabilna**.*

(3) *Ako je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva onda se*

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

*zove **integral od** f **po mjeri** μ, ako je bar jedan od ova dva integrala konačan. Ako su oba integrala konačna onda kažemo da je f **integrabilna** ili μ-**integrabilna**.*

(4) *Ako je $E \in \mathcal{A}$ onda definiramo $\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu$.*

(5) *Za integral uvodimo i druge oznake*

$$\int f d\mu = \int f(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$$

TEOREM 3.2 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom i $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilne funkcije. Tada vrijedi:*

(1) *$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(2) *Ako je $f \leq g$ onda je $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ (**Monotonost integrala**).*

(3) *$|\int f d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$ (**Ocjena integrala**).*

(4) *$f\chi_E$ je integrabilna za svaki $E \in \mathcal{A}$.*

Dokaz (1) Ako je f prosta onda je tvrdnja trivijalna. Ako je $f \geq 0$ i $\alpha > 0$ onda je

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \sup\{\int h d\mu; 0 \leq h \leq \alpha f,\ h \text{ prosta}\} \\ &= \alpha \sup\{\int \tfrac{h}{\alpha} d\mu; 0 \leq \tfrac{h}{\alpha} \leq f,\ \tfrac{h}{\alpha} \text{ prosta}\} = \alpha \int f d\mu \end{aligned}$$

Općenito za $f = f_+ - f_-$ i $\alpha > 0$ imamo $(\alpha f)_+ = \alpha f_+$, $(\alpha f)_- = \alpha f_-$ pa po prethodnom dobijemo tvrdnju. Ako je $\alpha < 0$ onda je $(\alpha f)_+ = -\alpha f_-$, $(\alpha f)_- = -\alpha f_+$ pa je

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)_+ d\mu - \int (\alpha f)_- d\mu = \int (-\alpha) f_- d\mu - \int (-\alpha) f_+ d\mu \\ &= -\alpha \int f_- d\mu + \alpha \int f_+ d\mu = \alpha \int f d\mu \end{aligned}$$

(2) Ako je $f \geq 0$, $g \geq 0$, $f \leq g$ i $0 \leq h \leq f$, gdje je h prosta, onda je $0 \leq h \leq g$ pa je $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. Ako je $f \leq g$ onda je $f_+ \leq g_+$ i $f_- \geq g_-$ pa je $\int g_- d\mu \leq \int f_- d\mu$ što znači da je

$$\int g d\mu = \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu \geq \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu = \int f d\mu$$

(3) Budući da je $-|f| \leq f \leq |f|$ tvrdnja slijedi iz (1) i (2).
(4) Budući da je $(f\chi_E)_+ \leq f_+$, i $(f\chi_E)_- \leq f_-$ tvrdnja slijedi iz (2).

TEOREM 3.3 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom i $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcja, $f \geq 0$. Ako je $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

onda je λ mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dokaz Ako je $f = \alpha_1 \chi_{E_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n}$ prosta funkcija onda je

$$\lambda(E) = \alpha_1 \mu(E_1 \cap E) + \cdots + \alpha_n \mu(E_n \cap E)$$

pa je tvrdnja evidentna. Razmotrimo sada opći slučaj. Neka su B_n, $n \geq 1$, disjunktni izmjerivi skupovi i $B = \bigcup B_n$. Ako je $0 \leq h \leq f$, gdje je h prosta, onda je

$$\int_B h d\mu = \sum_n \int_{B_n} h d\mu \leq \sum_n \int_{B_n} f d\mu = \sum_n \lambda(B_n)$$

Ako uzmemo sup po h dobijemo $\lambda(B) \leq \sum_n \lambda(B_n)$.

Budući da je $B_n \subset B$ slijedi $\chi_{B_n} \leq \chi_B$ pa je $\lambda(B_n) \leq \lambda(B)$ po prethodnom teoremu. Ako je $\lambda(B_n) = \infty$ onda je tvrdnja trivijalna, pa možemo smatrati $\lambda(B_n) < \infty$, za svaki $n \geq 1$. Neka su sada zadani $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$. Po prethodnom teoremu i činjenici da je max konačnog broja prostih funkcija prosta funkcija zaključujemo da postoji prosta funkcija h, $0 \leq h \leq f$, takva da je

$$\int_{B_i} hd\mu \geq \int_{B_i} fd\mu - \tfrac{\varepsilon}{n},\ i = 1, .., n$$

pa dobijemo

$$\begin{aligned} \lambda(B_1 \cup \cdots \cup B_n) &\geq \int_{B_1 \cup \cdots \cup B_n} hd\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} hd\mu \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} fd\mu - \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) - \varepsilon \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti od n i ε je

$$\lambda(B) \geq \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) - \varepsilon$$

pa je $\lambda(B) \geq \sum_n \lambda(B_n)$ te je time tvrdnja dokazana.

TEOREM 3.4 (Teorem o monotonoj konvergenciji)
Ako je $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ niz izmjerivih funkcija i $f = \lim f_n$ onda je

$$\int fd\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Dokaz Budući da je $f_n \leq f$, $n \geq 1$, dobijemo $\int f_n d\mu \leq \int fd\mu$, $n \geq 1$, pa je

$$K = \lim \int f_n d\mu = \sup \int f_n d\mu \leq \int fd\mu.$$

Neka je $0 < b < 1$ i $0 \leq h \leq f$, gdje je h prosta, i $B_n = (f_n \geq bh)$. Tada $B_n \uparrow \Omega$ pa je

$$K \geq \int f_n d\mu \geq \int_{B_n} f_n d\mu \geq b \int_{B_n} hd\mu$$

Po prethodnom teoremu vrijedi $\int_{B_n} hd\mu \to \int hd\mu$, za $n \to \infty$, pa za $b \to 1$ dobijemo $K \geq \int hd\mu$. Ako sada uzmemo sup po h dobijemo $K \geq \int fd\mu$ što na koncu daje $K = \int fd\mu$.

TEOREM 3.5 *Ako su f i g integrabilne onda je $f + g$ integrabilna i*

$$\int (f + g)\, d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$$

Dokaz Ako su f i g proste onda je tvrdnja trivijalna. Neka su sada f, g izmjerive i $f \geq 0$, $g \geq 0$. Po Teoremu 2.22 postoje nizovi prostih funkcija (f_n) i (g_n) koji su rastući i $f_n \to f$, $g_n \to g$. Ako stavimo $h = f + g$ onda niz $h_n = f_n + g_n$ raste i $h_n \to h$. Sada po prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \lim \int (f_n + g_n)\, d\mu = \lim[\int f_n d\mu + \int g_n d\mu] \\ &= \lim \int f_n d\mu + \lim \int g_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu\end{aligned}$$

Dokažimo sada opći slučaj: $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$, $h = f + g$, $h = h_+ - h_-$, $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$ iz čega slijedi $h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-$. Sada po prvom dijelu dokaza imamo

$$\int h_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu + \int h_- d\mu$$

Budući da su svi ovi integrali konačni dobijemo $\int h d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

KOROLAR 3.6 *Neka su $f_n \geq 0$, $n \geq 1$, integrabilne funkcije i $f = \sum f_n$. Ako je f integrabilna onda je*

$$\int f d\mu = \sum \int f_n d\mu$$

Ako f nije integrabilna ond ovaj red divergira.

Dokaz Neka je $g_n = f_1 + \cdots + f_n$. Tada je $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq f$ i $g_n \to f$ pa po prethodna dva teorema imamo $\int f d\mu = \lim \int g_n d\mu = \sum \int f_n d\mu$.

KOROLAR 3.7 (1) *f je integrabilna ako i samo ako je $|f|$ integrabilna.*
(2) *Ako su f i g izmjerive, $|g| \leq f$ i f integrabilna onda je i g integrabilna.*

Dokaz (1) $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$. Nadalje, f je integrabilna ako i samo ako $\int f_+ d\mu < \infty$ i $\int f_- d\mu < \infty$ što je ekvivalentno sa $\int |f|\, d\mu < \infty$. (2) $\int |g|\, d\mu \leq \int f d\mu < \infty$ pa primijenimo (1).

PROPOZICIJA 3.8 (1) *Ako je $f = 0$ s.s. onda je $\int f d\mu = 0$.*
(2) *Ako je $f = g$ s.s. onda je $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

Dokaz (1) Ako je $f = \alpha_1 \chi_{E_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n} = 0$ *s.s.* onda iz $\alpha_i \neq 0$ slijedi $\mu(E_i) = 0$ pa je $\int f d\mu = 0$ što znači da tvrdnja vrijedi za proste funkcije. Ako je $f \geq 0$, $0 \leq h \leq f$, gdje je h prosta, i $f = 0$ *s.s.* onda je $h = 0$ *s.s.* pa je $\int h d\mu = 0$ što znači $\int f d\mu = 0$. U općem slučaju za $f = f_+ - f_-$ imamo $f = 0$ *s.s.* ako i samo ako je $f_+ = 0$ *s.s* i $f_- = 0$ *s.s.* pa tvrdnja slijedi iz prethodnog dijela dokaza.

(2) Neka je $A = (f = g)$ i $B = A^c$. Tada je $\mu(B) = 0$ i vrijedi $f = f\chi_A + f\chi_B$ i $g = g\chi_A + g\chi_B = f\chi_A + g\chi_B$. Sada tvrdnja slijedi iz (1) zbog $g\chi_B = f\chi_B = 0$ *s.s.*

PROPOZICIJA 3.9 (1) *Ako je f integrabilna onda je $|f| < \infty$ s.s.*
(2) *Ako je $f \geq 0$ i $\int f d\mu = 0$ onda je $f = 0$ s.s.*

Dokaz (1) Neka je $A = (|f| = \infty)$. Ako je $\mu(A) > 0$ onda je $\int |f| \, d\mu \geq \int_A |f| \, d\mu = \infty \cdot \mu(A) = \infty$ što je kontradikcija. (2) Neka je $A = (f > 0)$ i $A_n = (f \geq \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. Tada $A_n \uparrow A$ i $\int_{A_n} f d\mu = 0$, $n \geq 1$. Kako je $\int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n)$ slijedi $\mu(A_n) = 0$, $n \geq 1$, pa je $\mu(A) = 0$.

KOROLAR 3.10 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom i $L_1(\Omega, \mu) = L_1(\mu)$ skup svih integrabilnih funkcija $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, pri čemu identificiramo funkcije jednake skoro svuda. Tada je $L_1(\mu)$ normirani vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s normom*

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

Dokaz $L_1(\mu)$ je vektorski prostor po 3.2 i 3.5. Još ostaje dokazati da je $\|.\|_1$ zaista norma. Relacija trokuta slijedi iz

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Nadalje, $\|f\|_1 = 0$ ako i samo ako $\int |f| \, d\mu = 0$ ako i samo ako $|f| = 0$ *s.s.* ako i samo ako $f = 0$ *s.s.* ako i samo ako $f = 0$ u $L_1(\mu)$. Svojstvo $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1$ je evidentno.

KOROLAR 3.11 *Neka je λ mjera iz Teorema 3.3. Tada je $\int g d\lambda = \int g f d\mu$ za svaku izmjerivu funkciju g za koju je $gf \in L_1(\mu)$.*

*Funkcija f se zove **gustoća** ili **Radon-Nikodymova derivacija** mjere λ po mjeri μ i često pišemo $d\lambda = f d\mu$.*

Dokaz Neka je $g = \alpha_1 \chi_{E_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n}$ prosta funkcija. Tada je

$$\begin{aligned}
\int g d\lambda &= \alpha_1 \lambda(E_1) + \cdots + \alpha_n \lambda(E_n) \\
&= \alpha_1 \int_{E_1} f d\mu + \cdots + \alpha_n \int_{E_n} f d\mu \\
&= \int \left(\alpha_1 \chi_{E_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{E_n}\right) f d\mu = \int g f d\mu
\end{aligned}$$

pa tvrdnja vrijedi za svaku prostu funkciju. Uzimanjem supremuma vrijedi za svaku pozitivnu izmjerivu funkciju pa onda i za svaku izmjerivu funkciju g za koju je $gf \in L_1(\mu)$. Specijalno je $g \in L_1(\lambda)$ ako i samo ako $gf \in L_1(\mu)$.

KOROLAR 3.12 (Teorem o zamjeni varijable)

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom, Ω_1 topološki prostor, $f : \Omega \to \Omega_1$ izmjeriva funkcija s distribucijom $\nu = \mu_f$ te $\phi : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ Borelova funkcija. Tada je $\phi \in L_1(\nu)$ ako i samo ako $\phi \circ f \in L_1(\mu)$ i u tom slučaju je

$$\int \phi d\nu = \int \phi \circ f d\mu$$

Dokaz Kao i u dokazu prethodnog korolara tvrdnju je dovoljno dokazati za proste funkcije. Ako je $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ onda je $\phi \circ f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{f^{-1}(E_i)}$ pa je $\int \phi d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(E_i) = \int \phi \circ f d\mu$.

LEMA 3.13 (Fatou)
Ako je $f_n \in L_1(\mu)$ i $f_n \geq 0$, $n \geq 1$, onda je $\int \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu$.

Dokaz Neka je $g_k = \inf_{i \geq k} f_i$. Tada je $g_k \leq f_k$, $k \geq 1$, pa je $\int g_k d\mu \leq \int f_k d\mu$, $k \geq 1$. Nadalje $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$ i $g_k \to \underline{\lim} f_k$ pa po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi $\int \underline{\lim} f_k d\mu = \lim \int g_k d\mu \leq \underline{\lim} \int f_k d\mu$.

TEOREM 3.14 (Teorem o dominiranoj konvergenciji)
Neka su f, f_n, $n \geq 1$, izmjerive funkcije i $f = \lim f_n$ s.s. Ako postoji $g \in L_1(\mu)$ takav da je $|f_n| \leq g$ s.s., $n \geq 1$, onda je $f \in L_1(\mu)$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$ i $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Dokaz Kako je $|f| \leq g$ *s.s.* i $g \in L_1(\mu)$ po 3.7 je $f \in L_1(\mu)$. Primijenimo Fatouovu lemu na $2g - |f_n - f|$. Dakle

$$\int 2g d\mu \leq \underline{\lim} \int (2g - |f_n - f|) d\mu = \int 2g d\mu - \overline{\lim} \int |f_n - f| d\mu$$

pa je $\overline{\lim} \int |f_n - f| d\mu = 0$ tj. $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Nadalje

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu = \|f_n - f\|_1 \to 0, \ n \to \infty$$

iz čega slijedi posljednja tvrdnja.

PROPOZICIJA 3.15 *Neka je (f_n) niz izmjerivih funkcija za koji vrijedi $\sum \int |f_n| d\mu < \infty$. Tada $\sum f_n$ konvergira s.s. prema nekoj integrabilnoj funkciji f i vrijedi $\int f d\mu = \sum \int f_n d\mu$.*

Dokaz Neka je $g = \sum |f_n|$. Tada po uvjetu imamo $\int g d\mu < \infty$ pa je $g < \infty$ *s.s.* po 3.9. Dakle niz $f_1 + \cdots + f_n$ konvergira *s.s.* prema $\sum f_n$ i $|f_1 + \cdots + f_n| \leq g$ *s.s.* pa je po prethodnom teoremu $\sum f_n = f \in L_1(\mu)$ i $\int f d\mu = \sum \int f_n d\mu$.

PROPOZICIJA 3.16 *Ako su f, $g \in L_1(\mu)$ i $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$, za svaki $A \in \mathcal{A}$, onda je $f \leq g$ s.s.*

Dokaz Ako je $B = (f > g)$ onda je $\int_B f d\mu \leq \int_B g d\mu \leq \int_B f d\mu$ pa je $0 = \int_B (f - g) d\mu = \int (f - g) \chi_B d\mu$ pa po 3.9 slijedi $(f - g) \chi_B = 0$ *s.s.* pa je $f = g$ *s.s.* na B što znači $\mu(B) = 0$.

PRIMJERI 3.17

(1) Budući da nam je Lebesgueova mjera posebno važna za nju uvodimo i posebne oznake $L_1(\mathbb{R}^n) = L_1(\mathbb{R}^n, m_n) = L_1(m_n)$ i također

$$\int f dm_n = \int f(x)\,dx = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

tj. umjesto $dm_n(x)$ obično pišemo dx ili $dx_1 \cdots dx_n$. Nadalje, ako je $f \geq 0$ i $d\lambda = f dm_n$ onda pišemo $d\lambda(x) = f(x)\,dx$ i funkciju f zovemo **gustoća od λ po Lebesgueovoj mjeri**.

(2) Ako je $f \geq 0$ i $d\lambda = f d\mu$ onda je λ konačna mjera ako i samo ako $f \in L_1(\mu)$. Naime, $\lambda(\Omega) = \int f d\mu = \|f\|_1$. Mjera λ je vjerojatnost ako i samo ako $\int f d\mu = 1$.

Obično zadajemo primjere vjerojatnostnih mjera na $\mathbb{R}^n$ tako da uzmemo izmjerivu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, takvu da je $\int f(x)\,dx = 1$ i definiramo vjerojatnost P formulom

$$P(E) = \int_E f(x)\,dx$$

Tada je P neprekidna Borelova vjerojatnost na $\mathbb{R}^n$ i $P \ll m_n$.

(3) Postoji cijela serija vjerojatnostnih mjera na $\mathbb{R}$ koje imaju posebna imena i često se koriste. Sve mjere ovog tipa su dane gustoćom: $dP(x) = f(x)\,dx$.

(a) P se zove **uniformna mjera** na $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ako je $f = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}$.

(b) P se zove **Gaussova mjera na $\mathbb{R}$ s parametrima** $a \in \mathbb{R}$ **i** σ^2, $\sigma > 0$, ako je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2),\ x \in \mathbb{R}$$

Ako je $a = 0$ i $\sigma = 1$ onda se P zove **standardna Gaussova mjera na $\mathbb{R}$**.

(c) P se zove **eksponencijalna mjera na $\mathbb{R}$ s parametrom** $\lambda > 0$ ako je

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0; \quad f(x) = 0,\ x < 0$$

(d) P se zove **gamma mjera na $\mathbb{R}$ s parametrima** $\alpha > 0$ **i** $\lambda > 0$ ako je

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},\ x > 0; \quad f(x) = 0,\ x \leq 0$$

(e) P se zove **beta mjera na $\mathbb{R}$ s parametrima** $\alpha > 0$ **i** $\beta > 0$ ako je

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ x \in [0,1]; \quad f(x) = 0,\ x \notin [0,1]$$

(f) P se zove **Cauchyjeva mjera na $\mathbb{R}$ s parametrima** α **i** $\lambda > 0$ ako je

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

(g) P se zove **Laplaceova mjera na $\mathbb{R}$ s parametrima** α **i** $\lambda > 0$ ako je

$$f(x) = \tfrac{\lambda}{2} \exp\left(-\lambda \left|x - \alpha\right|\right), \; x \in \mathbb{R}$$

(h) P se zove χ^2**-mjera s** α **stupnjeva slobode**, $\alpha > 0$, ako je

$$f(x) = \tfrac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-x/2}, \; x > 0; \quad f(x) = 0, \; x \le 0$$

Ona je specijalni slučaj gamma mjere ako stavimo $\lambda = 1/2$ i α zamijenimo sa $\alpha/2$.

