VIŠA MATEMATIKA, I

Nikica Uglešić

Sadržaj

PREDGOVOR **ix**

I VIŠA MATEMATIKA, I **1**

1 SKUPOVI. FUNKCIJE. REALNI BROJEVI. **3**

1.1 OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE 3
1.1.1 Logički sud 3
1.1.2 Operiranje sudovima 4
1.1.3 Vježbe 6
1.2 SKUPOVI I RELACIJE 6
1.2.1 Skup 6
1.2.2 Operiranje skupovima 7
1.2.3 Relacije 8
1.2.4 Vježbe 10
1.3 FUNKCIJE 11
1.3.1 Funkcija 11
1.3.2 Funkcijska kompozicija 12
1.3.3 Inverzna funkcija 13
1.3.4 Kardinalni broj 14
1.3.5 Vježbe 15
1.4 REALNI BROJEVI 16
1.4.1 Prirodni i cijeli brojevi 16
1.4.2 Racionalni brojevi 23
1.4.3 Apsolutna vrijednost realnog broja 29
1.4.4 Potenciranje 30
1.4.5 Kombinatoričke osnove 33
1.4.6 Vježbe 39
1.5 KOMPLEKSNI BROJEVI 41
1.5.1 Pojam i osnovne operacije 42
1.5.2 Geometrijski prikaz kompleksnog broja 43
1.5.3 Trigonometrijski zapis kompleksnog broja 44
1.5.4 Vježbe 46

2 LINEARNA ALGEBRA 49
2.1 MATRICE I DETERMINANTE 49
2.1.1 Matrica 49
2.1.2 Determinanta 53
2.1.3 Matričin rang 60
2.1.4 Rješavanje sustava linearnih jednadžaba 63
2.1.5 Vježbe 68
2.2 VEKTORSKA ALGEBRA 69
2.2.1 Usmjerena dužina i vektor 69
2.2.2 Vektor u provokutnom koordinatnom sustavu 73
2.2.3 Vektorska množenja 77
2.2.4 Vježbe 82
2.3 ANALITIČKA GEOMETRIJA 83
2.3.1 Pravac u prostoru i u ravnini 83
2.3.2 Ravnina u prostoru 85
2.3.3 Međuodnosi točaka, pravaca i ravnina 87
2.3.4 Neke krivulje i plohe 89
2.3.5 Polarni, cilindrični i sferni koordinatni sustavi 96
2.3.6 Vježbe 99

3 KONVERGENCIJA I NEPREKIDNOST 101
3.1 ELEMENTARNE FUNKCIJE 101
3.1.1 Zadavanje funkcija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ 101
3.1.2 Globalna svojstva realnih funkcija 104
3.1.3 Osnovne elementarne funkcije 106
3.1.4 Razredba elementarnih funkcija 112
3.1.5 Vježbe 114
3.2 KONVERGENCIJA NIZOVA I REDOVA 115
3.2.1 Niz realnih brojeva 115
3.2.2 Svojstva konvergentnih (pod)nizova 118
3.2.3 Red realnih brojeva 123
3.2.4 Nekoliko kriterija za konvergentnost realnog reda . . . 125
3.2.5 Funkcijski niz 129
3.2.6 Funkcijski red 131
3.2.7 Vježbe 133
3.3 NEPREKIDNE FUNKCIJE 135
3.3.1 Granična vrijednost u beskonačnosti 135
3.3.2 Granična vrijednost u točki 136
3.3.3 Neprekidnost 140
3.3.4 Svojstva neprekidne funkcije na segmentu 145
3.3.5 Vježbe 150

4 INFINITEZIMALNI RAČUN 151
4.1 DERIVACIJA 151
4.1.1 Derivabilnost i njezino značenje 151
4.1.2 Derivacije elementarnih funkcija 155
4.1.3 Diferencijal 160
4.1.4 Osnovni teoremi diferencijalnoga računa 164
4.1.5 Taylorova formula 168
4.1.6 Deriviranje funkcijskog reda 172
4.1.7 Određivanje funkcijskog tijeka 174
4.1.8 Vježbe 185

II VIŠA MATEMATIKA, II 187
4.2 NEODREĐENI INTEGRAL 190
4.2.1 Pojam i osnovna svojstva neodređenog integrala . . . 190
4.2.2 Osnovne integracijske metode. 194
4.2.3 Integriranje nekih elementarnih funkcija 197
4.2.4 Integriranje funkcijskog reda 203
4.2.5 Vježbe 205
4.3 ODREĐENI INTEGRAL 205
4.3.1 Pojam i osnovna svojstva određenog integrala 206
4.3.2 Neki približni integracijski postupci. 214
4.3.3 Nepravi integral 219
4.3.4 Nekoliko primjena određenog integrala 223
4.3.5 Vježbe. 232

5 FUNKCIJA VIŠE VARIJABLA 235
5.1 FUNKCIJE IZ $\mathbb{R}^m$ U $\mathbb{R}$ 235
5.1.1 Zadavanje skalarnih funkcija 235
5.1.2 Granična vrijednost i neprekidnost 238
5.1.3 Vježbe 243
5.2 DIFERENCIRANJE SKALARNIH FUNKCIJA 244
5.2.1 Parcijalne derivacije 244
5.2.2 Diferencijal 246
5.2.3 Parcijalne derivacije viših redova 252
5.2.4 Egzaktna diferencijalna forma 257
5.2.5 Taylorova formula 259
5.2.6 Lokalne ekstremne vrijednosti 262
5.2.7 Obstojnost implicitne funkcije 266
5.2.8 Vježbe 269
5.3 INTEGRIRANJE SKALARNIH FUNKCIJA 271
5.3.1 Višestruki integral 271
5.3.2 Izračunavanje i primjena višestrukog integrala 273
5.3.3 Integral ovisan o parametru 279