(4) Navedimo sada neke vjerojatnostne mjere na $\mathbb{R}^n$ koje imaju posebna imena i često se koriste. One su dane gustoćom: $dP(x) = f(x)\,dx$.

(a) Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt i $m_n(K) > 0$. Mjera P se zove **uniformna mjera na** K ako je $f = \frac{1}{m_n(K)} \chi_K$. Najčešći ovakav slučaj je: $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a \le b$, ili $K = \overline{D}_v$, $D_v = \{x \in \mathbb{R}^n; v(x) < 1\}$, gdje je v norma na $\mathbb{R}^n$.

(b) P se zove **Gaussova mjera na** $\mathbb{R}^n$ **s parametrima** $a \in \mathbb{R}^n$ **i** $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A > 0$, ako vrijedi

$$f(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det A)^{1/2}} \exp(-\tfrac{1}{2}(A^{-1}(x-a)\,|x-a)), \; x \in \mathbb{R}^n$$

Vektor a se zove **srednja vrijednost od** P, a matrica A se zove **disperzija od** P. Zamijetimo da uvjet $A > 0$ znači da je A **strogo pozitivna matrica** i on je nužan da bi f bila integrabilna.

(c) Ako je P Gaussova mjera na $\mathbb{R}^n$ sa srednjom vrijednosti $a = 0$ i disperzijom $A = I$ onda se P zove **standardna Gaussova mjera na** $\mathbb{R}^n$.

(5) Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom i $A_n \in \mathcal{A}$, $n \ge 1$.

(a) Po Fatouovoj lemi je $\mu(\underline{\lim} A_n) \le \underline{\lim} \mu(A_n)$.

(b) Ako je μ konačna onda iz (a) slijedi $\mu(\overline{\lim} A_n) \ge \overline{\lim} \mu(A_n)$.

(c) Ako je μ konačna i $A = \lim A_n$ onda je $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$.

(6) Ako su μ_1 i μ_2 mjere na $(\Omega, \mathcal{A})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$ onda je $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$ i vrijedi

$$\int f d\mu = \alpha_1 \int f d\mu_1 + \alpha_2 \int f d\mu_2$$

Ako je $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ onda je $L_1(\mu) = L_1(\mu_1) \cap L_2(\mu_2)$.

(7) Neka je $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n$, $n \le x \le n + \frac{1}{n}$, i $f_n(x) = 0$, inače. Tada je (f_n) niz u $L_1(\mathbb{R})$, $f_n \to 0$ $s.s.$ i $\int f_n dm_1 = 1$, $n \in \mathbb{N}$, pa je $\lim \int f_n dm_1 \ne \int \lim f_n dm_1$. Usporediti ovo s teoremom o dominiranoj konvergenciji i Fatouovom lemom.

(8) Ako je $f_1 \ge f_2 \ge \cdots \ge 0$ i $f_n \to f \in L_1(\mu)$ $s.s.$ onda $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

(9) Ako je (f_n) niz ograničenih izmjerivih funkcija, $f_n \to f$ uniformno na Ω i μ konačna mjera na Ω onda $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Naime

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| \le \int |f_n - f|\, d\mu \le \mu(\Omega) \sup_{\omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \to 0$$

NAPOMENA 3.18 Usporedimo Lebesgueov integral definiran u ovom poglavlju i **klasični Riemannov integral**.

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Razmotrimo particiju τ segmenta $[a,b]$ točkama $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ i stavimo:

(a) $M_1 = \sup\{f(x); x \in [t_0, t_1]\}$, $M_i = \sup\{f(x); x \in (t_{i-1}, t_i]\}$, za svaki $i = 2, \ldots, n$.

(b) $m_1 = \inf\{f(x); x \in [t_0, t_1]\}$, $m_i = \inf\{f(x); x \in (t_{i-1}, t_i]\}$, za svaki $i = 2, \ldots, n$.

(c) $\overline{s}_\tau(x) = M_i$, $x \in (t_{i-1}, t_i]$, $\underline{s}_\tau(x) = m_i$, $x \in (t_{i-1}, t_i]$.

(d) $\overline{s}(\tau) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$, $\underline{s}(\tau) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1})$. Ove dvije sume zovemo **gornja suma** i **donja suma** pridružene particiji τ.

Ako je f integrabilna po Riemannu na $[a,b]$ onda postoji niz particija (τ_n) takav da je skup točaka koje definiraju particiju τ_n rastući, $|\tau_n| \to 0$, gdje je $|\tau_n| = \max_i (t_i - t_{i-1})$, niz $\overline{s}(\tau_n)$ opada, $\underline{s}(\tau_n)$ raste i **Riemannov integral od f na $[a,b]$ je dan sa**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \overline{s}(\tau_n) = \lim \underline{s}(\tau_n)$$

Ako stavimo $\overline{s}(\tau_n) = \overline{s_n}$, $\underline{s}(\tau_n) = \underline{s_n}$ onda je

$$\overline{s_1} \geq \overline{s_2} \geq \cdots \geq \overline{s_n} \geq \cdots \geq \underline{s_n} \geq \cdots \geq \underline{s_2} \geq \underline{s_1}$$

Stavimo sada $\overline{f}(x) = \lim \overline{s_{\tau_n}}(x)$, $\underline{f}(x) = \lim \underline{s_{\tau_n}}(x)$. Tada su $\overline{f}$, $\underline{f}$ Borelove funkcije i vrijedi $\overline{s_{\tau_n}} \geq f \geq \underline{s_{\tau_n}}$ pa je $\overline{f} \geq f \geq \underline{f}$ i

$$\int_{[a,b]} \overline{f} dm_1 = \lim \int_{[a,b]} \overline{s_{\tau_n}} dm_1 = \lim \overline{s_n}, \quad \int_{[a,b]} \underline{f} dm_1 = \lim \int_{[a,b]} \underline{s_{\tau_n}} dm_1 = \lim \underline{s_n}$$

Prema tome je

$$\int_{[a,b]} \overline{f} dm_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} \underline{f} dm_1$$

pa je $\int_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) dm_1 = 0$, što znači $\overline{f} = f = \underline{f}$ *s.s.* iz čega zaključujemo **da je f izmjeriva po Lebesgueu na $[a,b]$ i**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f dm_1$$

Osim toga je f **neprekidna na** $(f = \overline{f}) \cap (f = \underline{f})$.

TEOREM 3.19 *Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna po Riemannu na $[a,b]$ onda je f integrabilna po Lebesgueu na $[a,b]$ i integrali su jednaki. Nadalje, f je neprekidna skoro svuda.*

Dokaz Vidi gornju napomenu.

NAPOMENA 3.20 Ako je $A = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ i $f = \chi_A$ onda f nije integrabilna po Riemannu na $[a,b]$. Naime, sve gornje sume su jednake $b-a$, a donje 0. Ova funkcija je integrabilna po Lebesgueu zbog $f = 0$ $s.s.$, pa je $\int f dm_1 = 0$. Po prethodnom teoremu zaključujemo da je Lebesgueov integral poopćenje Riemannova integrala na $[a,b]$ pa standardne tvrdnje o integralu, poznate iz analize, vrijede i dalje. Analogan teorem vrijedi i na $\mathbb{R}^n$.

3.2 Integral vektorskih i matričnih funkcija

DEFINICIJA 3.21 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom.*

(1) *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ izmjeriva funkcija i $f = \sum f_i e_i$. Kažemo da je f **integrabilna** ako su integrabilne sve koordinate $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1,..,n$, i u tom slučaju definiramo **integral od** f formulom*

$$\int f d\mu = \sum \int f_i d\mu \cdot e_i \in \mathbb{R}^n$$

(2) *Neka je $f : \Omega \to gl_n(\mathbb{R})$ izmjeriva funkcija i $f = [f_{ij}]$. Kažemo da je f **integrabilna** ako su integrabilne sve koordinate $f_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $i,j = 1,..,n$, i u tom slučaju definiramo **integral od** f formulom*

$$\int f d\mu = \left[\int f_{ij} d\mu\right] \in gl_n(\mathbb{R})$$

DEFINICIJA 3.22 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor.*

(1) *Ako je $X \in L_1(\Omega, P)$ onda se $\int X dP$ označava sa $\mathbb{E}X$ i zove **srednja vrijednost** ili **očekivanje od** X.*

(2) *Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $X = \sum X_i e_i$, integrabilna slučajna varijabla onda se*

$$\mathbb{E}X = \int X dP = \sum \mathbb{E}X_i \cdot e_i$$

*zove **srednja vrijednost** ili **očekivanje od** X.*

(3) *Ako je X iz (2) i $X_i \in L_2(\Omega, P)$, za sve $i = 1,..,n$, onda se matrica $\mathbb{D}X \in gl_n(\mathbb{R})$ s (i,j)-tim elementom $\mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j$ zove **disperzija od** X. Analogno kao u Poglavlju 1 vidimo da je*

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^\tau = \mathbb{E}XX^\tau - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^\tau$$

(4) *Neka je* X *iz* (2) *i* $\omega \in \mathbb{N}_0^n$. *Ako je* $X^\omega \in L_1(\Omega, P)$ *onda se* $\mathbb{E}X^\omega$ *zove* ω-***moment od*** X.

(5) *Ako su* $X, Y \in L_2(\Omega, P)$ *onda se*

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{(\mathbb{D}X)^{1/2}(\mathbb{D}Y)^{1/2}}$$

zove ***koeficijent korelacije od*** X ***i*** Y. *Ako je* $r(X,Y) = 0$ *onda kažemo da su* X *i* Y ***nekorelirane***.

PRIMJERI 3.23

(1) Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s diskretnom mjerom $\mu = \sum \alpha_n \delta_{a_n}$, gdje su $\alpha_n \geq 0$ i $a_n \in \Omega$. Tada je $f \in L_1(\mu)$ ako i samo ako red $\sum \alpha_n f(a_n)$ konvergira apsolutno i tada vrijedi

$$\int f d\mu = \sum \alpha_n f(a_n)$$

Specijalno, ako je μ vjerojatnost tj. $\sum \alpha_n = 1$ onda je $\mathbb{E}f = \sum \alpha_n f(a_n)$, što je u skladu s Poglavljem 1. Zamijetimo da je i prethodna definicija u skladu s Poglavljem 1.

(2) Neka je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}$, μ pripadna mjera i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Postoji procedura integracije, slična Riemannovu integralu, koja se zove **Riemann-Stieltjesov integral**, a sastoji se u tome da umjesto funkcije distribucije Lebesgueove mjere koristimo ovu zadanu funkciju distribucije F i ponovimo proceduru opisanu u Napomeni 3.18, definirajući analogno $\overline{s_\tau}(x)$, $\underline{s_\tau}(x)$, ali za gornju i donju sumu uzimamo

$$\overline{s}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i (F(t_i) - F(t_{i-1})), \ \underline{s}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i (F(t_i) - F(t_{i-1}))$$

Kažemo da je f **integrabilna po Riemann-Stieltjesu** ako za svaki niz particija (τ_n), $|\tau_n| \to 0$, vrijedi $\lim \overline{s}(\tau_n) = \lim \underline{s}(\tau_n)$ i ovaj broj označavamo sa $\int_a^b f dF$ i zovemo **Riemann-Stieltjesov integral od f po funkciji distribucije** F. Potpuno analogno kao u Napomeni 3.18 dobijemo sljedeću tvrdnju, analognu Teoremu 3.19: Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna po Riemann-Stieltjesu na $[a,b]$ po funkciji distribucije F onda je ona integrabilna po mjeri μ na $[a,b]$ i integrali su jednaki. Nadalje, f je neprekidna μ *s.s.*

(3) Sljedeća tvrdnja je poznata iz analize: Neka su $U, V \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi i $\varphi : U \to V$ difeomorfizam. Tada vrijedi

$$\int_{\varphi(U)} f(x) dx = \int_U f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx$$

što se često popularno piše ovako: $y = \varphi(x)$, $dy = |\det \varphi'(x)|dx$. Ova tvrdnja se zove **teorem o zamjeni varijable za** m_n. Ovdje smo sa $\varphi'(x)$ označili derivaciju funkcije $\varphi = \sum \varphi_i e_i$ koja je dana sa

$$\varphi'(x) = [\tfrac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}] \in GL_n(\mathbb{R})$$

Tvrdnja vrijedi u puno općenitijim uvjetima: φ ne mora biti difeomorfizam, dovoljno je da je bijekcija $s.s.$, derivabilna $s.s.$ i $\det \varphi'(x) \neq 0$ $s.s.$ Navedimo neke specijalne slučajeve:

(a) Neka je $\varphi(x) = Ax + a$, $\det A \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^n$. Funkcija φ se zove **afina funkcija**. Za nju je $\varphi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}(x-a)$ i $\varphi'(x) = A$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Za afinu funkciju φ vrijedi

$$\int f(x)\,dx = |\det A| \int f(Ax+a)\,dx, \;\; f \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

(c) Specijalno, ako je $\varphi(x) = rx + a$, $r > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, dobijemo

$$\int f(rx+a)\,dx = r^{-n} \int f(x)\,dx$$

Poglavlje 4

Prostori integrabilnih funkcija

DEFINICIJA 4.1 (1) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mjerom,* $p \in [1, \infty)$ *i* $L_p(\Omega, \mu) = L_p(\mu)$ *skup svih izmjerivih funkcija* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *takvih da je* $|f|^p$ *integrabilna, pri čemu identificiramo funkcije koje su jednake skoro svuda. Ako je* $f \in L_p(\mu)$ *onda uvodimo oznaku* $\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{1/p}$.

(2) *Označimo sa* $L_\infty(\Omega, \mu) = L_\infty(\mu)$ *skup svih izmjerivih funkcija* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *koje su ograničene skoro svuda tj.* $|f| \leq M$ *s.s., za neki* $M \geq 0$, *pri čemu također identificiramo funkcije koje su jednake skoro svuda. Infimum svih ovakvih* M *označavamo sa* $\|f\|_\infty$ *i zovemo ga* ***bitni supremum od*** f.

LEMA 4.2 $L_p(\mu)$ *je vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$.

Dokaz Neka su $f, g \in L_p(\mu)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada zbog $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p$ slijedi $\alpha f \in L_p(\mu)$, za $p \in [1, \infty)$, a zbog $|\alpha f| \leq |\alpha| M$ *s.s.* slijedi $\alpha f \in L_p(\mu)$, za $p = \infty$. Ako je $p \in [1, \infty)$ onda je $|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2 \max(|f|, |g|)$ iz čega slijedi

$$|f + g|^p \leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

pa je $f + g \in L_p(\mu)$. Ako su $f, g \in L_\infty(\mu)$, $|f| \leq M_1$ *s.s.* i $|g| \leq M_2$ *s.s.* onda je $|f + g| \leq |f| + |g| \leq M_1 + M_2$ *s.s.* pa je $f + g \in L_\infty(\mu)$.

LEMA 4.3 *Ako je* $0 \leq p \leq 1$, $q = 1 - p$ *i* $x \geq 0$ *onda je* $e^{px} \leq pe^x + q$. *Ako je* $p > 0$ *onda vrijedi jednakost ako i samo ako* $x = 0$.

Dokaz $e^{px} = 1 + px + p^2 \frac{x^2}{2!} + \cdots \leq 1 + px + p \frac{x^2}{2!} + \cdots \leq q + pe^x$.

LEMA 4.4 *Ako je* $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *i* $\beta = 1 - \alpha$ *onda vrijedi nejednakost* $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$.

Dokaz Ako je $a = 0$ ili $b = 0$ ili $a = b$ onda je tvrdnja trivijalna pa možemo smatrati da je $a > b > 0$. Ako u prethodnoj lemi stavimo $x = \log \frac{a}{b}$, $p = \alpha$, $q = \beta$ dobijemo $(\frac{a}{b})^\alpha \leq \alpha \frac{a}{b} + \beta$ iz čega slijedi tražena nejednakost.

LEMA 4.5 (Hölderova nejednakost)
Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mjerom i* $p, q \in [1, \infty)$ *takvi da je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Ako je* $f \in L_p(\mu)$ *i* $g \in L_q(\mu)$ *onda je* $fg \in L_1(\mu)$ *i vrijedi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Ovu nejednakost zovemo ***Hölderova nejednakost****.*

Dokaz Ako u prethodnoj lemi stavimo $a = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}$, $b = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, dobijemo

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

Integriranjem ove relacije dobijemo

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

iz čega slijedi tvrdnja.

KOROLAR 4.6 (Cauchy-Schwarzova nejednakost)
Ako su $f, g \in L_2(\mu)$ *onda je* $fg \in L_1(\mu)$ *i vrijedi*

$$|\int fg d\mu| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Ovu nejednakost zovemo ***Cauchy-Schwarzova nejednakost****.*

Dokaz Stavimo $p = q = 2$ u prethodnoj lemi.

LEMA 4.7 *Ako je* $f \in L_1(\mu)$ *i* $g \in L_\infty(\mu)$ *onda je* $fg \in L_1(\mu)$ *i vrijedi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Dokaz $\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu \cdot M$, za $|g| \leq M$ *s.s.* iz čega slijedi tvrdnja uzimanjem infimuma.

LEMA 4.8 (Nejednakost Minkowskog)
Ako je $p \in [1, \infty]$ *i* $f, g \in L_p(\mu)$ *onda je*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Ovu nejednakost zovemo ***nejednakost Minkowskog****.*

Dokaz Za $p = 1$ tvrdnja slijedi iz 3.10. Ako je $p = \infty$, $|f| \leq M_1$, *s.s.* i $|g| \leq M_2$, *s.s.* onda je $|f+g| \leq M_1 + M_2$ *s.s.* pa je $\|f+g\|_\infty \leq M_1 + M_2$, a sada uzimanjem infimuma slijedi $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Uzmimo sada $p \in (1, \infty)$. Tada je

$$\begin{aligned} \int |f+g|^p \, d\mu &= \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \int (|f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}) d\mu \end{aligned}$$

Ako stavimo $q = \frac{p}{p-1}$ onda je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pa primjenjujući Hölderovu nejednakost na par $|f|$, $|f+g|^{p-1}$ i na par $|g|$, $|f+g|^{p-1}$ dobijemo

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \, d\mu \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q}$$

iz čega slijedi tražena nejednakost.

TEOREM 4.9 *$L_p(\mu)$ je normirani prostor nad $\mathbb{R}$ s normom $\|.\|_p$.*

Dokaz $L_p(\mu)$ je vektorski prostor po 4.2. Dokažimo da $\|.\|_p$ zadovoljava aksiome norme. Prvo $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$ je trivijalno svojstvo. Relacija trokuta slijedi iz prethodne leme. Nadalje, $\|f\|_p = 0$ ako i samo ako $\int |f|^p \, d\mu = 0$ ako i samo ako $|f|^p = 0$ *s.s.* ako i samo ako $f = 0$ *s.s.* ako i samo ako $f = 0$ u $L_p(\mu)$, pri $p \in [1, \infty)$. Za $p = \infty$ je $|f| \leq M$ *s.s.* i $\|f\|_\infty = 0$ ako i samo ako $|f| \leq 0$ *s.s.* ako i samo ako $f = 0$ *s.s.* ako i samo ako $f = 0$ u $L_\infty(\mu)$.

TEOREM 4.10 *$L_p(\mu)$ je Banachov prostor.*

Dokaz Po prethodnom teoremu je $L_p(\mu)$ normirani prostor, pa preostaje još dokazati da je on potpun tj. da svaki Cauchyjev niz iz $L_p(\mu)$ konvergira prema nekom elementu iz $L_p(\mu)$. Neka je (f_n) Cauchyjev niz u $L_p(\mu)$ tj. $\|f_n - f_m\|_p \to 0$, $m, n \to \infty$.

Neka je prvo $p \in [1, \infty)$. Prešavši na podniz, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$, $n \geq 1$. Stavimo $g = \sum_{n \geq 1} |f_n - f_{n+1}|$. Po teoremu o monotonoj konvergenciji je

$$\begin{aligned} \|g\|_p &= \lim \| \sum_{k=1}^{n} |f_k - f_{k+1}| \, \|_p \leq \lim \sum_{k=1}^{n} \|f_k - f_{k+1}\|_p \\ &= \sum_{n \geq 1} \|f_n - f_{n+1}\|_p \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1 \end{aligned}$$

Dakle $|g| < \infty$ *s.s.* i red $\sum |f_n - f_{n+1}|$ konvergira apsolutno *s.s.*, gdje je $f_0 = 0$. Nadalje $|\sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1})| \leq |f_1| + g$ *s.s.* i $\sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1}) = f_n$, $n \geq 1$, što znači da postoji $f = \lim f_n$. Sada po teoremu o dominiranoj konvergenciji dobijemo $\|f - f_n\|_p \to 0$.

Neka je sada $p = \infty$. Tada je $\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$, za dovoljno velike m, n, tj. $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$, $x \notin E_{m,n}$, $\mu(E_{m,n}) = 0$. Ako stavimo $E = \bigcup_m \bigcup_n E_{m,n}$ onda je $\mu(E) \le \sum_m \sum_n \mu(E_{m,n}) = 0$ i $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$, $x \notin E$, $\mu(E) = 0$, što znači da niz (f_n) uniformno konvergira na $\Omega \backslash E$ prema nekom f. Ako stavimo $f(x) = 0$, $x \in E$, onda je $f \in L_\infty(\mu)$ i $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

PROPOZICIJA 4.11 *Ako je μ konačna mjera onda vrijedi*

$$\|f\|_p \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q, \ f \in L_q(\mu), \ 1 \le p \le q \le \infty$$

Nadalje, prostori $L_p(\mu)$ opadaju po inkluziji kad indeks p raste od 1 do ∞.

Dokaz Ako je $\mu(\Omega) < \infty$ onda je $1 \in L_p(\mu)$, za svaki $p \in [1, \infty]$ i $\|1\|_p = \mu(\Omega)^{1/p}$. Ako je $1 \le p \le q$ i $f \in L_q(\mu)$ onda je $|f|^p \in L_{q/p}(\mu)$ pa primjenjujući Hölderovu nejednakost na $|f|^p \in L_{q/p}(\mu)$ i $1 \in L_{\frac{q}{q-p}}(\mu)$ imamo

$$\int |f|^p \, d\mu \le (\int |f|^q \, d\mu)^{p/q} \mu(\Omega)^{(q-p)/q}$$

iz čega dobijemo $\|f\|_p \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$, $1 \le p \le q$, a odatle slijedi tvrdnja.

TEOREM 4.12 *$L_2(\mu)$ je Hilbertov prostor.*

Dokaz Po Teoremu 4.10 je $L_2(\mu)$ Banachov prostor. Neka je

$$(f|g) = \int fg d\mu, \ f, g \in L_2(\mu)$$

Po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti je $fg \in L_1(\mu)$ i $|(f|g)| \le \|f\|_2 \|g\|_2$. Sada se lako provjeri da je $(f|g)$ zaista skalarni produkt na $L_2(\mu)$ pa je time tvrdnja dokazana.

PRIMJERI 4.13

(1) Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom, gdje je μ koncentrirana na konačnom skupu $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Omega$, $p_i = \mu(\{a_i\}) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Tada se $\mu = p_1 \delta_{a_1} + \cdots + p_n \delta_{a_n}$ može proširiti na 2^Ω i svaka funkcija $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ je jedinstveno *s.s.* određena sa $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ zbog toga što je skup $\Omega \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ zanemariv. Prema tome svaka funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je integrabilna i

$$\int f d\mu = p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n)$$

Nadalje, $\|f\|_p = (\sum_{i=1}^n p_i |f(a_i)|^p)^{1/p}$, $p \in [1, \infty]$, $\|f\|_\infty = \max |f(a_i)|$. Dakle, $L_p(\mu)$ je izomorfan sa $\mathbb{R}^n$, a izomorfizam je zadan sa $f \mapsto \sum_{i=1}^n f(a_i) e_i \in \mathbb{R}^n$. Također je

$$(f|g) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i) g(a_i)$$

U ovom slučaju su $L_p(\mu)$ svi jednaki kao vektorski prostori, ali naravno ne kao Banachovi prostori budući da su sve norme $\|.\|_p$ međusobne različite, za $n \geq 2$. Primjer ovakve mjere je binomijalna i polinomijalna.
(2) Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom, pri čemu je μ diskretna mjera koncentrirana na $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, $p_n = \mu(\{a_n\}) > 0$, $n \geq 1$. Tada se $\mu = \sum p_n \delta_{a_n}$ može proširiti na 2^Ω i svaka izmjeriva funkcija $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ je jedinstveno *s.s.* određena nizom $(f(a_n))$. Funkcija f je integrabilna ako i samo ako red $\sum p_n f(a_n)$ konvergira apsolutno i tada je

$$\int f d\mu = \sum p_n f(a_n)$$

Nadalje $f \in L_p(\mu)$ ako i samo ako $\sum p_n |f(a_n)|^p < \infty$ i tada je

$$\|f\|_p = (\sum p_n |f(a_n)|^p)^{1/p},\ p \in [1, \infty)$$

Po pretpostavci je $p_n > 0$, $n \geq 1$, pa je $\|f\|_\infty = \sup |f(a_n)|$. Ako su $f, g \in L_p(\mu)$ onda je $f = g$ *s.s.* ako i samo ako $f = g$ u $L_p(\mu)$ ako i samo ako $f(a_n) = g(a_n)$, $n \geq 1$. Ako su $f, g \in L_2(\mu)$ onda je

$$(f|g) = \sum p_n f(a_n) g(a_n)$$

(3) Specijalni slučaj prethodnog primjera je: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $\mu = \sum \delta_n$. Svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je zadana, na jedinstven način, nizom relnih brojeva $(f(1), f(2), \ldots)$ pa je $f \mapsto a = (a_1, a_2, \ldots)$, $a_n = f(n)$, izomorfizam vektorskog prostora $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ svih funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ i vektorskog prostora $\mathbb{R}^\infty$ svih nizova realnih brojeva. Prostor $L_p(\mu)$ se sastoji od svih nizova $a = (a_1, a_2, \ldots)$ za koje vrijedi $\sum |a_n|^p < \infty$ i tada je

$$\|a\|_p = (\sum |a_n|^p)^{1/p} < \infty,\ p \in [1, \infty)$$

a prostor $L_\infty(\mu)$ od svih nizova za koje vrijedi $\|a\|_\infty = \sup |a_n| < \infty$.

Zbog posebne važnosti ovog slučaja uvodimo posebnu oznaku: $l_p = L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty]$, i zovemo ga "**malo el pe**". Nadalje, vrijedi:

(a) $l_p = \{a = (a_1, a_2, \ldots); \sum |a_n|^p < \infty\}$, $p \in [1, \infty)$

(b) $l_\infty = \{a = (a_1, a_2, \ldots); \sup |a_n| < \infty\}$

(c) $l_1 \subset l_p \subset l_q \subset l_\infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Vidimo da su inkluzije suprotne od onih u 4.11 ! Naime, mjera μ je beskonačna!

(d) Ako su $x, y \in l_\infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots.)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ onda definiramo produkt $xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots) \in l_\infty$. Tada je l_∞ s ovim množenjem **algebra nad $\mathbb{R}$ s jedinicom** $u = (1, 1, \ldots)$.

(e) $\|xy\|_\infty = \sup |x_n y_n| \leq \sup |x_n| \sup |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_\infty$, a budući da je l_∞ također i Banachov prostor zaključujemo da je l_∞ **Banachova algebra**.

(f) l_p je **ideal u algebri** l_∞, $p \in [1, \infty)$.

(4) Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom onda je $L_\infty(\mu)$ Banachova algebra nad $\mathbb{R}$ s operacijom množenja $(fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega)$, $\omega \in \Omega$, pri čemu je $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Ova algebra ima jedinicu: $1(\omega) = 1, \omega \in \Omega$, i $\|1\|_\infty = 1$.
(5) Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ onda je

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$$

integral od f po Definiciji 3.21. Zamijetimo da je $|\int f d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$. Često se promatra kompleksni prostor $L_p(\mu)_c$. Njega definiramo isto kao u realnom slučaju samo nam sve funkcije idu u $\mathbb{C}$, a ne u $\overline{\mathbb{R}}$. Jedina optička razlika kod realnih i kompleksnih L_p prostora je za $p = 2$ kad definiramo skalarni produkt:

$$(f|g) = \int f \cdot \overline{g} d\mu, \;\; f, g \in L_p(\mu)_c$$

gdje je $\overline{g}(\omega) = \overline{g(\omega)}$, $\omega \in \Omega$. Sve ostale formule izgledaju potpuno isto kao i prije. I u ovom slučaju je $L_\infty(\mu)_c$ Banachova algebra nad $\mathbb{C}$ i za normu vrijedi $\|f \cdot \overline{f}\|_\infty = \|f\|_\infty^2$. Ovo svojstvo norme $\|.\|_\infty$ zovemo C^*-**svojstvo**. Zbog ovog svojstva se $L_\infty(\mu)_c$ zove C^*-**algebra**. Ona je, naravno, komutativna.

PROPOZICIJA 4.14 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom i S skup svih prostih funkcija $h : \Omega \to \mathbb{R}$ za koje je $\mu(h \neq 0) < \infty$. Tada je $S \subset L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$ i S je gust u $L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$.*

Dokaz Evidentno je $S \subset L_p(\mu)$. Ako je $f \in L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, $f \geq 0$, onda po 2.22 postoji niz prostih funkcija (h_n) takvih da je $0 \leq h_n \leq f$, $h_n \to f$ i $h_n \in S$, $n \geq 1$. Kako je $|f - h_n|^p = (f - h_n)^p \leq f^p$ po teoremu o dominiranoj konvergenciji $\|f - h_n\|_p \to 0$, $n \to \infty$. Ako je $f \in L_p(\mu)$, $f = f_+ - f_-$ onda su po prethodnom f_+, f_- u zatvaraču od S.

KOROLAR 4.15 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom.*

(1) *Ako je $\mathcal{A}$ generirana prebrojivim skupom onda je $L_p(\mu)$ separabilan prostor za svaki $p \in [1, \infty)$.*

(2) *Ako je Ω separabilan topološki prostor onda je $L_p(\Omega, B(\Omega), \mu)$ separabilan prostor za svaki $p \in [1, \infty)$.*

(3) *$L_p(\mathbb{R}^n)$ je separabilan za $p \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$*

Dokaz (1) Skup S iz prethodne propozicije možemo zamijeniti podskupom S' svih prostih funkcija h za koje je $h(\Omega) \subset \mathbb{Q}$ i $h^{-1}(t)$ je element prebrojivog skupa koji generira $\mathcal{A}$, $t \in \mathbb{Q}$. Ovaj S' je prebrojiv i gust u $L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$.
(2) Slijedi iz (1), a (3) iz (2).

NAPOMENA 4.16 Ako je μ koncentrirana na konačnom skupu onda je $L_\infty(\mu)$ izomorfan sa $\mathbb{R}^n$ pa je separabilan. Međutim ako μ nije koncentrirana na konačnom skupu onda $L_\infty(\mu)$ nije separabilan. Naime, postoji neprebrojivo skupova $A \in \mathcal{A}$ za koje je $\|\chi_A\|_\infty = 1$, $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$, $\mu(A \triangle B) \neq 0$, što znači da čak niti sfera $S = \{f \in L_\infty(\mu); \|f\|_\infty = 1\}$ nije separabilna, budući da sadrži neprebrojivo vektora koji su svaki od svakog udaljeni za 1!

PRIMJERI 4.17

(1) Ako je μ beskonačna mjera onda $L_p(\mu)$ i $L_q(\mu)$ ne moraju biti usporedivi po inkluziji. Neka je $\mu = m_1$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$,

(a) $f(x) = |x|^{-\alpha}$, $|x| \leq 1$; $f(x) = 0$, $|x| > 1$

(b) $g(x) = 0$, $|x| \leq 1$; $g(x) = |x|^{-\alpha}$, $|x| > 1$

Tada je $f \in L_1(\mathbb{R}) \backslash L_2(\mathbb{R})$ i $g \in L_2(\mathbb{R}) \backslash L_1(\mathbb{R})$

(2) Ako je $1 \leq r \leq p \leq s$ onda je $L_r(\mu) \cap L_s(\mu) \subset L_p(\mu)$ i

$$\|f\|_p \leq \max(\|f\|_r, \|f\|_s)$$

(3) Neka je $C(\mathbb{R}^n)$ skup svih neprekidnih i ograničenih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tada je $C(\mathbb{R}^n)$ Banachov prostor s normom $\|f\| = \sup |f(x)|$. Nadalje, ako je μ konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}^n$ onda je $C(\mathbb{R}^n)$ gust u $L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$.

(4) Ako su μ, ν konačne Borelove mjere na $\mathbb{R}^n$ onda je $\mu = \nu$ ako i samo ako je $\int f d\mu = \int f d\nu$, za svaki $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

PROPOZICIJA 4.18 *Ako je $f \in L_p(\mu)$ onda je $\mu(|f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\|f\|_p^p$, za svaki $\varepsilon > 0$ i $p \in [1, \infty)$.*

Dokaz $\int |f|^p \, d\mu \geq \int_{(|f| \geq \varepsilon)} |f|^p \, d\mu \geq \varepsilon^p \mu(|f| \geq \varepsilon)$.

KOROLAR 4.19 (Čebyševljeva nejednakost)

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor i $X \in L_2(\Omega, P)$. Tada vrijedi

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{D}X, \ \varepsilon > 0$$

Ovu nejednakost zovemo ***Čebyševljeva nejednakost****.*

Dokaz Stavimo $f = X - \mathbb{E}X$ i $p = 2$ u gornjoj propoziciji.

DEFINICIJA 4.20 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom, f, $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.*

(1) *Kažemo da niz (f_n)* ***konvergira po mjeri*** *prema f i pišemo $f_n \xrightarrow{\mu} f$, ako vrijedi $\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$. Ako je μ vjerojatnost onda konvergenciju po mjeri zovemo* ***konvergencija po vjerojatnosti****.*

(2) *Kažemo da (f_n)* ***konvergira skoro uniformno*** *prema f ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \varepsilon$, tako da $f_n \to f$ uniformno na skupu A^c. Tada pišemo $f_n \to f$ s.u.*

PRIMJERI 4.21

(1) Ako su $f, f_n \in L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$ i $\|f_n - f\|_p \to 0$ onda $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
Ova tvrdnja slijedi iz 4.18.
(2) Ako $f_n \to f$ $s.u.$ onda $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $f_n \to f$ $s.s.$ Obrat općenito ne vrijedi.
(3) Ako (f_n) konvergira prema f po mjeri, onda postoji podniz koji konvergira $s.u.$ prema f.
(4) Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s konačnom mjerom onda $f_n \to f$ $s.u.$ ako i samo ako $f_n \to f$ $s.s.$
(5) Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor. Tada vrijedi:
(a) $f_n \to f$ $s.u.$ ako i samo ako $f_n \to f$ $s.s.$
(b) Ako $f_n \to f$ $s.s.$ onda $f_n \xrightarrow{P} f$
(c) Ako $\|f_n - f\|_p \to 0$ onda $f_n \xrightarrow{P} f$, $p \in [1, \infty)$
(6) Ako je μ konačna mjera i $f_n \to f$ u $L_\infty(\mu)$ onda $f_n \to f$ u $L_p(\mu)$, za svaki p. Ovo slijedi iz 4.11. Naime, tada je $\|f_n - f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p}\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
(7) Ako je μ konačna njera i $f_n \to f$ u $L_q(\mu)$ onda $f_n \to f$ u $L_p(\mu)$ za svaki $p \leq q$. Naime, po 4.11 je $\|f_n - f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f_n - f\|_q \to 0$. Ako μ nije konačna onda tvrdnja ne vrijedi.
(8) Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mjerom onda sa $L(\mu) = L(\Omega, \mu)$ označavamo vektorski prostor svih $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ koje su izmjerive i konačne $s.s.$, pri čemu identificiramo funkcije jednake $s.s.$ Vrijede sljedeće tvrdnje:
(a) $L_p(\mu) \subset L(\mu)$, $p \in [1, \infty]$
(b) Ako je μ konačna mjera onda je $L(\mu)$ potpun metrički prostor s metrikom

$$d(f, g) = \int \tfrac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$$

(c) Ako je μ konačna mjera i $f, f_n \in L(\mu)$ onda $d(f_n, f) \to 0$ ako i samo ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
(d) Ako je μ konačna mjera onda za svaki $\varepsilon > 0$ i $\alpha > 0$ vrijede nejednakosti:

$$\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1+\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \int \tfrac{|f_n-f|^\alpha}{1+|f_n-f|^\alpha} d\mu$$

$$\int \tfrac{|f_n-f|^\alpha}{1+|f_n-f|^\alpha} d\mu \leq \varepsilon^\alpha \mu(\Omega) + \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon)$$

što se dokazuje slično kao 4.18.
(e) Ako je μ konačna mjera i $f, f_n \in L(\mu)$ onda $d(f_n, f) \to 0$ ako i samo ako

$$\int \tfrac{|f_n-f|^\alpha}{1+|f_n-f|^\alpha} d\mu \to 0,\ \alpha > 0$$

Ova tvrdnja slijedi iz (c) i (d).
(f) Neka su X, X_n, $n \geq 1$, slučajne varijable u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi:
(1) Ako $\mathbb{E}\,|X_n - X|^p \to 0$ onda $X_n \xrightarrow{P} X$, $p \in [1, \infty)$.

(2) Ako $X_n \to X$ $s.s.$ onda $X_n \xrightarrow{P} X$.

(3) $\mathbb{E}\frac{|X_n-X|^\alpha}{1+|X_n-X|^\alpha} \to 0$, $\alpha > 0$, ako i samo ako $X_n \xrightarrow{P} X$.