5.3.4 Vježbe 284

6 UVOD U VEKTORSKU ANALIZU 287
6.1 VEKTORSKE FUNKCIJE 287
6.1.1 Neprekidnost vektorske funkcije 287
6.1.2 Diferencijabilnost vektorske funkcije 289
6.1.3 Integral vektorske funkcije jedne varijable 293
6.1.4 Vježbe 294
6.2 UVOD U TEORIJU O POLJIMA 295
6.2.1 Skalarno i vektorsko polje 295
6.2.2 Gradijent, divergencija i rotacija 298
6.2.3 Usmjerena derivacija 302
6.2.4 Neka posebna vektorska polja 305
6.2.5 Vježbe 309
6.3 KRIVULJNI INTEGRAL 309
6.3.1 Krivulja i njezino usmjerenje 309
6.3.2 Krivuljni integral prve vrste 311
6.3.3 Krivuljni integral druge vrste 313
6.3.4 Krivuljni integral u potencijalnom polju 316
6.3.5 Greenova formula 319
6.3.6 Vježbe 322
6.4 PLOŠNI INTEGRAL 323
6.4.1 Glatka ploha i njezina ploština 323
6.4.2 Plošni integral prve vrste 326
6.4.3 Plošni integral druge vrste 328
6.4.4 Ostrogradski-Gaussova formula 332
6.4.5 Stokesova formula 334
6.4.6 Vježbe 337

7 OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 339
7.1 RJEŠENJE - OBSTOJNOST I JEDINSTVENOST 339
7.1.1 O diferencijalnim jednadžbama općenito 339
7.1.2 Picardov teorem 341
7.1.3 Vježbe 346
7.2 DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOGA REDA 347
7.2.1 Diferencijalna jednadžba s odjeljivim varijablama . . . 348
7.2.2 Homogena diferencijalna jednadžba 350
7.2.3 Linearna diferencijalna jednadžba 351
7.2.4 Egzaktna diferencijalna jednadžba 352
7.2.5 Sustav od dviju običnih diferencijalnih jednadžaba . . 354
7.2.6 Vježbe 354
7.3 DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOGA REDA . . . 355
7.3.1 Diferencijalna jednadžba $F(x, y', y'') = 0$ 355
7.3.2 Diferencijalna jednadžba $F(y, y', y'') = 0$ 356

7.3.3 Homogena diferencijalna jednadžba 357
7.3.4 Linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima 357
7.3.5 Vježbe 363

PREDGOVOR

Ova skripta sadrže matematičko gradivo što ga obuhvaća predmet pod uobičajenim nazivom **Viša matematika, I**, a predaje se kao temeljni matematički predmet na svim tehničkim, tehnološkim i srodnim fakultetima. Skripta su pisana matematički dostatno strogo da mogu poslužiti i kao udžbenik za predmet Matematička analiza, I, na na Prirodoslovno-matematičkim fakultetima. (Pritom se ispušta II. poglavlje.) Radi se, dakako, o analizi realnih funkcija jedne realne varijable.

Gradivo se dijeli na tri velike cjeline - poglavlja: Skupovi. Funkcije. Realni brojevi; Uvod u linearnu algebru i analitičku geometriju; Konvergencija i neprekidnost;Infinitezimalni račun (ovdje je samo njegov prvi odjeljak: Diferencijalni račun).Svako se poglavlje dalje dijeli na glavne teme - odjeljke, a ovi opet na osnovne tematske jedinice - pododjeljke. Označavanje prati poglavlja i odjeljke. Primjerice, Teorem 3.2.7 znači: sedmi teorem u drugomu odjeljku trećega poglavlja. Obradbu svake tematske jedinice prate odgovarajući primjeri, a svaki se odjeljak svršava pododjeljkom Vježbe sa zadacima za provjeru ispravne usvojenosti izloženoga gradiva. Tako ova skripta sadrže i malu ali netrivijalnu zbirku - vježbenicu. Na kraju skripata nalazi se detaljno Pojmovno kazalo.

Veliku zahvalnost dugujem dr. sc. Branku Červaru koji je narisao sve crteže i bitno poboljšao grafički izgled konačnoga teksta.

Prirodni nastavak ovih skripata jesu auktorova skripta Viša matematika, II, (započinju drugim odjeljkom četvrtoga poglavlja: Neodređeni integral; označavanje se nastavlja u skladu s prvim skriptama). Ona su, također, dostupna na "web-stranicama" Fakulteta prirodoslovno-matematičkih znanosti u Splitu. Unaprijed zahvaljujem svakom čitatelju koji će mi ukazati na neku pogrješku ili propust i predložiti ispravak ili poboljšanje.

U Splitu, mjeseca veljače, g. G. 2000.

Nikica Uglešić
[elektronička adresa: uglesic@mapmf.pmfst.hr]

Dio I

VIŠA MATEMATIKA, I

Poglavlje 1

SKUPOVI. FUNKCIJE. REALNI BROJEVI.

1.1 OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

1.1.1 Logički sud

Za sporazumijevanje i obavješćivanje rabimo, uglavnom, raznovrsne jezične rečenice. Za "strogo matematičko" komuniciranje ne trebaju čak ni sve izjavne rečenice (izreke). Ono što je ovdje neophodno jesu neke smislene izjave, odnosno, logički sudovi.

Definicija 1.1.1 ***Logički sud*** (*kraće i nadalje:* ***sud***) *je smislena izjavna rečenica podrediva načelu isključenja trećeg. Dakle, svaki sud ima točno jednu istinosnu vrijednost, tj. ili jest* ***istinit*** *ili* ***nije istinit****.* (*Za sud koji nije istinit kažemo i da je* ***neistinit*** *ili* ***lažan****.*)

Primjer 1.1.1 Koje od sljedećih rečenica (ni)su sudovi?
(a) Je li zrakoplov sletio?
(b) Jutro je pametnije od večeri.
(c) Brod je jedrenjak.
(d) Svaki brod je jedrenjak.
(e) Zemlja se vrti oko svoje osi.
(f) Umijte se!
(a) Nije, jer nije izjavna rečenica; (b) Nije, jer ta rečenica nema smisla (u doslovnom značenju uključenih riječi); (c) Nije, jer nije podrediva načelu isključenja trećeg - ne može joj se odrediti istinosna vrijednost, jer nije kazano o kojemu brodu je riječ; (d) Jest, i to lažan - ima brodova koji nisu jedrenjaci; (e) Jest, i to istinit; (f) Nije, jer nije izjavna rečenica.

Sudove ćemo označavati velikim (malo nagnutim) latinskim slovima A, B, C, ... Jednostavnosti radi, ako je sud A istinit pisat ćemo $\tau A = \top$ (i

čitati: tau a jest te), a ako je neistinit pisat ćemo $\tau A = \bot$ (i čitati: tau a nije te).

1.1.2 Operiranje sudovima

(i) **Konjunkcija.** Neka su A i B sudovi. Novi sud u oznaci $A \wedge B$ (čitamo: a i be) definiramo ovako: $\tau(A \wedge B) = \top$ točno onda kad je $\tau A = \top$ i $\tau B = \top$. Znakom $\wedge$ (čitamo: i) označenu logičku operaciju nazivamo **konjunkcijom**. Zgodno je pripadnu istinosnu vrijednost pregledno prikazati tzv. **tablicom istinosne vrijednosti**.

$\tau(A \wedge B)$:

$A \diagdown B$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

(ii) **Disjunkcija.** Neka su A i B sudovi. Novi sud u oznaci $A \vee B$ (čitamo: a ili be) definiramo ovako: $A \vee B$ je lažan točno onda kad su oba suda A i B lažna. ($\tau(A \vee B) = \bot$ čim je $\tau A = \bot$ i $\tau B = \bot$.) Operaciju označenu znakom $\vee$ (čitamo: ili) nazivamo (inkluzivnom, uključivom) **disjunkcijom**. Odgovarajuća tablica istinosne vrijednosti jest

$\tau(A \vee B)$:

$A \diagdown B$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

(iii) **Ekskluzivna disjunkcija.** Neka su A i B sudovi. Novi sud u oznaci $A \veebar B$ (čitamo: ili a ili be) definiramo ovako: $A \veebar B$ je istinit točno onda kad je jedan i samo jedan od sudova A, B listinit. (Za $A \veebar B$ se kaže i: Bilo A, bilo B, ali ne ob(a)oje.) Operaciju označenu znakom $\veebar$ (čitamo: ili - ili) nazivamo **ekskluzivnom (isključivom) disjunkcijom**. Pripadna tablica istinosne vrijednosti jest

$\tau(A \veebar B)$:

$A \diagdown B$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

(iv) **Implikacija.** Ako su A i B sudovi, onda $A \Rightarrow B$ (čitamo: a povlači be) označuje sud koji je lažan točno onda kad je sud A istinit, a sud B lažan. Znakom $\Rightarrow$ (čitamo: povlači; implicira) označenu operaciju nazivamo **implikacijom**. (Često se za $A \Rightarrow B$ kaže i: "Iz A slijedi B"; "A je nuždan uvjet za B"; "B je dovoljan uvjet za A".) Pripadna tablica istinosne vrijednosti jest

$\tau(A \Rightarrow B)$:

$A \diagdown B$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

(iv) **Ekvivalencija.** Ako su A i B sudovi, onda $A \Leftrightarrow B$ (čitamo: a vrijedi (jest) onda i samo onda ako be vrijedi (jest)) označuje sud koji je istinit točno onda kad oba suda A, B imaju istu istinosnu vrijednost. Znakom $\Leftrightarrow$ (čitamo: ekvivalentno) označenu operaciju nazivamo **ekvivalencijom**. (Često se za $A \Leftrightarrow B$ kaže i: "A je nuždan i dovoljan uvjet za B"; "A je ekvivalent(an)no B".) Pripadna tablica istinosne vrijednosti jest

$\tau(A \Leftrightarrow B)$:

$A \diagdown B$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

(v) **Negacija.** Neka je A sud. Novi sud pod oznakom $\neg A$ (čitamo: nije a) definiramo ovako: $\tau(\neg A) = \top$ točno onda kad je $\tau A = \bot$. Operaciju označenu znakom $\neg$ (čitamo: nije; non) nazivamo **negacijom**. Odgovarajuća tablica istinosne vrijednosti jest

$\tau(\neg A)$:

A	$\top$	$\bot$
$\neg A$	$\bot$	$\top$

Primjer 1.1.2 Izjavna rečenica "x se je rodio prije y" nije sud. Ona postaje sudom čim se za nepoznanice (varijable) x i y uvrste određene osobe. Tako, primjerice, za $x =$ Arhimed i $y =$ Gauss dobivamo istinit sud "Arhimed se je rodio prije Gaussa".

Definicija 1.1.2 *Izjavnu rečenicu koja sadrži jednu ili više nepoznanica i koja postaje sudom kad sve te nepoznanice poprime određene vrijednosti, nazivamo* ***otvorenom rečenicom*** *ili* (***logičkim***) ***predikatom****.*

Uobičajilo se odnos među nepoznanicama u predikatu označavati velikim slovom. Tako se predikat iz prethodnoga primjera označuje s $P(x, y)$, gdje je P odnos "se je rodio prije", a varijable x i y smiju biti bilo koje osobe (umrli ili tjelesno živi ljudi). Ponekad, jednostavnosti radi, oznaku odnosa među nepoznanicama rabimo i kao oznaku cijeloga predikata.

Ako je P predikat, onda je $(\forall x)P$ novi predikat: "Za svaki(o) x je P". Znak $\forall$ označuje neodređenu zamjenicu (za) **svaki(o)**, a nazivamo ga **univerzalnim kvantifikatorom**. Nadalje, ako je P predikat, onda je $(\exists x)P$ novi predikat: "Postoji x tak(av)o da je P". Znak $\exists$ označuje neodređenu zamjenicu (postoji) **neki(o)**, a nazivamo ga **egzistencijalnim kvantifikatorom**. Često se rabi i oznaka $(\exists! x)P$ za novi predikat: "Postoji točno jedan (tj. jedan i samo jedan) x tak(av)o da je P".

Napokon, definirajmo i **formulu** (predikatne algebre): To je svaki izraz $\mathcal{F}$ sastavljen, na logički dopustiv način, od sudove, predikata, kvantifikatora zagrada, znakova $\top$ i $\bot$ i operatora $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.

Reći ćemo da su dvije formule $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ **istovrijedne** ili **ekvivalentne** i pisati $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, ako je $\tau\mathcal{F} = \tau\mathcal{G}$ za svaki mogući izbor njihovih varijabla.