DEFINICIJA 4.22 *Neka je $(H, (.|.))$ Hilbertov prostor nad $\mathbb{R}$.*

(1) *Ako su $a, b \in H$ onda kažemo da su a i b okomiti ako je $(a|b) = 0$.*

(2) *Ako je $A \subset H$ neprazan skup za koji vrijedi $(a|b) = 0$, za svaki a, $b \in A$, $a \neq b$, onda kažemo da je A ortogonalan skup. Ako je A ortogonalan i $\|a\| = 1$, za svaki $a \in A$, onda kažemo da je A ortonormiran skup.*

(3) *Kažemo da je $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ baza u H ako se svaki $x \in H$ može napisati, na jedinstven način, u obliku $x = \sum \alpha_n a_n$, gdje su $\alpha_n \in \mathbb{R}$, i red konvergira u H. Ako je $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza od H onda se svaki $x \in H$ može napisati, na jedinstven način, u obliku $x = \sum \alpha_n e_n$, gdje je $\alpha_n = (x|e_n)$, $n \geq 1$, i vrijedi $\|x\|^2 = (x|x) = \sum \alpha_n^2$.*

NAPOMENA 4.23 Neka je $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i μ restrikcija od m_1 na Ω. Po Weierstrassovom teoremu aproksimacije je prostor polinoma $\mathbb{R}[x]$ gust u $C(\Omega)$ pa je $\mathbb{R}[x]$ također gust u $L_p(\mu)$, za svaki $p \in [1, \infty)$, ali ne za $p = \infty$ zbog toga što $L_\infty(\mu)$ nije separabilan. Ako primijenimo tzv. **Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije** na niz polinoma $\{1, x, x^2, \ldots\}$ dobijemo ortonormiranu bazu od $L_2(\mu)$ koja se sastoji od polinoma. Za ilustraciju uzmimo $\Omega = [-1, 1]$ i stavimo

$$P_n(x) = \tfrac{1}{n!2^n}\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \ n \geq 0$$

Tada je P_n polinom stupnja n i vrijedi:

(a) $(P_n|P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$, $n \neq m$

(b) $(P_n|P_n) = \frac{2}{2n+1}$, $n \geq 0$, što znači da je $\{P_n; n \geq 0\}$ ortogonalan skup.

Polinom P_n se zove n-**ti Legendreov polinom**. Budući da se $\{P_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ dobije procedurom ortogonalizacije iz $\{1, x, x^2, \ldots\}$ zaključujemo da je $\{P_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ ortogonalna baza od $L_2(\mu) = L_2([-1, 1])$. Ako je $f \in L_2(\mu)$ onda je

$$f = \sum \alpha_n P_n, \ \alpha_n = \tfrac{2n+1}{2}(f|P_n), \ n \geq 0$$

pri čemu je $(f|f) = \sum \frac{2}{2n+1}\alpha_n^2$.

NAPOMENA 4.24 Neka je μ Borelova vjerojatnost na $\mathbb{R}$ takva da je $\mathbb{R}[x] \subset L_2(\mu)$. U sljedećem poglavlju će biti pokazano da je $\mathbb{R}[x]$ gust u $L_2(\mu)$ ako postoji $\alpha > 0$ takav da je $\int \exp(\alpha\,|x|)d\mu(x) < \infty$. Primjeri ovakvih mjera su: Gaussova, Poissonova i svaka mjera s kompaktnim nosačem. Postoje Borelove vjerojatnosti μ na $\mathbb{R}$ za koje je $\mathbb{R}[x] \subset L_2(\mu)$, ali $\mathbb{R}[x]$ nije gust u $L_2(\mu)$. Primjer takve vjerojatnosti je **lognormalna mjera** definirana gustoćom

$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \tfrac{1}{x} \exp(-\tfrac{1}{2} \log^2 x),\ x > 0; \quad f(x) = 0,\ x \leq 0$$

Ako je $g(x) = \sin(2\pi \log x)$, $x > 0$, onda je $g \in L_2(\mu)$ i $(P|g) = 0$, za svaki polinom $P \in \mathbb{R}[x]$, što znači da $\mathbb{R}[x]$ nije gust u $L_2(\mu)$.

PRIMJERI 4.25 Neka je μ Gaussova mjera na $\mathbb{R}$ sa srednjom vrijednosti $a = 0$ i disperzijom σ^2, $\sigma > 0$. Tada vrijedi:

(1) $\mathbb{R}[x] \subset L_2(\mu)$ i $\mathbb{R}[x]$ je gust u $L_2(\mu)$
(2) Neka je

$$H_k(x) = \int (x + it)^k d\mu(t),\ k \geq 0$$

Tada je H_k polinom stupnja k i zove se k**-ti Hermiteov polinom**.
(3) Primjenom binomne formule na podintegralni izraz dobijemo

$$H_k(x) = \sum_{m=0}^{[k/2]} \tbinom{k}{2m} (-1)^m (2m-1)!! \sigma^{2m} x^{k-2m},\ k \geq 0$$

(4) Neka je

$$g(t, x) = \exp(tx - \tfrac{1}{2} t^2 \sigma^2),\ t, x \in \mathbb{R}$$

Tada se g zove **generatrisa Hermiteovih polinoma** i za nju vrijedi

$$g(t, x) = \sum_{k \geq 0} \tfrac{1}{k!} t^k H_k(x)$$

(5) $\{H_k; k \geq 0\}$ je ortogonalna baza od $L_2(\mu)$ i vrijedi

$$(H_k|H_k) = k! \sigma^{2k},\ k \geq 0$$

(6) $\int g(t, x) g(s, x) d\mu(x) = \exp(\sigma^2 st),\ s, t \in \mathbb{R}$
(7) $\int H_k(x + y) d\mu(y) = x^k$, $k \geq 0$
(8) $H_k'(x) = k H_{k-1}(x)$, $k \geq 1$
(9) $H_{k+1}(x) = x H_k(x) - k\sigma^2 H_{k-1}(x)$, $k \geq 1$

Poglavlje 5

Slučajne varijable

5.1 Osnovna svojstva slučajnih varijabla

PROPOZICIJA 5.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajna varijabla s distribucijom μ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ izmjeriva funkcija. Tada je $f(X)$ P-integrabilna ako i samo ako je f μ-integrabilna i vrijedi*

$$\mathbb{E}f(X) = \int f(X)dP = \int f d\mu$$

Dokaz Slijedi iz 3.12 i 3.22.

KOROLAR 5.2 *Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ integrabilne slučajne vrijable. Tada vrijedi:*

(1) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$
(2) $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}X$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(3) *Ako je $X = a$ s.s., $a \in \mathbb{R}^n$, onda je $\mathbb{E}X = a$ i $\mathbb{D}X = 0$*
(4) *Ako X ima disperziju onda je $\mathbb{D}X = \mathbb{E}XX^\tau - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^\tau$*

Dokaz Slijedi iz 3.22.

KOROLAR 5.3 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ koja ima disperziju. Tada vrijedi:*

(1) *$\mathbb{D}X$ je pozitivna matrica.*
(2) $\det \mathbb{D}X \geq 0$, $\mathrm{tr}\, \mathbb{D}X \geq 0$
(3) *Ako je $\mathbb{D}X$ singularna onda postoji $a \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je*

$$a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = \alpha \quad s.s.$$

Dokaz (1) $(\mathbb{D}Xy|y) = \int (x-a|y)^2 d\mu(x) \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, gdje je $a = \mathbb{E}X$ i μ distribucija od X. (2) Slijedi iz (1). (3) Ako je $\det \mathbb{D}X = 0$ onda postoji $a \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathbb{D}Xa = 0$ pa je

$$\mathbb{D}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = (\mathbb{D}Xa|a) = 0$$

što znači da je $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ konstantna $s.s.$

PROPOZICIJA 5.4 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ koja ima disperziju, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linearni operator i $a \in \mathbb{R}^k$. Tada vrijedi:*
(1) $\mathbb{E}(AX + a) = A\mathbb{E}X + a$
(2) $\mathbb{D}(AX + a) = A \cdot \mathbb{D}X \cdot A^\tau$

Dokaz Izravni račun, kao i u diskretnom slučaju.

PROPOZICIJA 5.5 *Neka su $X, Y \in L_2(\Omega, P)$. Tada vrijedi:*
(1) $|r(X,Y)| \leq 1$
(2) $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$
(3) $\mathbb{D}(aX + b) = a^2\mathbb{D}X$, $a, b \in \mathbb{R}$
(4) $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y + 2(\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y)$
(5) *X i Y su nekorelirane ako i samo ako je $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + DY$*

Dokaz (1) Vidi 1.20. Ostale tvrdnje slijede iz definicije.

DEFINICIJA 5.6 (1) *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor i $X_i : \Omega \to \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, slučajne varijable. Kažemo da su $X_1, \ldots, X_n$* ***nezavisne*** *ako vrijedi*

$$P((X_1 \in E_1) \cap \cdots \cap (X_n \in E_n)) = P(X_1 \in E_1) \cdots P(X_n \in E_n)$$

za sve izmjerive skupove $E_i \subset \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$.
(2) *Kažemo da je* ***familija*** $\{X_i; i \in I\}$ ***slučajnih varijabla*** $X : \Omega \to \Omega_i$, $i \in I$, ***nezavisna*** *ako je nezavisna svaka njezina konačna podfamilija.*

PROPOZICIJA 5.7 *Neka je $X = \sum X_i e_i$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distribucijom μ, pri čemu je μ_i distribucija od X_i, $i = 1, \ldots, n$. Tada su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$.*

Dokaz Nezavisnost od $X_1, \ldots, X_n$ je ekvivalentna sa

$$P(X \in E_1 \times \cdots \times E_n) = P(X_1 \in E_1) \cdots P(X_n \in E_n)$$

tj. sa $P_X(E_1 \times \cdots \times E_n) = P_{X_1}(E_1) \cdots P_{X_n}(E_n)$ što je ekvivalentno zahtjevu $\mu(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_n(E_n)$ tj. $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$.

5.2 Distribucije slučajnih varijabla

DEFINICIJA 5.8 *Neka vrijede uvijeti prethodne propozicije.*

(1) μ_i *se zove* i-***ta marginalna distribucija od*** X

(2) *Funkciju* $F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \mu((-\infty, x])$$

zovemo ***funkcija distribucije od*** X *(ili od* μ*), a funkciju* $F_{X_i} : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_{X_i}(t) = P(X_i \leq t) = \mu_i((-\infty, t])$$

zovemo ***funkcija distribucije od*** X_i *(ili od* μ_i*) ili* i-***ta marginalna funkcija distribucije od*** X *(ili od* μ*).*

(3) *Kažemo da je* X ***neprekidna*** *(odnosno:* ***singularna***, ***diskretna****), ako je* μ ***neprekidna*** *(odnosno:* ***singularna***, ***diskretna****).*

(4) *Kažemo da je* X ***Gaussova***, ***Poissonova, polinomijalna*** *itd., ako je* μ ***Gaussova, Poissonova, polinomijalna*** *itd.*

PROPOZICIJA 5.9 *Neka je* X *slučajna varijabla u* $\mathbb{R}^n$ *s distribucijom* μ *i marginalnim distribucijama* μ_i*. Tada vrijedi:*

(1) $X_1, \ldots, X_n$ *su nezavisne ako i samo ako je*

$$F_X(x) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \ x \in \mathbb{R}^n$$

(2) $X_1, \ldots, X_n$ *su nezavisne ako i samo ako za svaku neprekidnu ograničenu funkciju* $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *vrijedi*

$$\mathbb{E}[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = \mathbb{E}g_1(X_1) \cdots \mathbb{E}g_n(X_n)$$

(3) *Ako* μ *ima gustoću* f *onda* μ_i *ima gustoću* f_i, $i = 1, \ldots, n$, *i vrijedi*

$$f_1(x_1) = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_2 \cdots dx_n$$

$$f_n(x_n) = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

U ovom slučaju su $X_1, \ldots, X_n$ *nezavisne ako i samo ako je*

$$f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \ \mu \ s.s.$$

(4) *Ako su* $X_1, \ldots, X_n$ *nezavisne onda su one nekorelirane. Obrat ne vrijedi.*

Dokaz (1) Ova formula se može napisati u obliku

$$\mu((-\infty, x]) = \mu_1((-\infty, x_1]) \cdots \mu_n((-\infty, x_n]), \; x \in \mathbb{R}^n$$

a budući da skupovi oblika $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}^n$, generiraju $B(\mathbb{R}^n)$ ova formula je ekvivalentna sa

$$\mu(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_n(E_n), \; E_i \in B(\mathbb{R})$$

što je ekvivalentno sa $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$.

(2) Formula se može napisati u obliku

$$\int g_1(x_1) \cdots g_n(x_n) d\mu(x) = \int g_1 d\mu_1 \cdots \int g_n d\mu_n$$

a budući da je $C(\mathbb{R})$ gust u $L_1(\mathbb{R})$ on je također gust i u $L_1(\mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, što znači da ova formula vrijedi za sve $g_i \in L_1(\mu_i)$. Stavljajući sada $g_i = \chi_{E_i}$ dobijemo tvrdnju.

(3) Budući da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

deriviranjem slijedi $f(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F_X(x)$, u svim točkama u kojima postoje derivacije. Također je

$$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

$$F_{X_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

pa opet deriviranjem slijedi

$$f_1(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1}(x_1) = \int \cdots \int f(x_1, t_{2,}, \ldots, t_n) dt_2 \cdots dt_n,$$

$$f_n(x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n} F_{X_n}(x_n) = \int \cdots \int f(t_1, \ldots t_{n-1}, x_n) dt_1 \cdots dt_{n-1}$$

Nadalje, derivirajući formulu iz (1) vidimo da je nezavisnost od $X_1, \ldots, X_n$ ekvivalentna sa $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ μ *s.s.*

(4) Formula iz (2) vrijedi za svaki $g_i \in L_1(\mu_i)$, pa ako stavimo $g_i = g_j = id$, $i \neq j$, $g_k = 1$, za $k \neq i, j$, dobijemo $\mathbb{E}X_iX_j = \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j$, $i \neq j$, što znači da su $X_1, \ldots, X_n$ nekorelirane. Iz primjera ćemo vidjeti da obrat ne vrijedi.

PRIMJERI 5.10

(1) Neka je X **uniformna slučajna varijabla na** $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

za svaku izmjerivu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, za koju ovaj integral postoji. Nadalje, vrijedi:

(a) $\mathbb{E}X^n = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$, $n \geq 1$
(b) $X \in L_p(\Omega, P)$, za svaki $p \in [1, \infty]$
(c) $\|X\|_\infty = \max(|a|, |b|)$
(d) $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$

(2) Neka je X **gamma slučajna varijabla** u $\mathbb{R}$ s parametrima $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Tada je

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx$$

za svaku izmjerivu funkciju $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, za koju ovaj integral postoji. Nadalje, vrijedi:

(a) $\mathbb{E}X^n = \frac{1}{\lambda^n}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$, $n \geq 1$
(b) $X \in L_p(\Omega, P)$, $p \in [1, \infty)$, $X \notin L_\infty(\Omega, P)$
(c) $\mathbb{D}X = \alpha/\lambda^2$

(3) Ako u (2) stavimo $\alpha = 1$ onda je X **exponencijalna slučajna varijabla** u $\mathbb{R}$ pa je $\mathbb{E}X^n = n!/\lambda^n, n \geq 1$, i $\mathbb{D}X = 1/\lambda^2$.

Ako u (2) stavimo $\lambda = \frac{1}{2}$, a α zamijenimo sa $\frac{\alpha}{2}$ onda je X χ^2**-slučajna varijabla** u $\mathbb{R}$ pa je:

(c) $\mathbb{E}X^n = \alpha(\alpha+2)\cdots(\alpha+2(n-1))$, $n \geq 1$
(d) $\mathbb{D}X = 2\alpha$

(4) Neka je X **Cauchyjeva slučajna varijabl**a u $\mathbb{R}$ s parametrima $\lambda > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{\lambda}{\pi}\int \frac{1}{\lambda^2+(x-\alpha)^2}f(x)dx$$

za svaku izmjerivu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju ovaj integral postoji.

Dakle, $\mathbb{E}X$ **ne postoji** pa ni $\mathbb{D}X$ **ne postoji**!

(5) Neka je X **Gaussova slučajna varijabla** u $\mathbb{R}$ s parametrima $a \in \mathbb{R}$ i σ^2, $\sigma > 0$. Tada je $\mathbb{E}X = a$, $\mathbb{D}X = \sigma^2$. Ako je $a = 0$ onda vrijedi

$$\mathbb{E}\,|X|^{2\alpha} = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\sigma^{2\alpha}\Gamma(\alpha + \tfrac{1}{2})$$

za svaki $\alpha > -\frac{1}{2}$, pa je

$$\|X\|_p = (\tfrac{2^p}{\pi})^{1/2}\sigma^p\Gamma(\tfrac{p+1}{2})^{1/p},\ p \in [1, \infty)$$

i $X \notin L_\infty(\Omega, P)$.

(6) Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}\exp(\alpha X) = \exp(\alpha \mathbb{E}X + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \mathbb{D}X),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

a budući da su obje strane definirane i analitičke po $\alpha \in \mathbb{C}$ zaključjemo da formula vrijedi za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$. Prema tome, također vrijedi

$$\mathbb{E}\exp(i\alpha X) = \exp(i\alpha \mathbb{E}X - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \mathbb{D}X),\ \alpha \in \mathbb{C}$$

(7) Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s parametrima $a \in \mathbb{R}^n$ i $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A > 0$. Tada je $\mathbb{E}X = a$ i $\mathbb{D}X = A$, što opravdava nazive za srednju vrijednost a i disperziju A.
(8) Neka je X uniformna slučajna varijabla na euklidskom disku $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Tada vrijedi:

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{1}{|D_n|} \int_{D_n} f(x)dx$$

gdje je $|D_n| = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + \frac{n}{2})$ volumen diska. Nadalje, vrijedi:
(a) $X_i \in L_p(\Omega, P)$, za svaki $p \in [1, \infty]$ i svaki i
(b) $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{D}X = \frac{1}{n+2}I$, pa su koordinate od X nekorelirane, ali zavisne. Usporediti ovo sa 5.9, (4).
(9) Neka je Y uniformna slučajna varijabla na disku $rD_n + a \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$. Tada je $Y = rX + a$, gdje je X iz (8), pa je $\mathbb{E}Y = a$, i $\mathbb{D}Y = r^2\mathbb{D}X = \frac{r^2}{n+2}I$.
(10) Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{D}X = A$. Tada za svaki $B \in gl_n(\mathbb{R})$, $B^\tau = B$, $B < \frac{1}{2}A^{-1}$, vrijedi **Kacova formula**

$$\mathbb{E}\exp(BX|X) = \det(I - 2AB)^{-1/2}$$

iz koje specijalno slijedi

$$\mathbb{E}\exp[\alpha(X|X)] = \det(I - 2\alpha A)^{-1/2},\ \alpha < \tfrac{1}{2}\left\|A\right\|^{-1}$$

gdje je $\|A\|$ spektralna norma od A. Za dokaz Kacove formule koristimo formulu

$$\int \exp(-(Ax|x))dx = \pi^{n/2}(\det A)^{-1/2},\ A > 0$$

a nju dobijemo po teoremu o zamjeni varijable za m_n.
(11) Neka je X **Cantorova slučajna varijabla** u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}f(X) = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}f(\tfrac{1}{3}X) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}f(\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3})$$

za svaku ograničenu i izmjerivu funkciju $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Specijalno, ako stavimo $f(t) = t^n$, $n \geq 1$, dobijemo

$$\mathbb{E}X^n = \tfrac{1}{2}3^{-n}[\mathbb{E}X^n + \mathbb{E}(X + 2)^n]$$

iz čega slijedi **rekurentna formula za momente**:

$$\mathbb{E}X^n = \frac{1}{2(3^n-1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k \mathbb{E}X^{n-k}, \ n \geq 1$$

Dakle, imamo $\mathbb{E}X = 1/2$, $\mathbb{E}X^2 = 3/8$, $\mathbb{E}X^3 = 5/16$, $\mathbb{E}X^4 = 87/320$, itd. i također $\mathbb{D}X = 1/8$.
(12) Neka je X Cantorova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$. Tada je

$$\mathbb{E}\exp(\alpha X) = e^{\alpha/2} \prod_{k\geq 1} \mathrm{ch}(3^{-s}\alpha), \ \alpha \in \mathbb{C}$$

Naime, ako stavimo $\psi(\alpha) = \mathbb{E}\exp(\alpha X)$ onda po (11) imamo

$$\psi(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1 + e^{2\alpha/3})\psi(\tfrac{1}{3}\alpha) = e^{\alpha/3}\mathrm{ch}(\tfrac{1}{3}\alpha)\psi(\tfrac{1}{3}\alpha)$$

pa iteracijom dobijemo

$$\psi(\alpha) = \exp(\sum_{s=1}^{k} 3^{-s}\alpha) \prod_{s=1}^{k} \mathrm{ch}(3^{-s}\alpha) \cdot \psi(3^{-k}\alpha), \ k \geq 1$$

pa po teoremu o dominiranoj konvergenciji dobijemo formulu, za $k \to \infty$.