1.1.3 Vježbe

1. Dokazati da su sudovi (formule) $A \veebar B$ i $\neg(A \Leftrightarrow B)$ istovrijedni.
2. Popuniti tablicu istinosne vrijednosti tzv. *Shefferove operacije* $\uparrow$: Ako su A i B sudovi onda je $A \uparrow B$ sud istinit točno onda kad je barem jedan sudova A, B istinit. Usporediti sud $A \uparrow B$ sa sudom $\neg(A \wedge B)$.
3. Popuniti tablicu istinosne vrijednosti tzv. *Lukasiewiczeve operacije* $\downarrow$: Ako su A i B sudovi onda je $A \downarrow B$ sud istinit točno onda kad su oba suda A, B lažna. Usporediti sud $A \downarrow B$ sa sudom $\neg(A \vee B)$.
4. Provjeriti istovrijednost ovih formula:
(a) $\neg((\forall x)P(x)) = (\exists x)\neg P(x)$;
(b) $\neg((\exists x)\neg P(x)) = (\forall x)P(x)$.
5. Provjeriti je li identički istinita (dakle, **tautologija**, tj. istinita za svaku moguću vrijednost svojih varijabla) neka od ovih formula:
(a) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$;
(b) $(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$.

1.2 SKUPOVI I RELACIJE

1.2.1 Skup

Skup uzimamo za osnovni matematički pojam, dakle, ne definiramo ga, tj. ne svodimo na neke "jednostavnije" pojmove. (Njegova svojstva se zadaju aksiomatski - u što se ovdje ne ćemo upuštati.) Intuitivno smijemo tek zamišljati da "je skup objedinjenje bilo koje množine objekata - elemenata u jednu cjelinu".

Svaki skup je posve određen svojim članovima - **elementima**. Skupove ćemo označavati velikim (malo nagnutim) latinskim slovima S, A, X, $\cdots$, a njihove elemente malim "italik"-slovima s, a, x, $\cdots$. (Pazit ćemo da ne dođe do zabune pri označavanju skupova i sudova!) Ako je s element skupa S, pisat ćemo $s \in S$, a ako t nije element skupa S pisat ćemo $t \notin S$. Pretpostavljamo da su svi elementi danog skupa međusobno različiti, tj. da skup ne sadrži neki element u više primjeraka.

Skupovima smatramo i "množine koje ne sadrže nikakve objekte" - to su tzv. **prazni skupovi**. Za prazan skup smijemo, dakle, reći da je skup bez elemenata.

Skup S se često opisuje (zadaje) nekim svojstvom - predikatom P - koje se može primijeniti na neku množinu objekata. Tada se elementima od S smatraju svi promatrani objekti sa svojstvom P i piše se: $S = \{s \mid P(s)\}$ (čita se: S je skup svih elemenata s što imaju svojstvo P). Ako skup X "nema mnogo" elemenata, primjerice, ako su x, y, z, w svi elementi skupa X, onda pišemo $X = \{x, y, z, w\}$.

Definicija 1.2.1 *Reći ćemo da je Y* ***podskup*** *ili* ***dio*** *skupa X, oznaka: $Y \subseteq X$ (znak $\subseteq$ čitamo: je sadržan u), odnosno, da je X* ***nadskup*** *skupa*

Y, oznaka: $X \supseteq Y$ (znak $\supseteq$ čitamo: sadrži), ako je svaki element skupa Y ujedno element skupa X, tj. $y \in Y \Rightarrow y \in X$.

Primjerice, $\{y \mid y \text{ je pravokutnik}\} \subseteq \{x \mid x \text{ je paralelogram}\}$.

Reći ćemo da je skup Y **jednak** skupu X i pisati $Y = X$, ako je $Y \subseteq X$ i $Y \supseteq X$. U protivnom, reći ćemo da je skup Y različit od skupa X i pisati $Y \neq X$. Očigledno je $Y = X$ onda i samo onda ako je $X = Y$. Također, $Y \neq X \Leftrightarrow X \neq Y$.
Primijetimo da iz navedenih definicija izravno slijedi da je ("svaki") prazan skup podskup svakog skupa, te da je jedinstven. Uobičajena oznaka za prazni skup jest $\emptyset$.
Ako je ispunjeno $Y \subseteq X$ i $Y \neq X$, onda kažemo da je Y **pravi podskup** od X i ponekad to ističemo oznakama $Y \subsetneqq X$ ili $Y \subset X$.

Definicija 1.2.2 *Svakim skupom X je posve određen njegov tzv.* ***partitivni skup****, oznaka: 2^X (čitamo: dva na iks), elementi kojega su svi podskupovi od X.*

Na primjer, ako je $X = \{x, y, z\}$ onda je

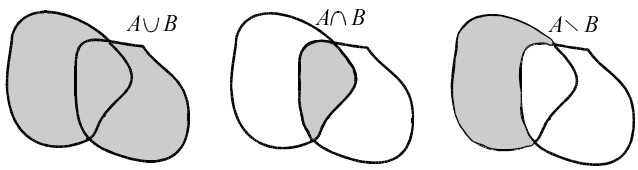
$$2^X = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X\}.$$

1.2.2 Operiranje skupovima

Definicija 1.2.3 *Neka je U skup i neka su A i B podskupovi od U. Pod* ***unijom*** *skupova A i B, oznaka: $A \bigcup B$, podrazumijevamo podskup $\{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$ skupa U.* ***Presjekom*** *skupova A i B, oznaka: $A \bigcap B$, smatramo podskup $\{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$ od U. Podskup $\{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ od U nazivamo* ***razlikom*** *skupa A od skupa B i označujemo s $A \setminus B$. Razliku $U \setminus A$ nazivamo* ***komplementom*** *skupa A (u skupu U) i, kad god ne može doći do zabune, označujemo s A^c.*

Ako je $A \bigcap B = \emptyset$, kažemo da su skupovi A i B **disjunktni** ili da se **ne sijeku**. U protivnom, tj. kad je $A \bigcap B \neq \emptyset$, govorimo da se skupovi A i B **sijeku**. Uniju disjunktnih skupova nazivamo **disjunktnom unijom**.

Donji crtež je jednostavna ilustracija upravo definiranih skupovnih operacija.



Unija, presjek i razlika.

Jednostavno je dokazati da su unija i presjek asocijativne operacije. To dopušta definirati uniju i presjek od više (od dva) skupova, te istražiti pripadne zakonitosti (v. §1.2.4 Vježbe).

1.2.3 Relacije

Dvočlane skupove, npr. $X = \{x, y\}$, obično nazivamo **parovima**. Dogovorimo li se da ćemo jednom elementu para, recimo x, dati "prvenstvo" pišući ga uvijek ispred onoga drugogoga - y, dobivamo **uređeni par** (x, y). Prema tomu, dok za parove vrijedi $\{x, y\} = \{y, x\}$, za uređene parove je $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$. Po dogovoru, uređenim parom smatramo i "par" (x, x).

Definicija 1.2.4 *Neka su X i Y neprazni skupovi.* ***Direktnim*** *(ili* ***Kartezijevim****)* ***produktom*** *skupa X skupom Y, u oznaci $X \times Y$, smatramo skup svih uređenih parova (x, y) elemenata $x \in X$ i $y \in Y$. Dakle, $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$. U slučaju $X = \emptyset \vee Y = \emptyset$ stavljamo $X \times Y = \emptyset$.*

Primijetimo da direktni produkt nije komutativan. Naime, iz definicije slijedi $X \times Y = Y \times X \Leftrightarrow X = Y$, kao i $(X \times Y) \bigcap (Y \times X) = (\neq)\emptyset \Leftrightarrow X \bigcap Y = (\neq)\emptyset$.

Posebice je važan direktni produkt skupa X samim sobom, tj $X \times X \equiv X^2 = \{(x, x') \mid x, x' \in X\}$.

Definicija 1.2.5 ***Binarnom relacijom*** *na skupu X smatramo svaki podskup $R \subseteq X \times X$. Ako je uređeni par $(x, x') \in R$, pišemo xRx' ili $R(x, x')$ i govorimo da je* ***element*** *x* ***u relaciji*** *R* ***s elementom*** *x'.*

Za čitateljevu vježbu neka bude, primjerice, X skup svih stanara neke zgrade, a R relacija na X zadana odnosom "biti mlađi". Ili, na istom skupu X, neka druga relacija R' bude zadana odnosom "stanovati na višem katu".

U našim će razmatranjima biti važne neke posebne binarne relacije.

Za binarnu relaciju R na skupu X kažemo da je **refleksivna**, ako je xRx za svaki $x \in X$; reći ćemo da je R **simetrična** ako, za svaki par $x, y \in X$, iz xRy slijedi yRx; reći ćemo da je R **tranzitivna** ako, za svaka tri elementa $x, y, z \in X$, iz $xRy \wedge yRz$ slijedi xRz. Binarnu relaciju R na skupu X koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna nazivamo **razredbenom** (ili **ekvivalencijskom** ili **klasifikacijskom**) relacijom i obično ju označujemo znakom $\sim$ (tilda). Za dva elemanta koji su u relaciji $\sim$ kažemo da su međusobno ekvivalentni. Primijetimo da se skup X na kojumu je zadana neka razredbena relacija $\sim$ cijepa na disjunktne podskupove, tzv. **razrede** (ili **razredbene klase**), tako da se X može prikazati, na jedinstven način, kao disjunktna unija tih razreda. U isti razred ulaze svi oni (i samo oni) elementi koji su međusobno ekvivalentni. Pripadni skup svih razreda označujemo s $X/_\sim$ i nazivamo **kvocijentnim skupom** (od X po $\sim$).

Primjer 1.2.1 Neka je X skup svih hrvatskih državljana do (uključivo) sto godina starosti, a relacija $\sim$ na X neka je zadana odnosom "imati jednako godina". Lako se provjeri da je $\sim$ razredbena relacija, pa je $X =$

$X_0 \bigcup \cdots \bigcup X_{100} \equiv \bigcup_{n=0}^{100} X_n$ unija disjunktnih razreda $X_0, X_1, \cdots, X_{100}$, gdje podskup X_n tvore svi hrvatski državljani koji imaju n godina (a nemaju $n+1$ godina). (Ovdje smo koristili pojam cijeloga broja i nekoliko pripadnih oznaka, što ćemo ih definirati u (pod)odjeljku §1.4.1 ovoga poglavlja.)

Vrlo važna vrsta binarne relacije R na skupu X jest i **relacija parcijalnog uređaja** $\leq$ (čitamo: manje ili jednako). To je svaka relacija koja je refleksivna, tranzitivna i **antisimetrična**, tj. za svaki par $x, y \in X$, iz $x \leq y \wedge y \leq x$ slijedi $x = y$.

Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$, rabit ćemo za to kraću oznaku $x < y$. Ponekad ćemo $x \leq y$ ($x < y$) zapisivati i kao $y \geq x$ ($y > x$).

Skup X na kojemu je zadana relacija parcijalnog uređaja $\leq$ nazivamo **parcijalno uređenim skupom** i označujemo s $(X, \leq)$. Ako relacija $\leq$ zadovoljava i uvjet: za svaki par $x, y \in X$ je $x \leq y$ ili $y \leq x$, onda kažemo da je $\leq$ relacija **potpunog** (ili **totalnog**) **uređaja** ili da je **uređajna relacija**, a $(X, \leq)$ tada nazivamo (**potpuno**) **uređenim skupom**.

Primijetimo da (razredbena) relacija $\sim$ iz Primjera 1.2.1 nije uređajna relacija. Neka je $\widetilde{X}$ skup svih razrednih predstavnika (iz svakoga razreda po jedan) kvocijentnoga skupa $X/_{\sim}$, pa definirajmo relaciju $\leq$ na $\widetilde{X}$ stavljajući $x \leq y$ onda i samo onda kad x nije stariji od y. Lako se provjeri da je tada $(\widetilde{X}, \leq)$ uređen skup.

Definicija 1.2.6 *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup i $A \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Reći ćemo da je element $m \in X$* ***donja međa*** *skupa A, ako je $m \leq a$ za svaki $a \in A$. Reći ćemo da skup A* ***omeđen odozdol****, ako postoji barem jedna donja međa od A. Kad je A omeđen odozdol, za donju među m od A ćemo reći da je* ***najveća donja međa*** *ili* ***infimum*** *skupa A, ako je $m' \leq m$ za svaku donju među m' od A.*

Tvrdnja 1.2.1 *Ako infimum skupa A postoji, onda je jedinstven.*

Dokaz. Kad bi postojala dva infimuma skupa A, recimo m_0 i m_1, moralo bi vrijeditti $m_0 \leq m_1$ i $m_1 \leq m_0$. Sada antisimetričnost relacije $\leq$ povlači $m_0 = m_1$. ■

Jedinstvenost infimuma od A u $(X, \leq)$ dopušta za njega posebnu oznaku - $\inf A$.