PROPOZICIJA 5.11 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s gustoćom f, $E = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Borelova funkcija za koju vrijedi:*
(a) *$g : E \to E' = g(E)$ je bijekcija,*
(b) *$g^{-1} : E' \to E$ je derivabilna i $(g^{-1})'(x)$ je regularna matrica za svaki $x \in E'$. Tada slučajna varijabla $Y = g(X)$ ima gustoću f_1 i vrijedi*

$$f_1(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot |\det(g^{-1})'(y)| \cdot \chi_{E'}(y)$$

Dokaz Po teoremu o zamjeni varijable za m_n imamo:

$$\begin{aligned}
\int_B f_1(y)dy &= \int_B f(g^{-1}(y))|\det(g^{-1})'(y)|\chi_{E'}(y)dy \\
&= \int_{B\cap E'} f(g^{-1}(y))|\det(g^{-1})'(y)|\chi_{E'}(y)dy \\
&= \int_{g^{-1}(B\cap E')} f(x)dy = \int_{g^{-1}(B)} f(x)dy \\
&= P(X \in g^{-1}(B)) = P(Y \in B) = P_Y(B)
\end{aligned}$$

za svaki $B \in B(\mathbb{R}^n)$.

KOROLAR 5.12 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s gustoćom f, $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Tada slučajna varijabla $Y = AX + a$ ima gustoću f_1 i vrijedi*

$$f_1(y) = f(A^{-1}(y-a))\frac{1}{|\det A|}, \ y \in \mathbb{R}^n$$

Dokaz Ako je $g(x) = Ax + a$ onda je g difeomorfizam od $\mathbb{R}^n$, $g^{-1}(x) = A^{-1}(x - a)$ i $(g^{-1})'(x) = A^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

KOROLAR 5.13 *Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ sa srednjom vrijednosti $\mathbb{E}X = a$ i disperzijom $\mathbb{D}X = A$. Ako je $B \in GL_n(\mathbb{R})$ i $b \in \mathbb{R}^n$ onda je slučajna varijabla $Y = BX+b$ Gaussova u $\mathbb{R}^n$ sa srednjom vrijednosti $\mathbb{E}Y = Ba + b$ i disperzijom $\mathbb{D}Y = BAB^\tau$.*

Dokaz Y je Gaussova po prethodnom korolaru, a formule za $\mathbb{E}Y$ i $\mathbb{D}Y$ slijede iz 5.4

KOROLAR 5.14 *Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$. Tada su koordinate od X nezavisne ako i samo ako su nekorelirane.*

Dokaz Ako su koordinate od X nekorelirane onda je $\mathbb{D}X = A$ dijagonalna matrica pa se gustoća f od X raspada u produkt gustoća marginalnih distribucija. Sada po 5.9, (3) slijedi nezavisnost koordinata od X. Obrat slijedi iz 5.9, (4).

KOROLAR 5.15 *Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$, $a = \mathbb{E}X$ i $A = \mathbb{D}X$. Tada je $Y = A^{-1/2}(X - a)$ standardna Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ tj. $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{D}Y = I$.*

TEOREM 5.16 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s gustoćom f, $E = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Borelova funkcija i $E = \bigcup E_i$ konačna ili prebrojiva Borelova particija od E takva da funkcije $g_i = g|E_i$ zadovoljavaju*

(a) *$g_i : E_i \to E_i' = g_i(E_i)$ je bijekcija, za svaki i.*

(b) *$g_i^{-1} : E_i' \to E_i$ je derivabilna s.s. na E_i' i matrica $(g_i^{-1})'(x)$ je regularna s.s., za svaki i. Tada slučajna varijabla $Y = g(X)$ ima gustoću f_1 i vrijedi*

$$f_1(y) = \sum_i f(g_i^{-1}(y))|\det(g_i^{-1})'(y)|\chi_{E_i'}(y)$$

Dokaz Po teoremu o zamijeni varijable za m_n je

$$\begin{aligned}
\int_B f_1(y)dy &= \int_B \sum_i f(g_i^{-1}(y))|\det(g_i^{-1})'(y)|\chi_{E_i'}(y)dy = \\
&= \sum_i \int_{B\cap E_i'} f(g_i^{-1}(y))|\det(g_i^{-1})'(y)|\chi_{E_i'}(y)dy \\
&= \sum_i \int_{g_i^{-1}(B)\cap E_i} f(x)dx = \sum_i \int \chi_{g_i^{-1}(B)\cap E_i}(x)f(x)dx \\
&= \int \chi_{\cup_i g_i^{-1}(B)\cap E_i}(x)f(x)dx = \int_{g^{-1}(B)} f(x)dx \\
&= P(X \in g^{-1}(B)) = P(Y \in B) = P_Y(B)
\end{aligned}$$

za svaki $B \in B(\mathbb{R}^n)$.

PRIMJERI 5.17

(1) Neka je X standardna Gaussova varijabla u $\mathbb{R}$ i $Y = X^2$. Nađimo distribuciju od Y po prethodnom teoremu. Sada je $n = 1$, $g(x) = x^2$, $E = \mathbb{R}$, g nije injektivna na $E = \mathbb{R}$. Ako stavimo $E_1 = (-\infty, 0]$, $E_2 = (0, \infty)$, $g_i = g|E_i$, $i = 1, 2$, onda su ispunjeni uvijeti prethodnog teorema $g_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $g_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $E_1' = g_1(E_1) = [0, \infty)$, $E_2' = g_2(E_2) = (0, \infty)$. Dakle gustoća f_1 od Y je dana sa

$$f_1(y) = \tfrac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}))\chi_{(0,\infty)} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp(-\tfrac{y}{2})\chi_{(0,\infty)}(y)$$

što znači da Y ima χ^2-distribuciju s $\alpha = 1$ stupnjeva slobode. Vrijednost $f_1(0)$ možemo uzeti proizvoljnim zbog $P(X = 0) = P(Y = 0) = 0$, pa stavljamo $f_1(0) = 0$.

(2) Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^2$ s gustoćom f, $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija i $Y_1 = \psi(X)$. Uz koje uvijete Y_1 ima gustoću? Primijenimo prethodni teorem na funkciju $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g_1 = \psi$, $g_2 = id_1$ tj. $y_1 = g_1(x) = \psi(x)$, $y_2 = g_2(x) = x_1$. Sada ovaj g mora zadovoljavati uvjete prethodnog teorema. Ako je npr. g bijekcija, derivabiljna *s.s.* i $\det(g^{-1})'(y) \neq 0$ *s.s.* na slici od g onda je $x_1 = (g^{-1})_1(y) = y_2$, $x_2 = (g^{-1})_2(y) = \varphi(y)$ za neku derivabilnu funkciju $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Budući da je $\det(g^{-1})'(y) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y)$ gustoća f_1 od $Y = g(X)$ je $f_1(y) = f(y_2, \varphi(y))|\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y)|$ što znači da Y_1 ima gustoću

$$f_{Y_1}(t) = \int f(x_1, \varphi(t, x_1))|\tfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t, x_1)|dx_1$$

(3) Neka vrijede uvjeti od (2) i neka je $\psi(x) = x_1 + x_2$. Tada $Y_1 = X_1 + X_2$ ima gustoću

$$f_{Y_1}(t) = \int f(x_1, t - x_1)dx_1$$

Naime, ovdje je $\psi(x) = x_1 + x_2$, $\varphi(y) = y_1 - y_2$.

(4) Neka vrijede uvjeti od (2) i neka je $\psi(x) = x_2 - x_1$. Tada $Y_1 = X_2 - X_1$ ima gustoću

$$f_{Y_1}(t) = \int f(x_1, t + x_1)dx_1$$

Naime, ovdje je $\varphi(y) = y_2 + y_1$ pa primijenio formulu iz (2).

(5) Neka vrijede uvjeti od (2) i neka je $\psi(x) = x_1x_2$. Tada funkcija g iz (2) nije injektivna na $\mathbb{R}^2$, ali ako stavimo $E_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$, $E_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, $g_i = g|E_i$, $i = 1, 2$, onda kao u (2) imamo $\varphi(y) = y_1/y_2$ pa $Y_1 = X_1X_2$ ima gustoću

$$f_{Y_1}(t) = \int f(x_1, t/x_1)\tfrac{1}{|x_1|}dx_1$$

(6) Neka vrijede uvjeti od (2) i neka je $\psi(x) = x_2/x_1$. Tada slično kao u (5) slučajna varijabla $Y_1 = X_2/X_1$ ima gustoću

$$f_{Y_1}(t) = \int f(x_1, tx_1)\,|x_1|\,dx_1$$

Specijalno, ako su X_1 i X_2 nezavisne i imaju standardnu Gaussovu distribuciju u $\mathbb{R}$ onda $Y_1 = X_2/X_1$ ima gustoću

$$f_{Y_1}(t) = \int f_1(x_1) f_1(tx_1)|x_1| dx_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

što znači da je Y_1 Cauchyjeva slučajna varijabla u $\mathbb{R}$.
(7) Neka su X_1, X_2 nezavisne Gaussove varijable u $\mathbb{R}$. Tada po (3) zaključujemo da je $X_1 + X_2$ Gaussova u $\mathbb{R}$.
(8) Neka su X_1, X_2 nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$ s eksponencijalnom distribucijom s parametrom λ. Tada po (3) zaključujemo da $X_1 + X_2$ ima gamma distribuciju s parametrima λ i $\alpha = 2$.
(9) Neka su X_1, X_2 nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$ s gamma distribucijom s parametrima λ i α_k, $k = 1, 2$. Tada po (3) zaključujemo da $X_1 + X_2$ ima gamma distribuciju s parametrima λ i $\alpha_1 + \alpha_2$.

PROPOZICIJA 5.18 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne Gaussove slučajne varijable u $\mathbb{R}$. Tada je $Y_1 = X_1 + \cdots + X_n$ Gaussova u $\mathbb{R}$ i za nju vrijedi $\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_n$, $\mathbb{D}Y_1 = \mathbb{D}X_1 + \cdots + \mathbb{D}X_n$.*

Dokaz Slijedi iz 5.17, (7) i 5.5, (5).

PROPOZICIJA 5.19 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$, pri čemu X_i ima gamma distribuciju s parametrima λ i α_i, $i = 1, \ldots, n$. Tada $Y_1 = X_1 + \cdots + X_n$ ima gamma distribuciju s parametrima λ i α, gdje je $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.*

Dokaz Slijedi iz 5.17, (9).

KOROLAR 5.20 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$, pri čemu sve imaju standardnu Gaussovu distribuciju. Tada $Y_1 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode.*

Dokaz Slijedi iz prethodne propozicija i 5.17, (1).

KOROLAR 5.21 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne Gaussove slučajne varijable u $\mathbb{R}$. Tada slučajna varijabla*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbb{D}X_i}(X_i - \mathbb{E}X_i)^2$$

ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode.

Dokaz Neka je $Z_i = (X_i - \mathbb{E}X_i)/\sqrt{\mathbb{D}X_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je Z_i standardna Gaussova varijabla u $\mathbb{R}$. Nadalje, $Z_1, \ldots, Z_n$ su nezavisne pa primjenimo prethodnu propoziciju.

Ovaj korolar se često primjenjuje u praksi u tzv. χ^2-testu.

DEFINICIJA 5.22 *Neka su X_1, X_2 nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$.*
(1) *Ako X_1 ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode, a X_2 standardnu Gaussovu onda kažemo da $Z = X_2/\sqrt{X_1/n}$ ima **Studentovu distribuciju s n stupnjeva slobode**.*
(2) *Ako X_1 ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode, a X_2 χ^2-distribuciju s m stupnjeva slobode onda kažemo da $Z = mX_1/nX_2$ ima **Fischerovu distribuciju** ili **F-distribuciju s (n, m) stupnjeva slobode**.*

PROPOZICIJA 5.23 *Neka je Z Studentova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s n stupnjeva slobode. Tada Z ima gustoću f i vrijedi*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}(1 + \tfrac{1}{n}z^2)^{-(n+1)/2}, \ z \in \mathbb{R}$$

Dokaz Koristeći 5.17, (6) vidimo da Z ima gustoću f i

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(z\sqrt{x_1/n})\sqrt{x_1/n}\,dx_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty x_1^{(n-1)/2} \exp(-\tfrac{x_1}{2}(1 + \tfrac{z^2}{n}))dx_1 \end{aligned}$$

iz čega slijedi gornja formula.

PROPOZICIJA 5.24 *Neka je Z slučajna varijabla koja ima F-distribuciju s (m, n) stupnjeva slobode. Tada Z ima gustoću f i vrijedi*

$$f(z) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\tfrac{m}{n})^{m/2} z^{\frac{m}{2}-1}(1 + \tfrac{m}{n}z)^{-\frac{m+n}{2}}, \ z > 0$$

Dokaz Ponovo po 5.17, (6) vidimo da Z ima gustoću f i vrijedi

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(z\sqrt{x_1/n})\sqrt{x_1/n}\,dx_1 = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\tfrac{m}{n})^{m/2} z^{\frac{m}{2}-1} \int_0^\infty x^{\frac{m+n}{2}-1} \exp(-\tfrac{x}{2}(1 + \tfrac{m}{n}z))dx \end{aligned}$$

iz čega slijedi formula.

PROPOZICIJA 5.25 *Neka je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Tada je $(b|X)$ Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$.*

Dokaz Neka je $Y = A^{-1/2}(X - a)$, gdje je $a = \mathbb{E}X$ i $A = \mathbb{D}X$. Tada je Y standardna Gaussova po 5.15. Sada je $(b|X) = (b|A^{1/2}Y + a) = (A^{1/2}b|Y) + (b|a)$ pa za $c = A^{1/2}b$ imamo $(b|X) = (c|Y) + (b|a) = c_1Y_1 + \cdots + c_nY_n + (b|a)$. Budući da su koordinate od Y nezavisne po 5.18 zaključujemo da $(b|Y)$ ima Gaussovu distribuciju u $\mathbb{R}$.

Zamijetimo da je $\mathbb{E}(b|X) = (b|a)$ i $\mathbb{D}(b|X) = (Ab|b)$.

5.3 Slučajni uzorci i njihove statistike

DEFINICIJA 5.26 (1) *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ takva da su koordinate $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i sve imaju istu distribuciju μ na $\mathbb{R}$. Tada se X zove* ***slučajni uzorak duljine*** *n* ***iz populacije sa svojstvom*** *μ. Kažemo da je X Gaussov, Poissonov, binomijalni itd, ako je μ Gaussova, Poissonova, binomijalna itd.*
(2) *Neka je X slučajni uzorak duljine n i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Tada se slučajna varijabla $T = f(X)$ zove* ***statistika od*** *X. U primjeni su vrlo česte sljedeće statistike:*

(a) $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ *(**očekivanje uzorka**)*

(b) $S^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, $n \geq 2$, *(**disperzija uzorka**)*

(c) $M_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$, *($k$-**ti centralni moment uzorka**)*

(d) $A_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, *($k$-**ti moment uzorka**), $k \geq 1$*

PROPOZICIJA 5.27 *Neka je X slučajni uzorak duljine n iz populacije sa svojstvom μ. Ako μ ima srednju vrijednost $a = \mathbb{E}X_1$ i disperziju $\sigma^2 = \mathbb{D}X_1$ onda je $\mathbb{E}\overline{X} = a$, $\mathbb{D}\overline{X} = \frac{1}{n}\sigma^2$ i $\mathbb{E}S^2(X) = \sigma^2$.*

Dokaz Budući da je $\sum(X_i - a)^2 = \sum(X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - a)^2$ imamo

$$\mathbb{E}S^2(X) = \frac{1}{n-1}\mathbb{E}[\sum(X_i - a)^2 - n(\overline{X} - a)^2] = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \sigma^2$$

pa dobijemo treću formulu, dok su prve dvije evidentne.

KOROLAR 5.28 *Neka je X Gaussov slučajni uzorak duljine n. Tada je $\overline{X}$ Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$.*

Dokaz Slijedi iz 5.18

TEOREM 5.29 *Neka je X Gaussov slučajni uzorak duljine $n \geq 2$. Tada su $\overline{X}$ i $S^2(X)$ nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$.*

Dokaz Neka je $a = \mathbb{E}X_1$ i $\sigma^2 = \mathbb{D}\overline{X}_1$. Tada je X Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}X = au$ i $\mathbb{D}X = \sigma^2 I$, gdje je $u = e_1 + \cdots + e_n$. Ako je $b = \frac{1}{\sqrt{n}}u$ onda je $\|b\| = 1$ pa postoji ortogonalna matrica $U \in O(n)$ čiji je prvi redak jednak b^τ. Neka je sada $Y = UX$. Tada je Y Gaussova u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{E}Y = Uau = aUu$, $\mathbb{D}Y = U \cdot \sigma^2 I \cdot U^\tau = \sigma^2 I$ pa su koordinate $Y_1, \ldots, Y_n$ nezavisne. Nadalje, $Y_1 = \sqrt{n}\overline{X}$ i $(Y|Y) = (X|X)$ pa je

$$Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = (Y|Y) - Y_1^2 = (X|X) - n\overline{X}^2 = (n-1)S^2(X)$$

Budući da je Y_1 nezavisna od $Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$ zaključujemo da je $\overline{X}$ nezavisna od $S^2(X)$.

TEOREM 5.30 *Neka je X Gaussov slučajni uzorak duljine $n \geq 2$ i $\sigma^2 = \mathbb{D}X_1$. Tada slučajna varijabla $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2(X)$ ima χ^2-distribuciju s $n-1$ stupnjeva slobode.*

Dokaz (1°) Neka je prvo $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{D}X = I$ i U ortogonalna matrica iz dokaza prethodnog teorema. Tada za $Y = UX$ imamo $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{D}Y = I$ i $(n-1)S^2(X) = Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$, pa tvrdnja slijedi po 5.20.

(2°) Dokažimo sad opći slučaj. Ako je $Y = \frac{1}{\sigma}(X - au)$ i $a = \mathbb{E}X_1$ onda je $\mathbb{E}Y = 0$ i $\mathbb{D}Y = I$, pa po (1°) slučajna varijabla $\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$ ima χ^2-distribuciju s $n-1$ stupnjeva slobode. Budući da je

$$\tfrac{n-1}{\sigma^2}S^2(X) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$$

dobijemo tvrdnju.

KOROLAR 5.31 *Neka je X Gaussov slučajni uzorak duljine $m+1$, Y Gaussov slučajni uzorak duljine $n+1$ i $\mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}Y_1$. Ako su X i Y nezavisni onda slučajna varijabla*

$$Z = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m+1}(X_i - \overline{X})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

ima Fischerovu distribuciju s (m, n) stupnjeva slobode.

Dokaz Slijedi iz 5.22, (2), 5.30 i nezavisnosti od X, Y.

KOROLAR 5.32 *Neka je X Gaussov slučajni uzorak duljine $n \geq 2$ i $a = \mathbb{E}X_1$. Tada slučajna varijabla*

$$Z = \sqrt{n}(\overline{X} - a)/S^2(X)^{1/2}$$

ima Studentovu distribuciju s $n-1$ stupnjeva slobode.

Dokaz Slijedi iz 5.22, (1), 5.28, 5.29 i 5.30.

NAPOMENA 5.33 Na prethodnom korolaru se bazira poznati **Studentov test u primijenjenoj statistici** pomoću kojeg se **provjerava hipoteza** da Gaussova varijabla X u $\mathbb{R}$ ima očekivanje $a_0 \in \mathbb{R}$, pri čemu je $\mathbb{D}X$ nepoznat broj. Postupak je sljedeći: provede se n nezavisnih mjerenja od X tj. razmatra se slučajni uzorak Y duljine n iz Gaussove populacije, $Y_1 = X$. Ako je pretpostavka o očekivanju a_0 ispravna onda je $Z = \sqrt{n}(\overline{Y} - a_0)/S^2(Y)^{1/2}$ Studentova slučajna varijabla s $n-1$ stupanjem slobode. Za zadani $\alpha \in (0,1)$ iz tablica Studentove distribucije nađemo broj t_α takav da je $P(|Z| \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$, i ovaj broj $1-\alpha$ zovemo **pouzdanost testa**. Ako je izmjereni Z pao u $[-t_\alpha, t_\alpha]$ onda se **hipoteza** $\mathbb{E}X = a_0$ **prihvaća**. Ako je izmjereni Z izvan $[-t_\alpha, t_\alpha]$ onda se **hipoteza** $\mathbb{E}X = a_0$ **odbacuje**.

PRIMJERI 5.34

(1) Neka su X, Y nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$ i $Z = X + Y$. Ako su μ, ν distribucije od X, Y onda je

$$F_Z(z) = \int F_X(z-y)dv(y) = \int F_Y(z-x)d\mu(x)$$

Ako bar jedna od njih ima gustoću onda Z ima gustoću

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y)d\nu(y) \quad \text{ili} \quad f_Z(z) = \int f_Y(z-x)d\mu(x)$$

(2) Ako je X Fischerova s (m,n) stupnjeva slobode onda je $1/X$ također Fischerova s (n,m) stupnjeva slobode.

(3) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable u $\mathbb{R}$, $Y_1 = \min_i X_i$ i $Y_2 = \max_i X_i$. Tada vrijedi

$$F_{Y_1}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(t)), \quad F_{Y_2}(t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t)$$

Specijalno, ako je X slučajni uzorak iz populacije sa svojstvom μ onda je

$$F_{Y_1}(t) = 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n, \quad F_{Y_2}(t) = F_{X_1}(t)^n$$

Ako sa ν_1, ν_2 označimo distribucije od Y_1, Y_2 onda je

$$d\nu_1(t) = n(1 - F_{X_1}(t))^{n-1}d\mu(t), \quad d\nu_2(t) = nF_{X_1}(t)^{n-1}d\mu(t)$$

(4) Neka je X slučajni uzorak duljine n iz populacije sa svojstvom μ, gdje je μ uniformna mjera na $[0,1] \subset \mathbb{R}$, $Y_1 = \min_i X_i$, $Y_2 = \max_i X_i$, $Z_1 = Y_2 - Y_1$, $Z_2 = Y_1/Y_2$. Tada po (3) imamo:

(a) Y_1, Y_2 imaju gustoće $f_1(x) = n(1-x)^{n-1}$, $f_2(x) = nx^{n-1}$, $x \in [0,1]$
(b) $\mathbb{E}Y_1 = 1 - \mathbb{E}Y_2 = \frac{1}{n+1}$, $\mathbb{D}Y_1 = \mathbb{D}Y_2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$
(c) $Y = Y_1e_1 + Y_2e_2$ je koncentrirana na $\{x \in \mathbb{R}^2; 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$ i vrijedi $F_Y(x) = x_2^n - (x_2 - x_1)^n$, $f_Y(x) = n(n-1)(x_2 - x_1)^{n-2}$
(d) $F_{Z_1}(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n$, $F_{Z_2}(x) = 1 - (1-x)^{n-1}$, $0 \le x \le 1$
(e) $\mathbb{E}Z_1 = \frac{n-1}{n+1}$, $\mathbb{D}Z_1 = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}$
(f) $\mathbb{E}Z_2 = \frac{1}{n}$, $\mathbb{D}Z_2 = \frac{n-1}{n^2(n+1)}$

(5) Neka je X Gaussova u $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}X = a$, $\mathbb{D}X = A$. Tada slučajna varijabla $Y = (A^{-1}(X-a)|X-a)$ ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode. Naime, ako je $Z = A^{-1/2}(X-a)$ onda je Z standardna Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ i $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$.

(6) Neka je X standardna Gaussova u $\mathbb{R}^n$ i $P \in gl_n(\mathbb{R})$ projektor ranga k. Tada slučajna varijabla $Y = (PX|X)$ ima χ^2-distribuciju s k stupnjeva slobode. Naime, P se može dijagonalizirati tj. postoji $U \in O(n)$ takva da je UPU^τ dijagonalna matrica s k jedinica na dijagonali. Sada $Z = UX$ ima standardnu Gaussovu distribuciju na $\mathbb{R}^n$ i

$$Y = (PU^\tau Z|U^\tau Z) = (UPU^\tau Z|Z) = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$$

pa Y ima χ^2-distribuciju s k stupnjeva slobode.

DEFINICIJA 5.35 *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ i $\omega \in \Omega$. Ako realne brojeve $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ uredimo uzlazno dobijemo $X_{(1)}(\omega), \ldots, X_{(n)}(\omega)$, pri čemu je $X_{(k)}(\omega)$ k-ti po redu od brojeva $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Specijalno je $X_{(1)}(\omega) = \min_i X_i(\omega)$, $X_{(n)}(\omega) = \max_i X_i(\omega)$.*

*Neka je X slučajni uzorak duljine n. Tada se $X_{(k)}$ zove k-**ta redna statistika od** X, $k = 1, \ldots, n$. Evidentno je $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$.*

PROPOZICIJA 5.36 *Neka je X slučajni uzorak duljine n iz populacije sa svojstvom μ i neka je F funkcija distribucije od μ. Tada k-ta redna statistika $X_{(k)}$ ima funkciju distribucije*

$$F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} F(x)^m (1-F(x))^{n-m}, \; k = 1, \ldots, n$$

Dokaz Neka je $\tau(x) = |\{j; X_j \le x\}|$. Tada je $\tau(x)$ slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ i

$$\tau(x) = \chi_{(X_1 \le x)} + \cdots + \chi_{(X_n \le x)}$$

Budući da $\chi_{(X_i \le x)}$ ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom $p = P(X_i \le x) = F(x)$, $i = 1, \ldots, n$, zaključujemo da $\tau(x)$ ima binomijalnu distribuciju s parametrom n i $p = F(x)$ pa je

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(\tau(x) \ge k) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} F(x)^m (1-F(x))^{n-m}$$

iz čega slijedi tvrdnja.

KOROLAR 5.37 *Neka vrijede uvjeti prethodne propozicije i neka mjera μ ima gustoću f. Tada k-ta redna statistika ima gustoću g_k i vrijedi*

$$g_k(x) = n\binom{n-1}{k-1}F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x),\ x \in \mathbb{R},\ k = 1, \dots, n$$

Dokaz Deriviramo formulu iz prethodne propozicije.

PRIMJERI 5.38

(1) Neka je X slučajni uzorak duljine $n \geq 2$ iz populacije sa svojstvom μ, gdje je μ eksponencijalna mjera na $\mathbb{R}$ s parametrom λ. Tada vrijede tvrdnje:
(a) $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ su nezavisne.
(b) $X_{(k+1)} - X_{(k)}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $(n-k)\lambda$.
(c) $\mathbb{E}X_{(k)} = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1})$, $k = 1, \dots, n$
(d) $X_{(k)}$ ima gustoću

$$g_k(x) = n\binom{n-1}{k-1}(1-e^{-\lambda x})^{k-1}\lambda e^{-\lambda x}e^{-(n-k)\lambda x},\ x > 0$$

(2) Neka je X slučajni uzorak duljine n iz populacije sa svojstvom μ. Ako μ ima gustoću f i funkciju distribucije F onda slučajna varijabla Y u $\mathbb{R}^2$ definirana sa $Y = X_{(1)}e_1 + X_{(n)}e_2$ ima gustoću

$$g(x_1, x_2) = n(n-1)f(x_1)f(x_2)\left(F(x_2) - F(x_1)\right)^{n-2},\ x_1 \leq x_2$$

5.4 Fourierova transformacija

DEFINICIJA 5.39 (1) *Neka je $M(\mathbb{R}^n)$ skup svih konačnih Borelovih mjera na $\mathbb{R}^n$, $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ i $\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, funkcija definirana sa*

$$\hat{\mu}(x) = \int e^{i(x|y)}d\mu(y)$$

Tada se $\hat{\mu}$ zove ***Fourierova transformacija*** *ili* ***karakteristična funkcija*** *mjere μ.*

(2) *Ako je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distribucijom μ onda se funkcija $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definirana sa*

$$\varphi_X(x) = \hat{\mu}(x) = \mathbb{E}\exp[i(x|X)]$$

zove ***Fourierova transformacija*** *ili* ***karakteristična funkcija od*** *X.*

PROPOZICIJA 5.40 (1) $\hat{\mu}(0) = \|\mu\|$, *gdje je* $\|\mu\| = \mu(\mathbb{R}^n)$

(2) $|\hat{\mu}(x)| \leq \|\mu\|$, *za svaki* $x \in \mathbb{R}^n$ *i* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$

(3) $(\alpha\mu + \nu)^\wedge(x) = \alpha\hat{\mu}(x) + \hat{\nu}(x)$, $\alpha \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$

(4) $\hat{\mu}$ *je uniformno neprekidna funkcija na* $\mathbb{R}^n$

(5) $\mathrm{Re}\,\hat{\mu}$ *i* $\mathrm{Im}\,\hat{\mu}$ *su uniformno neprekidne funkcije na* $\mathbb{R}^n$

Dokaz Prve tri tvrdnje slijede neposredno iz definicije. (4) Imamo

$$|\hat{\mu}(x+h) - \hat{\mu}(x)| = |\int e^{i(x|y)}(e^{i(h|y)} - 1)d\mu(y) \leq \int |e^{i(h|y)} - 1|d\mu(y)$$

pa po teoremu o dominiranoj konvergenciji $|\hat{\mu}(x+h) - \hat{\mu}(x)| \to 0$, $h \to 0$, za svaki $x, h \in \mathbb{R}^n$, iz čega slijedi tvrdnja. (5) Slijedi iz (4).

PROPOZICIJA 5.41 *Ako je* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *onda je* $\hat{\mu}$ ***pozitivno definitna funkcija*** *tj. za svaki* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ *i svaki* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, *vrijedi*

$$\sum_i \sum_j \alpha_i \overline{\alpha}_j \hat{\mu}(x_i - x_j) \geq 0$$

Drukčije rečeno, matrica $[\hat{\mu}(x_i - x_j)] \in gl_k(\mathbb{C})$ *je pozitivna.*

Dokaz $\sum_i \sum_j \alpha_i \overline{\alpha}_j \hat{\mu}(x_i - x_j) = \int |\sum_i \alpha_i e^{i(x_i|y)}|^2 d\mu(y) \geq 0$.

TEOREM 5.42 (Bochner)

Funkcija $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *je Fourierova transformacija neke Borelove vjerojatnosti na* $\mathbb{R}^n$ *ako i samo ako je neprekidna, pozitivno definitna i* $\varphi(0) = 1$.

Dokaz Bez dokaza.

TEOREM 5.43 (Teorem jedinstvenosti)

Ako su $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ *i* $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ *onda je* $\mu = \nu$.

Dokaz Bez dokaza.

PROPOZICIJA 5.44 *Neka je* X *slučajna varijabla u* $\mathbb{R}^n$.

(1) *Neka je* $a \in \mathbb{R}^m$ *i* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linearni operator. Ako je* $Y = AX + a$ *onda je*

$$\varphi_Y(y) = e^{i(a|y)}\varphi_X(A^\tau y), y \in \mathbb{R}^m$$

(2) *Ako je* $a \in \mathbb{R}^n$ *i* $Y = (a|X) = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ *onda je*

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(ta),\ t \in \mathbb{R}$$

(3) $\varphi_{X_i}(t) = \varphi_X(te_i)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$

(4) *Koordinate* $X_1, \ldots, X_n$ *od* X *su nezavisne ako i samo ako je*

$$\varphi_X(x) = \varphi_{X_1}(x_1) \cdots \varphi_{X_n}(x_n),\ x \in \mathbb{R}^n$$

Dokaz (1) Slijedi neposredno iz definicije, dok su (2) i (3) specijalni slučajevi od (1) za $m = 1$. (4) Neka su $\mu_1, \ldots, \mu_n$ marginalne distribucije od X i μ distribucija od X. Tvrdnja se može napisati u obliku

$$\hat{\mu}(x) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)\widehat{\ }(x), \; x \in \mathbb{R}^n$$

što je po teoremu jedinstvenosti ekvivalentno sa $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$.

PRIMJERI 5.45

(1) Ako je μ binomijalna mjera na $\mathbb{R}$ onda je $\hat{\mu}(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.
(2) Ako je μ Poissonova mjera na $\mathbb{R}$ onda je $\hat{\mu}(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$.
(3) Ako je X cjelobrojna slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s generatrisom ψ_X onda je $\varphi_X(t) = \psi_X(e^{it})$. Npr. za Pascalovu slučajnu varijablu je

$$\varphi_X(t) = \hat{\mu}(t) = p^r(1 - (1-p)e^{it})^{-r}$$

(4) Ako je μ uniformna mjera na $[a, b] \subset \mathbb{R}$ onda je $\hat{\mu}(t) = \frac{1}{b-a}\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}$. Specijalno, za $[a, b] = [-1, 1]$ imamo $\hat{\mu}(t) = \frac{\sin t}{t}$.
(5) Ako je μ gamma mjera na $\mathbb{R}$ onda je $\hat{\mu}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$.
Specijalno, za χ^2-mjeru je $\hat{\mu}(t) = (1 - 2it)^{-\alpha/2}$, dok je za eksponencijalnu mjeru $\hat{\mu}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$.
(6) Ako je μ Cauchyjeva mjera na $\mathbb{R}$ onda je $\hat{\mu}(t) = \exp(i\alpha t - \lambda\,|t|)$.
(7) Ako je μ Laplaceova mjera na $\mathbb{R}$ onda je $\hat{\mu}(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}e^{i\alpha t}$.
(8) Ako je μ Gaussova mjera na $\mathbb{R}^n$ sa srednjom vrijednosti a i disperzijom A onda je

$$\hat{\mu}(x) = \exp(i(a|x) - \tfrac{1}{2}(Ax|x)), \; x \in \mathbb{R}^n$$

Specijalno, za $n = 1$ je $A = \sigma^2$ pa je $\hat{\mu}(x) = \exp(iax - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2)$.
(9) Ako je μ polinomijalna mjera na $\mathbb{R}^n$ onda je $\hat{\mu}(x) = (p_1 e^{ix_1} + \cdots + p_n e^{ix_n})^k$

PROPOZICIJA 5.46 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distrib. μ.*

(1) Ako je $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ i $X^\omega \in L_1(\Omega, P)$ onda $\partial^\omega \hat{\mu}$ postoji i uniformno je neprekidna na $\mathbb{R}^n$. U tom slučaju vrijedi formula

$$\partial^\omega \hat{\mu}(x) = i^{|\omega|} \int e^{i(x|y)} y^\omega d\mu(y), \; x \in \mathbb{R}^n$$

(2) $X^\omega \in L_1(\Omega, P)$, za svaki $\omega \in \mathbb{N}_0^n$, ako i samo ako je $\hat{\mu}$ beskonačno derivabilna funkcija.

Dokaz (1) Ako je $X^\omega \in L_1(\Omega, P)$ tj. $\mathbb{E}|X^\omega| < \infty$, gdje je $X^\omega = X_1^{\omega_1} \cdots X_n^{\omega_n}$, onda je funkcija $y \mapsto e^{i(x|y)} y^\omega$ u $L_1(\mu)$ i $|\int e^{i(x|y)} y^\omega d\mu(y)| \le \mathbb{E}|X^\omega|$, što znači da postoji $\partial^\omega \hat{\mu}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, i vrijedi

$$\partial^\omega \hat{\mu}(x) = \int \partial^\omega e^{i(x|y)} d\mu(y) = i^{|\omega|} \int e^{i(x|y)} y^\omega d\mu(y)$$

Uniformna neprekidnost se dokazuje analogno kao za $\hat{\mu}$. (2) Slijedi iz (1).

KOROLAR 5.47 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distrib. μ.*
(1) *Ako je X integrabilna onda je $\hat{\mu}$ klase C^1 i vrijedi*

$$\mathbb{E}X = -i\hat{\mu}'(0)^\tau$$

(2) *Ako X ima disperziju onda je $\hat{\mu}$ klase C^2 i vrijedi*

$$\hat{\mu}''(0) = -\mathbb{E}XX^\tau$$

(3) *Ako je X^ω integrabilna onda je $\mathbb{E}X^\omega = (-i)^{|\omega|}\partial^\omega\hat{\mu}(0)$.*

Dokaz Po prethodnoj propoziciji je $\hat{\mu}'(x) = i\int e^{i(x|y)}y^\tau d\mu(y)$ i

$$\hat{\mu}''(x) = (\hat{\mu}'(x)^\tau)' = -\int e^{i(x|y)}yy^\tau d\mu(y)$$

pa dobijemo (1) i (2), dok (3) slijedi iz prethodne propozicije, (1) za $x = 0$.