Ako donja međa $m \in X$ skupa A pripada skupu A, tj. $m \in A$, onda kažemo da je m **najmanji element** ili **minimum** skupa A. Slično Tvrdnji 1.2.1 vrijedi:

Tvrdnja 1.2.2 *Ako minimum skupa A postoji, onda je jedinstven, oznaka:* $\min A$, *i* $\min A = \inf A$.

Na posve sličan način se defniraju pojmovi **gornja međa**, **odozgor omeđen skup**, **najmanja gornja međa** ili **supremum** ($\sup A$), te **najveći element** ili **maksimum** ($\max A$) nepraznog podskupa A parcijalno

uređenog skupa $(X, \leq)$. Primjerice, gornja međa skupa A je svaki element $m \in X$ za koji je $a \leq m$, za svaki $a \in A$.

Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je **omeđen** čim je omeđen odozdol i omeđen odozgor.

Definirajmo, napokon, i ove važne podskupove parcijalno uređenog skupa $(X, \leq)$:

segment $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$;

interval $\langle a, b\rangle = \{x \in X \mid a < x < b\}$;

poluzatvoreni (slijeva i zdesna) **intervali** $[a, b\rangle = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$ i $\langle a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$.

Analogno se definiraju i podskupovi $[a, \cdot\rangle$, $\langle a, \cdot\rangle$, $\langle \cdot, b]$, $\langle \cdot, b\rangle$ od X. Primjerice, $[a, \cdot\rangle = \{x \in X \mid a \leq x\}$.

Ako je $Y \subseteq X$ i ako je parcijalni uređaj na Y nasljeđen od onoga na X (dakle, pripadna relacija $\leq_Y$ je presjek relacije $\leq$ s $Y \times Y$), onda za pripadne segmente, intervale, $\cdots$ na Y vrijedi: $[a, b]_Y = [a, b] \bigcap Y$, $\langle a, b\rangle_Y = \langle a, b\rangle \bigcap Y$, $\cdots$. Ovi će podskupovi doći do posebnog izražaja pri izgradnji i opisivanju skupa realnih brojeva.

Neka je $(X, \leq)$ uređen skup, a A i A' neka su podskupovi od X. Ako je, za svaki $x \in A$ i svaki $x' \in A'$, $x \leq x'$ $(x < x')$, pisat ćemo $A \leq A'$ $(A < A')$.

Definicija 1.2.7 *Neka je $(X, \leq)$ uređen skup.* ***Prerezom*** *u skupu X smatramo svaki podskup B (ekvivalentno, svaki uređeni par $(X \setminus B, B)$) za koji je ispunjeno:*

(i) $B \neq \emptyset \wedge B \neq X$;

(ii) $X \setminus B < B$;

(iii) *B nema najmanjega elementa.*

Prerezi će imati ključnu ulogu u konstrukciji iracionalnih brojeva.

1.2.4 Vježbe

1. Neka su A, B, C podskupovi skupa U. Dokazati sljedeće jednakosti:

(i) $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$; $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$;

(ii) $A \bigcup B = B \bigcup A$; $A \bigcap B = B \bigcap A$;

(iii) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap \cap (A \bigcup C)$;
$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;

(iv) $A \bigcup \emptyset = A$; $A \bigcap \emptyset = \emptyset$;

(v) $A \bigcup U = U$; $A \bigcap U = A$;

(vi) $A \bigcup A = A$; $A \bigcap A = A$;

(vii) $(A^c)^c = A$;

(viii) $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$; $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$.

2. Neka su $A_1, B_1 \subseteq X$ i $A_2, B_2 \subseteq X$. Dokazati da je

(i) $A_1 \times (A_2 \bigcup B_2) = (A_1 \times A_2) \bigcup (A_1 \times B_2)$;
$(A_1 \bigcup B_1) \times A_2 = (A_1 \times A_2) \bigcup (B_1 \times A_2)$;

(ii) $A_1 \times (A_2 \bigcap B_2) = (A_1 \times A_2) \bigcap (A_1 \times B_2)$;
$(A_1 \bigcap B_1) \times A_2 = (A_1 \times A_2) \bigcap (B_1 \times A_2)$.

3. Dokazati da je, za svaki skup X, relacija određena odnosom "biti podskup" ($\subseteq$) na partitivnom skupu 2^X jedna relacija parcijalnog uređaja.

4. Neka je $(X, \leq)$ (parcijalno) uređen skup. Je li presjek dvaju segmenata, intervala, $\cdots$ u X opet segment, interval, $\cdots$? Što se može reći o uniji i razlici dvaju segmenata, intervala, $\cdots$?

1.3 FUNKCIJE

1.3.1 Funkcija

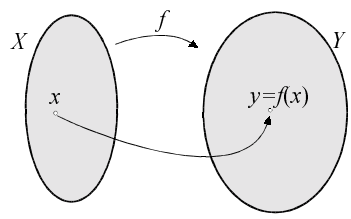
Funkcija jest jedan od najvažnijih matematičkih pojmova. Definirat ćemo ga sasvim općenito, tj. na skupovnoj razini.

Definicija 1.3.1 *Pod* ***funkcijom*** *podrazumijevamo svaki uređeni troslog* (X, f, Y)*, pri čemu su* X *i* Y *skupovi, a* f *je bilo koje pravilo po kojemu se svakom elementu* $x \in X$ *pridružuje točno jedan element* $y \in Y$*.*

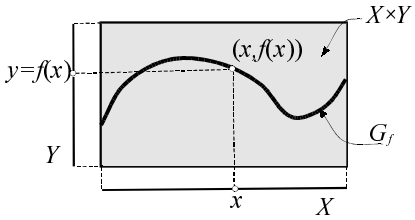
Uobičajeni zapis za funkciju (X, f, Y) jest $f : X \to Y$ ili $x \mapsto y = f(x)$ i pritom često kažemo da je f funkcija iz skupa X u skup Y. (Kad su u nekom razmatranju X i Y zadani i nepromjenjivi, često se, jednostavnosti radi, i samo pravilo f naziva funkcijom.)