PROPOZICIJA 5.48 *Neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s distribucijom μ, takva da za neki $\alpha > 0$ vrijedi $\mathbb{E}\exp(\alpha|X|) < \infty$. Tada vrijedi:*
(1) $X^k \in L_1(\Omega, P)$, $k \geq 1$
(2) $\overline{\lim}[\frac{1}{n!}\mathbb{E}|X|^n]^{1/n} = 1/R < \infty$, *za neki* $R > 0$
(3) $\hat{\mu}$ *je analitička funkcija na nekoj okolini nule i*

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n\geq 0}\tfrac{1}{n!}(it)^n\mathbb{E}X^n, \quad |t| < R$$

(4) $\mathbb{R}[x] \subset L_1(\mu)$ *i* $\mathbb{R}[x]$ *je gust u* $L_1(\mu)$

Dokaz Budući da je $\mathbb{E}\exp(\alpha|X|) < \infty$, za neki $\alpha > 0$, po teoremu o monotonoj konvergenciji je

$$\sum_{n\geq 0}\tfrac{1}{n!}\alpha^n\mathbb{E}|X|^n < \infty$$

Ako sa R označimo radius konvergencije ovog reda onda dobijemo prve tri tvrdnje. Prvi dio iz (4) slijedi iz (1). Nadalje, budući da momenti jednoznačno određuju $\hat{\mu}$ zaključujemo da je μ jednoznačno određena sa $\int f d\mu$, $f \in \mathbb{R}[x]$, što znači da je $\mathbb{R}[x]$ gust u $L_1(\mu)$.

PRIMJERI 5.49

(1) Ako je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distribucijom μ i ako postoji $\alpha > 0$ tako da je $\int\exp(\alpha\|x\|)d\mu(x) < \infty$ onda vrijede analogne tvrdnje kao u prethodnoj propoziciji. Specijalno je $\hat{\mu}$ analitička na nekoj okolini 0 i vrijedi

$$\hat{\mu}(x) = \sum_{\omega} i^{|\omega|}\tfrac{1}{\omega!}x^\omega\mathbb{E}X^\omega$$

Nadalje, svi polinomi $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ su gusti u $L_1(\mu)$.
(2) Ako je μ vjerojatnost na $\mathbb{R}^n$ takva da je $\hat{\mu} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ onda μ ima gustoću f po Lebesgueovoj mjeri m_n i

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i(x|y)} \hat{\mu}(y) dy$$

Gustoća f je ograničena, $|f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \|\hat{\mu}\|_1$ i uniformno neprekidna funkcija. Ova tvrdnja se zove **teorem inverzije**.
(3) Neka je $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ i Y slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distribucijom ν. Tada se Y zove **opća Poissonova slučajna varijabla u** $\mathbb{R}^n$ ako vrijedi

$$\hat{\nu}(x) = \exp \int (e^{i(x|y)} - 1) d\mu(y)$$

a njezina distribucija ν se zove **opća Poissonova mjera na** $\mathbb{R}^n$. Nadalje, neka je X slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ s distribucijom $\mu / \|\mu\|$, gdje je $\|\mu\| = \mu(\mathbb{R}^n)$. Tada Y ima srednju vrijednost ako i samo ako X ima srednju vrijednost pri čemu je $\mathbb{E}Y = \|\mu\| \mathbb{E}X$. Nadalje, Y ima disperziju ako i samo ako X ima disperziju i tada je $\mathbb{D}Y = \|\mu\| \mathbb{E}XX^\tau$.

Ako je $n = 1$ i $\mu = \lambda\delta_1$ onda je ν Poissonova mjera na $\mathbb{R}$ s param. λ.
(4) Neka je X standardna Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ afina funkcija, $f(x) = Ax + a$, $A \in gl_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^n$. Tada se $Y = f(X)$ zove **opća Gaussova slučajna varijabla u** $\mathbb{R}^n$, a njezina distribucija μ se zove **opća Gaussova mjera na** $\mathbb{R}^n$. Nadalje, vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $\hat{\mu}(x) = \exp\left(i(a|x)\right) - \frac{1}{2}(Bx|x))$, gdje je $B = AA^\tau$.

(b) $\mathbb{E}Y = a$, $\mathbb{D}Y = B$.

(c) Ako je $A = 0$ onda je $X = a$ i $\mu = \delta_a$

(d) Ako je $A \neq 0$ i $\det A = 0$ onda je μ singularna mjera i njezin nosač je ravnina $f(\mathbb{R}^n)$.

(5) Ako je X opća Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ afina funkcija onda je $Y = f(X)$ također opća Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^k$.
(6) Neka je X stanardna Gaussova slučajna varijabla na $\mathbb{R}^n$, X_0 stanardna Gaussova slučajna varijabla na $\mathbb{R}$ i $Y = X/X_0$. Ako su X i X_0 nezavisne onda se Y zove **stanardna Cauchyjeva slučajna varijabla u** $\mathbb{R}^n$, a njezina distribucija μ se zove **standardna Cauchyjeva mjera na** $\mathbb{R}^n$. Ona ima gustoću f danu formulom

$$f(x) = \Gamma(\tfrac{n+1}{2}) \pi^{-(n+1)/2} (1 + \|x\|^2)^{-(n+1)/2}, \; x \in \mathbb{R}^n$$

Nadalje, vrijedi $\hat{\mu}(x) = \exp(-\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$.
(7) Neka je je X stanardna Cauchyjeva slučajna varijabla na $\mathbb{R}^n$ i $Y = AX + a$, $A \in gl_n(\mathbb{R})$ i $a \in \mathbb{R}^n$. Tada se Y zove **opća Cauchyjeva slučajna varijabla u** $\mathbb{R}^n$, a njezina distribucija μ se **zove opća Cauchyjeva mjera**

na $\mathbb{R}^n$. Ako je $\det A \neq 0$ onda opća Cauchyjeva mjera ima gustoću, a ako je $A \neq 0$ i $\det A = 0$ onda je ona singularna. Nadalje, vrijedi

$$\hat{\mu}(x) = \exp(i\,(a|x) - \|A^\tau x\|),\ x \in \mathbb{R}^n$$

Zamijetimo da $\hat{\mu}$ nije derivabilna u nuli, za $A \neq 0$, pa Y nema srednje vrijednosti niti disperzije.

5.5 Zakoni velikih brojeva

DEFINICIJA 5.50 (1) *Kažemo da niz* (μ_k) *u* $M(\mathbb{R}^n)$ ***konvergira slabo prema*** $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *i pišemo* $\mu_k \to \mu$ *ako* $\int f d\mu_k \to \int f d\mu$, *za svaku funkciju* $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

(2) *Neka su* X, X_k, $k \geq 1$, *slučajne varijable u* $\mathbb{R}^n$ *s distribucijama* μ, μ_k, $k \geq 1$. *Kažemo da niz* (X_k) ***konvergira po distribuciji prema*** X *i pišemo* $X_k \xrightarrow{D} X$ *ako* $\mu_k \to \mu$. *Kažemo da* (X_k) ***konvergira prema*** X ***po vjerojatnosti*** *i pišemo* $X_k \xrightarrow{P} X$ *ako* $P(\|X_k - X\| \geq \varepsilon) \to 0$, *za svaki* $\varepsilon > 0$.

PRIMJERI 5.51

(1) Neka je (a_k) niz u $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Tada $\delta_{a_k} \to \delta_a$ ako i samo ako $a_k \to a$. Naime $\int f d\delta_{a_k} \to \int f d\delta_a$ ako i samo ako $f(a_k) \to f(a)$, za svaki $f \in C(\mathbb{R}^n)$, što je ekvivalentno sa $a_k \to a$.
(2) Neka je μ uniformna mjera na $[0,1] \subset \mathbb{R}$ i μ_k niz diskretnih mjera definiranih sa $\mu_k = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} \delta_{\frac{m}{k}}$. Ako je $f \in C(\mathbb{R})$, onda je

$$\int f d\mu = \int_0^1 f(x)dx = \lim \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} f(\tfrac{m}{k})$$

Naime, ovo je Riemannova integralna suma pa je integral jednak limesu Riemannovih suma. Dakle, $\int f d\mu_k \to \int f d\mu$, $f \in C(\mathbb{R})$, pa $\mu_k \to \mu$.
(3) Svaka mjera $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ je slabi limes nekog niza diskretnih mjera s konačnim nosačem. Naime, neka je $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ i $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Tada po definiciji integrala zaključujemo da je

$$\int f d\mu = \lim_k \sum_{m=1}^{k} f(a_{km})\mu(E_{km})$$

gdje su $E_{km} \in B(\mathbb{R}^n)$ i $a_{km} \in \mathbb{R}^n$ pogodno odabrani. Ako stavimo $\mu_k = \sum_{m=1}^{k} \mu(E_{km})\delta_{a_{km}}$ onda $\mu_k \to \mu$.

(4) Ako su $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ onda sa $d(\mu, \nu)$ označimo infimum svih $\varepsilon > 0$ takvih da za svaki zatvoreni $A \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\mu(A) \leq \nu(A_\varepsilon) + \varepsilon, \quad \nu(A) \leq \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon$$

gdje je $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, A) \leq \varepsilon\}$. Tada je d metrika na $M(\mathbb{R}^n)$ i zovemo je **Prohorovljeva metrika** na $M(\mathbb{R}^n)$. Može se dokazati da vrijedi:

(a) $(M(\mathbb{R}^n), d)$ je potpun separabilan metrički prostor.

(b) $\mu_k \to \mu$ ako i samo ako $d(\mu_k, \mu) \to 0$.

(5) Niz vjerojatnostnih mjera (μ_k) na $\mathbb{R}^n$ konvergira slabo prema vjerojatnosti μ na $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako pripadne funkcije distribucije $F_k(x) \to F(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ u kojem je funkcija F neprekidna.

(6) Neka su X, X_k slučajne varijable u $\mathbb{R}^n$. Ako $X_k \xrightarrow{P} X$ onda $X_k \xrightarrow{D} X$. Ako je $X = a$ *s.s.* onda vrijedi i obrat.

Naime, ako su μ, μ_k pripadne distribucije i $f \in C(\mathbb{R}^n)$ onda je

$$\begin{aligned} |\int f d\mu_k - \int f d\mu| &= |\int (f(X_k) - f(X)) dP| \\ &\leq \int |f(X_k) - f(X)|\, dP \\ &\leq \omega(f, \varepsilon) + 2\,\|f\|\, P(\|X_k - X\| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

gdje je $\omega(f, \varepsilon) = \max\{|f(x) - f(y)|\,; \|x - y\| < \varepsilon\}$ i $\omega(f, \varepsilon) \to 0$, za $\varepsilon \to 0$.

(7) Neka su X, X_k slučajne varijable u $\mathbb{R}^n$. Ako $X_k \xrightarrow{D} X$ onda $f(X_k) \xrightarrow{D} f(X)$ za svaku neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

TEOREM 5.52 (Teorem neprekidnosti)

Neka su $\mu, \mu_k \in M(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Tada $\mu_k \to \mu$ ako i samo ako $\hat{\mu}_k \to \hat{\mu}$ uniformno po kompaktima na $\mathbb{R}^n$.

Dokaz Bez dokaza.

NAPOMENA 5.53 Neka je (X_k) niz nezavisnih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}^n$, (a_k) niz u $\mathbb{R}^n$ i

$$Y_k = \tfrac{1}{k}(X_1 + \cdots + X_k) - a_k$$

Po tradiciji se svaka tvrdnja tipa "$Y_k \xrightarrow{P} a$" zove **zakon velikih brojeva** ili preciznije **slabi zakon velikih brojeva**, dok se tvrdnja "$Y_k \to a$ *s.s.*" zove **jaki zakon velikih brojeva**. Jedan od prvih važnih teorema u vjerojatnosti je Bernoullijev slabi zakon velikih brojeva, dokazan 1715. godine, koji tvrdi slijedeće: Ako je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vjerojatnostni prostor, $A \in \mathcal{A}$ i ako se eksperiment ponavlja nezavisno n puta, pri čemu se A dogodi S_n puta, onda $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} P(A)$. Ovu tvrdnju je pojačao Borel 1909 godine ustvrdivši da $\frac{1}{n}S_n \to P(A)$ *s.s.* Ovo se od tada zove Borelov jaki zakon velikih brojeva. Do sada je dokazano mnogo tvrdnja ovog tipa u $\mathbb{R}^n$ te u Banachovim i Hilbertovim prostorima. Mi smo već prije naveli neke tvrdnje ovog tipa, a navest ćemo još neke popularne.

TEOREM 5.54 (Hinčinov slabi zakon velikih brojeva)
Neka je (X_k) niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}^n$, sa distribucijom μ, pri čemu μ ima srednju vrijednost $a = \int x d\mu(x)$. Tada $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \xrightarrow{P} a$, $k \to \infty$.

Dokaz Po Korolaru 5.47 je $\hat{\mu}$ klase C^1 pa je možemo razviti u Taylorov red oko nule do linearnog člana tj. $\hat{\mu}(x) = 1 + i(a|x) + \varepsilon(x)$, gdje je $|\varepsilon(x)| \leq c\|x\|^2$, za male $\|x\|$. Budući da su X_k nezavisne i jednako distribuirane Fourierova transformacija od $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$ je $\hat{\mu}(\frac{x}{k})^k$ pa imamo

$$\hat{\mu}(\tfrac{x}{k})^k = (1 + \tfrac{i(a|x)}{k} + \tfrac{*}{k^2})^k \to \exp(i(a|x)), \ k \to \infty$$

što po teoremu neprekidnosti povlači $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \xrightarrow{D} a$, pa primjenjujući 5.51, (6) dobijemo tvrdnju.

TEOREM 5.55 (Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva)
Neka je (X_n) niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}^n$. Tada niz $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$ konvergira s.s. ako i samo ako je X_1 integrabilna i u tom slučaju $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \to \mathbb{E}X_1$ s.s.

Dokaz Dokaz je dosta kompliciran pa ga ne navodimo.

KOROLAR 5.56 (Borelov jaki zakon velikih brojeva)
Ako je S_n binomijalna slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s parametrima n i p onda $\frac{1}{n}S_n \to p$ s.s.

Dokaz Neka je (X_n) niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}$ takvih da je $\mathbb{E}X_n = p$, za svaki $n \geq 1$. Tada je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ binomijalna slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s parametrima n i p pa tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema.

PRIMJERI 5.57

Koristeći zakone velikih brojeva možemo dokazati i neke neobične tvrdnje iz analize npr. izračunati neke komplicirane limese.
(1) Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je

$$\lim \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\tfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}) dx_1 \cdots dx_n = f(\tfrac{1}{2})$$

Ovo je teško dokazati izravno pa ćemo koristiti Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva. Neka je (X_n) niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}$ s distribucijom μ, gdje je μ uniformna mjera na $[0,1]$. Tada po prethodnom teoremu $\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\to\frac{1}{2}$ *s.s.* Ako stavimo

$$Y_n=f(\tfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n))$$

onda po teoremu o dominiranoj konvergenciji $\mathbb{E}Y_n\to\mathbb{E}f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$, a to je upravo naša tvrdnja.
(2) Neka je $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija, $\alpha>-1$, $\beta>-1$. Tada je

$$\lim\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\tfrac{x_1^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{x_1^\beta+\cdots+x_n^\beta})dx_1\cdots dx_n=f(\tfrac{\beta+1}{\alpha+1})$$

Ovo se dokazuje kao (1), pri čemu sada $\dfrac{X_1^\alpha+\cdots+X_n^\alpha}{X_1^\beta+\cdots+X_n^\beta}\to\frac{\beta+1}{\alpha+1}$ *s.s.*
(3) Ako je $f\in C(\mathbb{R})$ onda je

$$\lim\int\cdots\int f(\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2})d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_n)=f(\tfrac{a}{a^2+\sigma^2})$$

gdje je μ vjerojatnost na $\mathbb{R}$ sa srednjom vrijednosti a i disperzijom σ^2, $\sigma>0$.

Naime, neka je (X_n) niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}$ s distribucijom μ i $Y_n=(X_1+\cdots+X_n)/(X_1^2+\cdots+X_n^2)$. Tada

$$\begin{array}{lcl}\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)&\to&\mathbb{E}X_1=a\ \ s.s.,\\ \frac{1}{n}(X_1^2+\cdots+X_n^2)&\to&\mathbb{E}X_1^2=a^2+\sigma^2\ \ s.s.\end{array}$$

pa $Y_n\to\frac{a}{a^2+\sigma^2}$ *s.s.*, a onda $\mathbb{E}f(Y_n)\to f(\frac{a}{a^2+\sigma^2})$.
(4) (**Monte Carlo metoda u numerici**) Neka je $f:[0,1]\to[0,1]$ neprekidna funkcija. Tada se $\int_0^1 f(x)\,dx$ može numerički izračunati po sljedećoj metodi: uzmemo niz $(X_1,Y_1,X_2,Y_2,\ldots)$ nezavisnih slučajnih varijabla uniformno distribuiiranih na $[0,1]$ i definiramo novi niz (Z_n) sa: $Z_n=1$, ako je $f(X_n)>Y_n$, $Z_n=0$, ako je $f(X_n)\le Y_n$, $n\in\mathbb{N}$. Tada je (Z_n) niz nezavisnih jednako distribuiranih Bernoullijevih varijabla. Nadalje

$$\mathbb{E}\mathbb{Z}_1=P(f(X_1)>Y_1)=\int_0^1(\int_0^{f(x)}dy)dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$

Sada zaključujemo da $\frac{1}{n}(Z_1+\cdots+Z_n)\to\int_0^1 f(x)\,dx$ *s.s.* Dakle, da bismo numerički izračunali ovaj integral trebamo generirati slučajne brojeve X_n,Y_n, $n\in\mathbb{N}$, iz $[0,1]$, pa je integral približno jednak $\frac{1}{n}(Z_1+\cdots+Z_n)$, za velike $n\in\mathbb{N}$. Ovu metodu izračunavanja integrala generiranjem slučajnih brojeva iz $[0,1]$ zovemo **Monte Carlo metoda.**

(5) Neka je X slučajni uzorak duljine n iz populacije sa svojstvom μ, pri čemu μ ima funkciju distribucije F. Za $A \in B(\mathbb{R})$ definiramo slučajnu varijablu $M_n(A)$ sa

$$M_n(A) = \tfrac{1}{n}(\chi_A(X_1) + \cdots + \chi_A(X_n)) = \tfrac{1}{n}(\chi_{(X_1 \in A)} + \cdots + \chi_{(X_n \in A)})$$

Tada je $\mathbb{E}M_n(A) = \mu(A)$, $n \in \mathbb{N}$, i slučajna varijabla $nM_n(A)$ ima binomijalnu distribuciju s parametrima n i $p = \mu(A)$ pa po Borelovom jakom zakonu $M_n(A) \to \mu(A)$ *s.s.*

Funkcija M_n se zove **empirijska distribucija od** X i pišemo

$$M_n = \tfrac{1}{n}(\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_n})$$

Ona je primjer tzv. **slučajne mjere** tj. σ-aditivne funkcije definirane na $B(\mathbb{R})$ s vrijednostima u $L_1(\Omega, P)$. Kažemo da je μ srednja vrijednost od M_n. Ako je $F_n(x) = M_n((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, onda se F_n zove **empirijska funkcija distribucije od** X. Za nju vrijedi $F_n(x) = \frac{\tau(x)}{n}$, gdje je $\tau(x) = |\{i; X_i \leq x\}|$. Nadalje, po Borelovom jakom zakonu $F_n(x) \to F(x)$ *s.s.*, $x \in \mathbb{R}$. Tvrdnja se može pojačati: $F_n(x) \to F(x)$ *s.s.*, uniformno po $x \in \mathbb{R}$ tj.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0 \quad s.s.$$

Ova pojačana tvrdnja se zove **fundamentalni teorem statistike**. Dokaz nije kompliciran, ali ga mi ipak ne navodimo.

(6) Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}$ takav da je

$$P(X_n = 1) = p_n, \; P(X_n = 0) = 1 - p_n, \; n \in \mathbb{N}$$

Tada $X_n \xrightarrow{P} 0$ ako i samo ako $p_n \to 0$, dok $X_n \to 0$ *s.s.* ako i samo ako vrijedi $\sum p_n < \infty$.

(7) Neka je (X_n) niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}$ s distribucijom $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Tada se (X_n) zove **Rademacherov niz**. Ako je (X_n) Rademacherov niz i (a_n) niz u $\mathbb{R}$ onda $\sum a_n X_n$ konvergira *s.s.* ako i samo ako $\sum a_n^2 < \infty$, što slijedi iz teorema neprekidnosti.

(8) Neka je (X_n) niz nezavisnih standardnih Gaussovih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}$. Tada se (X_n) zove **Gaussov niz**. Ako je (X_n) Gaussov niz i (a_n) niz u $\mathbb{R}$ onda $\sum a_n X_n$ konvergira *s.s.* ako i samo ako $\sum a_n^2 < \infty$. U tom slučaju je $\sum a_n X_n = X$ Gaussova i $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{D}X = \sum a_n^2$, što slijedi iz teorema neprekidnosti.

(9) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable u $\mathbb{R}$, $m \leq n$, $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija i

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \!\!\cdots\!\! \sum \phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$$

Tada se U_n zove U-**statistika slučajnog uzorka** X **s jezgrom** ϕ. Primjeri U-statistika su slijedeći:

(a) $U_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \overline{X}, \ \phi(x) = x, \ m = 1$

(b) $U_n = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2(X), \ \phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2, \ m = 2$

(c) $U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum\sum\limits_{1 \le i < j \le n} |X_i - X_j|, \ \phi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \ m = 2$

Neke tvrdnje ovog poglavlja se mogu poopćiti na U-statistike npr. ako je $m = 2$ i $\mathbb{E}\,|\phi(X_1, X_2)| < \infty$ onda $U_n \to \mathbb{E}\phi(X_1, X_2)$ *s.s.*, što je tvrdnja tipa Kolmogorovljeva zakona.

(10) Kako konstruirati **Gaussove slučajne uzorke i njihove statistike**? Razmotrimo vjerojatnostni prostor $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \gamma_n)$, gdje je γ_n standardna Gaussova mjera na $\mathbb{R}^n$. Tada je identiteta $x \mapsto x$ na $\mathbb{R}^n$, **standardni Gaussov slučajni uzorak duljine** n, zbog

$$(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \gamma_n) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \gamma_1)^n$$

Prema tome, svaka izmjeriva funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **statistika standardnog Gaussovog uzorka**! Nama su najzanimljivije one **statistike koje imaju disperziju** tj. $f \in L_2(\gamma_n)$. Navedimo neke primjere:

(a) Neka je $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ i $H_\omega(x) = H_{\omega_1}(x_1) \cdots H_{\omega_n}(x_n)$, gdje je

$$H_k(t) = \int (t + is)^k \, d\gamma_1(s)$$

Hermiteov polinom. Tada je H_ω polinom od n varijabla i $H_\omega \in L_2(\gamma_n)$. Budući da je

$$(H_\omega | H_\eta) = 0, \ \omega \neq \eta; \ \ (H_\omega | H_\omega) = \omega!$$

zaključujemo da je $\{H_\omega; \omega \in \mathbb{N}_0^n\}$ ortogonalni skup u $L_2(\gamma_n)$. On je također i ortogonalna baza.

(b) Ako je $H_m(\gamma_n)$ podprostor od $L_2(\gamma_n)$ generiran svom polinomima H_ω za koje vrijedi $|\omega| = m$ onda je

$$\dim H_m(\gamma_n) = \binom{m+n-1}{m}$$

i $L_2(\gamma_n)$ je ortogonalna suma potprostora $H_m(\gamma_n)$ tj.

$$L_2(\gamma_n) = \sum_{m \ge 0} H_m(\gamma_n)$$

što znači da se svaki $f \in L_2(\gamma_n)$ može zapisati, na jedinstven način, u obliku $f = \sum f_m$, gdje je $f_m \in H_m(\gamma_n)$, te je

$$(f|f) = \sum_{m \ge 0} (f_m | f_m)$$

(c) Ako je $a \in \mathbb{R}^n$ i $a^*(x) = (a|x)$ onda je $a^* \in L_2(\gamma_n)$ i $(a^*|b^*) = (a|b)$.
(d) Ako je je $h_\omega(x) = x^\omega = x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n}$ onda je

$$a^{*k} = \sum_{|\omega|=k} \tfrac{k!}{\omega!} a^\omega h_\omega$$

(e) Ako je $\xi(a) = \exp[a^* - \frac{1}{2}(a|a)]$ onda je $\xi(a) \in L_2(\gamma_n)$ i

$$(\xi(a)|\xi(b)) = \exp(a|b)$$

(f) $\xi(a)\xi(b) = \xi(a+b)\exp(a|b)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$
(g) Vrijedi formula

$$\xi(a) = \sum_{m \geq 0} \tfrac{1}{m!} H_m(a^*)$$

gdje je $H_m(a^*)$ Hermiteov polinom tj.

$$H_m(a^*)(x) = H_m((a|x)) = \int ((a|x) + i(a|y))^m \, d\gamma_n(y)$$

(h) Za svaki $m \geq 1$ je $H_m(a^*) \in H_m(\gamma_n)$ i

$$H_m(a^*) = \sum_{|\omega|=m} \tfrac{m!}{\omega!} a^\omega H_\omega$$

(i) $(H_m(a^*)|H_m(b^*)) = m!(a|b)^m$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.
(j) Za svaki $a \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\xi(a) = \sum_{\omega} \tfrac{1}{\omega!} a^\omega H_\omega$$

(11) Neka je $\Omega = [0,1]$, P uniformna mjera na $[0,1]$ i $\varepsilon_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varepsilon_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t), \; n \in \mathbb{N}$$

Tada je (ε_n) Rademacherov niz. Ako je $\sum \alpha_n^2 < \infty$ i $f = \sum \alpha_n \varepsilon_n$ onda je Fourierova transformacija slučajne varijable f dana sa

$$\varphi_f(t) = \mathbb{E}\exp(itf) = \prod_{n \geq 1} \varphi_{\varepsilon_n}(\alpha_n t) = \prod_{n \geq 1} \cos \alpha_n t$$

Specijalno, za $\alpha_n = 2^{-n}$ imamo

$$\prod_{n \geq 1} \cos \tfrac{t}{2^n} = \tfrac{\sin t}{t}$$

pa vidimo da $f = \sum 2^{-n} \varepsilon_n$ ima uniformnu distribuciju na $[-1, 1]$.
(12) Rademacherov niz (ε_n) je ortonormiran u $L_2([0,1])$, ali ne čini bazu. Sada definiramo **Walshov niz** (w_n) sa: $w_n = \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_k}$, gdje su $r_1, \ldots, r_k$ definirani sa

$$2n = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_k}, \; r_1 > \cdots > r_k > 0$$

Tada su w_n i w_m nezavisne, za $n \neq m$. Nadalje, $\{1, w_1, w_2, \ldots\}$ je ortonormirana baza u $L_2([0,1])$. Walshov niz se koristi u **teoriji kodiranja**. On nije niz nezavisnih slučajnih varijabla, iako su svake dvije od njih nezavisne!

5.6 Centralni granični teorem

TEOREM 5.58 (Lévyjev centralni granični teorem)

Neka je (X_k) niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabla u $\mathbb{R}^n$ sa distribucijom μ, pri čemu μ ima srednju vrijednost a i disperziju A. Tada

$$\tfrac{1}{\sqrt{k}}(X_1 + \cdots + X_k - ka) \xrightarrow{D} X$$

gdje je X opća Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ sa srednjom vrijednosti 0 i disperzijom A.

Dokaz Budući da je $\hat{\mu}$ klase C^2 možemo je razviti u Taylorov red oko nule do kvadratnog člana pa dobijemo

$$\hat{\mu}\,(x) = 1 + i\,(a|x) - \tfrac{1}{2}\,(Ax|x) + \varepsilon\,(x)\,, \quad |\varepsilon\,(x)| \leq c\,\|x\|^3$$

Fourierova transformacija od $\frac{1}{\sqrt{k}}(\sum_{i=1}^{k} X_i - ka)$ je dana sa

$$[\hat{\mu}(\tfrac{x}{\sqrt{k}})\exp(-\tfrac{1}{\sqrt{k}}i\,(a|x))]^k = (1 - \tfrac{1}{2k}\,(Ax|x) + \tfrac{*}{k^{3/2}})^k \to \exp(-\tfrac{1}{2}\,(Ax|x))$$

što po teoremu neprekidnosti povlači našu tvrdnju.

KOROLAR 5.59 *Neka vrijede uvjeti prethodnog teorema. Ako je A regularna matrica onda*

$$\tfrac{1}{\sqrt{k}}A^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_k - ka) \xrightarrow{D} X$$

gdje je X standardna Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$.

KOROLAR 5.60 (De Moivre-Laplace)

Neka je S_k binomijalna slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s parametrima p i k, pri čemu je $0 < p < 1$. Tada

$$\tfrac{1}{(kp(1-p))^{1/2}}(S_k - kp) \xrightarrow{D} X$$

gdje je X standardna Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$.

Dokaz Neka su X_k, $k \geq 1$, nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable u $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}X_k = p$, $\mathbb{D}X_k = p(1-p)$. Tada je $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ binomijalna s parametrima p i k pa tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara.

KOROLAR 5.61 *Neka je S_k χ^2-slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ s k stupnjeva slobode i X standardna Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$. Tada*

$$\tfrac{1}{\sqrt{2k}}\,(S_k - k) \xrightarrow{D} X$$

Dokaz Neka su X_k, $k \geq 1$, nezavisne χ^2-slučajne varijable u $\mathbb{R}$ sa jednim stupnjem slobode. Tada je $\mathbb{E}X_k = 1$, $\mathbb{D}X_k = 2$, i vrijedi $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ pa tvrdnja slijedi iz 5.59

TEOREM 5.62 (Poisson)

Neka je X_k, $k \geq 1$, binomijalna slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ sa parametrima k i p_k, pri čemu je $\lim kp_k = \lambda > 0$. Tada $X_k \xrightarrow{D} X$, gdje je X Poissonova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ sa parametrom λ.

Dokaz $\varphi_{X_k}(t) = (1 - p_k + p_k e^{it})^k = (1 + \frac{kp_k}{k}(e^{it} - 1))^k \to \exp(\lambda(e^{it} - 1))$ pa tvrdnja slijedi po teoremu neprekidnosti.

PRIMJERI 5.63 (**Brownovo gibanje**)

(1) Neka je $I = [0,1]$, μ uniformna mjera na I i $L_2(I) = L_2(I,\mu)$. Uvedimo slijedeće oznake:

(a) $\alpha_n = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}$, $n \geq 1$

(b) $e_n(t) = \sqrt{2}\sin(n - \frac{1}{2})\pi t$, $\overline{e_n}(t) = \sqrt{2}\cos(n - \frac{1}{2})\pi t$, $n \geq 1$

(c) $V : L_2(I) \to L_2(I)$, $Vf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$

Tada se operator V se zove **operator neodređenog integrala na** $L_2(I)$ i vrijede sljedeće tvrdnje:

(d) $\sum \alpha_n = \frac{1}{2}$

(e) (e_n) i $(\overline{e_n})$ su ortnormirane baze od $L_2(I)$

(f) $V^*f(t) = \int_t^1 f(s)\,ds$ je **adjungirani operator od** V

(2) Vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $VV^*f(t) = \int_0^1 \min(t,s) f(s)\,ds$

(b) $V^*Vf(t) = \int_0^1 (1 - \max(t,s)) f(s)\,ds$

(c) $\min(t,s) = \sum \alpha_n e_n(s) e_n(t)$

(d) $1 - \max(t,s) = \sum \alpha_n \overline{e_n}(s)\overline{e_n}(t)$

pri čemu ova dva reda konvergiraju uniformno na $I \times I$.

(e) Ako je $f \in L_2(I)$ onda je

$$f = \sum (f|e_n)\, e_n = \sum (f|\overline{e_n})\, \overline{e_n}$$

pri čemu redovi konvergiraju u $L_2(I)$. Specijalno je

$$\chi_{[0,t]} = \sum \sqrt{\alpha_n} e_n(t)\, \overline{e_n},\ t \in I$$

(3) Neka je (X_n) Gaussov niz u $L_2(\Omega, P)$ tj. niz nezavisnih standardnih Gaussovih slučajnih varijabla i $J : L_2(I) \to L_2(\Omega, P)$ operator definiran sa

$$J(f) = \sum (f|\overline{e_n}) X_n$$

Tada je J injektivan i neprekidan linearni operator i vrijedi:
(a) $\mathbb{E}J(f) = 0$, $\mathbb{D}J(f) = (f|f)$
(b) $\mathbb{E}[J(f)\,J(g)] = (f|g)$, $f, g \in L_2(I)$
(4) Ako je $t \in I$ i $X_t = J(\chi_{[0,t]})$ onda je $X_t = \sum \sqrt{\alpha_n} e_n(t)\, X_n$ i vrijede sljedeće tvrnje:
(a) $\mathbb{E}X_t = 0$, $\mathbb{D}X_t = t$
(b) $\mathbb{E}X_t X_s = \min(t, s)$
(c) $\int_0^1 f(t) X_t dt = J(V^* f)$, $f \in L_2(I)$
(d) $\int_0^1 X_t^2 dt = \sum \alpha_n X_n^2 \in L_1(\Omega, P)$
(e) $\|X_t - X_s\|_2^2 = \mathbb{D}(X_t - X_s) = |t - s|$
(f) Ako je $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq 1$ onda je $(X_{t_2} - X_{t_1} | X_{t_3} - X_{t_2}) = 0$ što geometrijski znači da su tetive krivulje $t \mapsto X_t$, definirane s ove tri točke, okomite! Krivulju s ovim svojstvom zovemo **Wienerova spirala**.

Zamijetimo da je $t \mapsto \chi_{[0,t]}$ Wienerova spirala u $L_2(I)$, a $t \mapsto X_t$ Wienerova spirala u $L_2(\Omega, P)$. Lako je provjeriti da Wienerove spirale ne postoje u euklidskim prostorima, nego samo u beskonačno dimenzionalnim unitarnim prostorima.
(5) Krivulja $t \mapsto X_t$ nema derivacije niti u jednoj točki $t \in I$. Naime, limes od $(X_t - X_s)/(t - s)$, kad $t \to s$, u $L_2(\Omega, P)$ ne postoji niti u jednoj točki zbog

$$\|\tfrac{X_t - X_s}{t-s}\|_2 = |t - s|^{-1/2} \to \infty,\ t \to s$$

(6) Krivulja $t \mapsto X_t$ se zove **Brownovo gibanje** ili **Wienerov proces**. Nadalje, X_t je Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}X_t = 0$ i $\mathbb{D}X_t = t$.

Brownovo gibanje **ima nezavisne priraste** tj. ako je

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq 1,\ n \geq 2$$

onda su slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezavisne. Naime, one su nekorelirane po (4) pa su onda i nezavisne budući da su Gaussove.

Budući da je $X_0 = 0$ kažemo da Brownovo gibanje $t \mapsto X_t$ **starta iz** 0. Ako je $a \in L_2(I)$ onda se krivulja $t \mapsto Y_t = a + X_t$ također zove Brownovo gibanje. Za njega kažemo da **starta iz** a.
(7) Definiramo slučajnu varijablu $X : \Omega \to L_2(I)$ formulom

$$X(\omega) = \sum \sqrt{\alpha_n} X_n(\omega) e_n,\ \omega \in \Omega$$

Tada se distribucija $w = P_X = P \circ X^{-1}$ slučajne varijable $X = \sum \sqrt{\alpha_n} X_n e_n$ zove **Wienerova mjera na** $L_2(I)$. Za nju vrijedi:
(a) $\int x dw(x) = 0$
(b) $\int (a|x)(b|x) dw(x) = (Da|b)$, $a, b \in L_2(I)$, gdje je $D = VV^*$
(c) $\int \exp[i(a|x)] dw(x) = \exp(-\frac{1}{2}(Da|a))$, $a \in L_2(I)$

Naime, po teoremu o zamjeni varijable je

$$\int xdw(x) = \mathbb{E}X = \sum \sqrt{\alpha_n}\mathbb{E}X_n e_n = 0$$

Također po teoremu o zamjeni varijable dobijemo

$$\begin{aligned}\int (a|x)(b|x)dw(x) &= \mathbb{E}(a|X)(b|X) \\ &= \sum\sum \sqrt{\alpha_n}(a|e_n)\sqrt{\alpha_m}(b|e_m)\mathbb{E}X_nX_m \\ &= \sum \alpha_n(a|e_n)(b|e_n) = (Da|b)\end{aligned}$$

dok se (c) dokazuje analogno.

Wienerova mjera je primjer Borelove mjere na Hilbertovom prostoru $L_2(I)$. Kažemo da ona ima srednju vrijednost 0. Operator D se zove **disperzija Wienerove mjere**, a funkcija $\hat{w} : L_2(I) \to \mathbb{C}$,

$$\hat{w}(a) = \int \exp[i(a|x)]dw(x) = \exp(-\tfrac{1}{2}(Da|a))$$

se zove **Fourierova transformacija Wienerove mjere**.

(8) Uređena trojka $(L_2(I), B(L_2(I)), w)$ je vjerojatnostni prostor. Ako je $a \in L_2(I)$ i $Y : L_2(I) \to \mathbb{R}$, $Y(x) = (a|x)$, onda je Y Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}$ sa srednjom vrijednosti $\mathbb{E}Y = 0$ i disperzijom

$$\mathbb{D}Y = \sum \alpha_n(a|e_n)^2 = (Da|a)$$

Specijalno, za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbb{E}Y^{2n} = \int (a|x)^{2n}dw(x) = (2n-1)!! \cdot (Da|a)^n$$

(9) Ako su $a_1, \ldots, a_n \in L_2(I)$ i $Y : L_2(I) \to \mathbb{R}^n$, $Y(x) = \sum(a_i|x)e_i$, onda je Y opća Gaussova slučajna varijabla u $\mathbb{R}^n$ sa srednjom vrijednosti $\mathbb{E}Y = 0$ i disperzijom $\mathbb{D}Y = [(Da_i|a_j)] \in gl_n(\mathbb{R})$.