Primijetimo da iz definicije izravno proizlazi $Y \neq \emptyset$, dok je $X = \emptyset$ moguće. (Dodatno možemo postulirati i "praznu funkciju" $X \to \emptyset$, premda nam taj pojam ovdje ne će trebati.)

Za danu funkciju $f : X \to Y$, skup X nazivamo **definicijskim područjem** (ili **domenom**, oznaka: D_f), skup Y **vrijednosnim područjem** (ili **kodomenom**, oznaka: R_f), a element $y = f(x)$ **vrijednošću** (na elementu x) funkcije f. Ponekad se kaže da je x **nezavisna varijabla** (ili **argument**), a y **zavisna varijabla** funkcije f. Slikovito se funkciju najčešće prikazuje kao na crtežu:



Funkcijin **graf** je skup $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$. Primjerice (slikovito):



Reći ćemo da je funkcija $f_1 : X_1 \to Y_1$ **jednaka** funkciji $f_2 : X_2 \to Y_2$ i pisati $f_1 = f_2$, ako je $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ i $f_1(x) = f_2(x)$ za svaki $x \in X_1 = X_2$. Očito, ako je $f_1 = f_2$ onda je i $f_2 = f_1$.

Istaknimo sada nekoliko važnih primjera:

1. Neka je $X \subseteq Y$, a $i : X \to Y$ neka je funkcija određena pravilom $(\forall x \in X)\ i(x) = x$. To je tzv. **inkluzija** (ili **ulaganje**) koju ćemo često označavati s $i : X \hookrightarrow Y$. Posebice, ako je $X = Y$ dobivamo tzv. **identičku funkciju** (ili **identitetu**) $1_Y : Y \to Y$, $1_Y(y) = y$. (Primijetimo da su, općenito, inkluzija i identiteta međusobno različite, jer su im domene različite.)

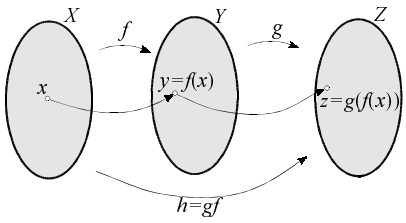
2. Neka su funkcije $p_X : X \times Y \to X$ i $p_Y : X \times Y \to Y$ definirane redom pravilima $p_X(x,y) = x$ i $p_Y(x,y) = y$, $(x,y) \in X \times Y$. To su tzv. **projekcije** iz direktnoga produkta $X \times Y$ na faktore X i Y redom.

3. Neka je U neprazan skup, a $X = 2^U$ partitivni skup od U. Tada su binarne operacije $\bigcup$, $\bigcap$ i $\setminus$ funkcije iz $X \times X$ u X. (Sasvim općenito, **binarna operacija** na skupu X je svaka funkcije iz $X \times X$ u X.)

1.3.2 Funkcijska kompozicija

Definicija 1.3.2 *Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Pod **kompozicijom** funkcije f s funkcijom g podrazumijevamo funkciju $h : X \to Z$ zadanu pravilom $h(x) = g(f(x))$ za svaki $x \in X$. Zapisujemo to kao $h = g \circ f$ ili kraće $h = gf$.*

Funkcijsku kompoziciju ilustrira sljedeći crtež:



Tvrdnja 1.3.1 *Funkcijska kompozicija je asocijativna, tj. ako su $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$ funkcije, onda je $h(gf) = (hg)f$.*

Dokaz. Za svaki $x \in X$ je $(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))) = (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x)$, dakle, $h(gf) = (hg)f$. ■

Tvrdnja 1.3.2 *Za svaku funkciju $f : X \to Y$ je $f1_X = f$ i $1_Y f = f$, gdje su 1_X i 1_Y pripadne identitete.* (Dokaz prepuštamo čitatelju.)

Neka su $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ (pod)skupovi i neka za funkcije $f' : X' \to Y'$ i $f : X \to Y$ vrijedi $(\forall x' \in X')$ $f'(x') = f(x')$. Tada kažemo da je f' **suženje** (ili **restrikcija**) funkcije f, odnosno, da je f **proširenje** (ili **ekstenzija**) funkcije f'. Ako je, posebice, $Y' = Y$ onda pišemo $f' = f\,|_{X'}$. Primijetimo da je, za svaku funkciju $f : X \to Y$, suženje na svaki podskup $X' \subseteq X$ jednoznačno određena tim podskupom. Međutim, analogna tvrdnja za proširenje nije istinita.

1.3.3 Inverzna funkcija

Definicija 1.3.3 *Neka su dani funkcija $f : X \to Y$ i podskupovi $A \subseteq X, B \subseteq Y$. **Slikom skupa** A po funkciji f smatramo skup $f[A] = \{y = f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$. U slučaju $A = X$ i $f[X] = \{y\}$ (jednočlan skup), funkciju f nazivamo **konstantnom funkcijom** (ili **konstantom**) u element $y \in Y$ i označujemo $f = c_y$, a u slučaju $f[X] = Y$ - **surjektivnom funkcijom** (ili **surjekcijom** ili preslikavanjem "**na**").*
***Obratnom slikom** (ili **originalom**) skupa B po funkciji f smatramo skup $f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\} \subseteq X$.* (Oprez! U oznaci $f^{-1}[B]$ dio f^{-1} *ne* označuje funkciju (iz Y u X). Ovaj f^{-1} se ipak može interpretirati kao funkcija, ali iz Y u 2^X, stavljajući $y \mapsto f^{-1}(y) = f^{-1}[\{y\}]$. Nama će, inače, u ovim predavanjima f^{-1} služiti za označavanje tzv. inverzne funkcije - v. Teorem 1.3.1.) *Ako je $(\forall y \in Y)$ $f^{-1}[\{y\}] = \{x\}$ jednočlan podskup od X, onda kažemo da je f **injektivna funkcija** (ili **injekcija** ili "**1-1**"-preslikavanje).*

Primjer 1.3.1 *Jednostavno je provjeriti da je svaka inkluzija $i : X \hookrightarrow Y$ injekcija, a svaka projekcija $p_X(p_Y) : X \times Y \to X(Y)$ surjekcija.*

Definicija 1.3.4 *Reći cemo da je funkcija $f : X \to Y$ **bijekcija** (ili **obostrano jednoznačna funkcija**), ako je f injekcija i surjekcija.*

Iz Definicije 1.3.3 izravno slijedi:
$f : X \to Y$ je injekcija $\Leftrightarrow ((\forall x, x' \in X) \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$;
$f : X \to Y$ je surjekcija $\Leftrightarrow ((\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad f(x) = y)$.
Ovo skupa s Definicijom 1.3.4 odmah povlači:
$f : X \to Y$ je bijekcija $\Leftrightarrow ((\forall y \in Y)(\exists! x \in X) \quad f(x) = y)$.

Teorem 1.3.1 *Funkcija $f : X \to Y$ je bijekcija onda i samo onda, ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da je $gf = 1_X$ i $fg = 1_Y$. Funkcija g je, također, bijekcija, jedinstvena je, a nazivamo ju **inverznom funkcijom** funkcije f i označujemo s f^{-1}.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ bijekcija. Budući da tada za svaki $x \in X$ postoji točno jedan $y \in Y$ za koji je $f(x) = y$, moguće je definirati funkciju $g : Y \to X$ pravilom $g(y) = x$ čim je $y = f(x)$. Za kompozicije dobivamo: $gf(x) = g(y) = x = 1_X(x)$, za svaki $x \in X$, i $fg(y) = f(x) = y = 1_Y(y)$, za svaki $y \in Y$. Obratno, neka za $f : X \to Y$ postoji $g : Y \to X$ tako da je $gf = 1_X$ i $fg = 1_Y$. Ako je $y \in Y$, uzmimo $x = g(y) \in X$, pa će biti $f(x) = fg(y) = 1_Y(y) = y$. Prema tomu, f je surjekcija. Ako su $x, x' \in X$ takvi da je $f(x) = f(x') \in Y$, onda je $x = 1_X(x) = gf(x) = gf(x') = 1_X(x') = x'$. Slijedi da je f je injekcija, dakle i bijekcija. Za dokaz jedinstvenosti, pretpostavimo da postoje dvije funkcije $g, g' : Y \to X$ takve da je $gf = 1_X = g'f$ i $fg = 1_Y = fg'$. Tada je, za svaki $y \in Y$, $g(y) = 1_X(g(y)) = (g'f)(g(y)) = g'((fg)(y)) = g'(1_Y(y)) = g'(y)$, dakle, $g = g'$. ■

1.3.4 Kardinalni broj

Definicija 1.3.5 *Neka su X, Y skupovi. Reći ćemo da je X* ***ekvipotentan*** *(ili da* ***ima jednako mnogo elemenata*** *kao) Y, ako postoji neka bijekcija $f : X \to Y$.*

Ekvipotentnost skupova je, očito, razredbena relacija na klasi[1] svih skupova, pa se skupovi svrstavaju u disjunktne ekvipotencijske razrede. Razred kojemu pripada skup X nazivamo **kardinalnim brojem** (ili **glavnim brojem** ili **potencijom**) skupa X i označujemo s $|X|$ ili s $\operatorname{card} X$.

Definicija 1.3.6 *Reći ćemo da je skup X* ***beskonačan****, ako postoje pravi podskup $X' \subset X$ i bijekcija $f : X \to X'$. Ako skup X nije beskonačan, reći ćemo da je* ***konačan****.*

Primijetimo da Definicija 1.3.6 izravno povlači konačnost praznoga skupa $\emptyset$.

Teorem 1.3.2 *Neka su X i Y ekvipotentni skupovi, tj. $|X| = |Y|$. Tada je X (bes)konačan točno onda kad je Y (bes)konačan.*

Dokaz. Po Definicijama 1.3.6 i 1.3.5, za dokaz obiju ekvivalencija, dovoljno je dokazati samo jednu implikaciju. Neka je X beskonačan. Tada postoje $X' \subset X$ i bijekcija $f : X \to X'$. Budući da $|X| = |Y|$, postoji i neka bijekcija $g : X \to Y$. Neka je $Y' = g[X']$ pa je sigurno $Y' \subset Y$ pravi podskup. Definirajmo funkciju $g' : X' \to Y'$ kao suženje $g\mid_{X'}$. Tada je g' dobro definirana i očito je bijektivna. Napokon, kompozicija $h = g'fg^{-1} : Y \to Y'$ je bijekcija (kao kompozicija triju bijekcija, v. §1.3.5 Vježbe, Zadatak 4.), pa je i Y beskonačan skup. ■

[1] Pojam "skup svih skupova" vodi k protuslovlju. Množina svih skupova ne tvori skup nego općenitiji objekt, tzv. **klasu.**

Definicija 1.3.7 *Reći ćemo da je kardinalni broj skupa X* ***manji ili jednak*** *od kardinalnog broja skupa Y i pisati $|X| \leq |Y|$ (ili $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$), ako postoji neka injekcija $f : X \to Y$. Ako je $|X| \leq |Y|$, a X i Y nisu ekvipotentni (tj. $|X| \neq |Y|$), reći ćemo da je kardinalni broj od X* ***manji*** *od kardinalnog broja od Y i pisati $|X| < |Y|$.*

Primijetimo da $X \subseteq Y$ povlači $|X| \leq |Y|$, jer je inkluzija $i : X \hookrightarrow Y$ injektivna funkcija. Lako je provjeriti da je ova relacija $\leq$ refleksivna i tranzitivna, dok njenu antisimetričnost jamči tzv. Cantor-Bernsteinov teorem, dokaz kojega je vrlo netrivijalan, a djelomice se zasniva na §1.4.6, Zadatak 1. Prema tomu, $\leq$ je uređajna relacija na klasi svih kardinalnih brojeva.

Teorem 1.3.3 *Ako je X konačan, a Y beskonačan skup, onda je $|X| < |Y|$.*

Lema 1.3.1 *Neka je $X \subseteq Y$. Ako je X beskonačan skup onda je takav i Y, a ako je Y konačan skup onda je takav i X.*

Dokaz. Ako je X beskonačan, onda postoje pravi podskup $X' \subset X$ i bijekcija $f : X \to X'$. Neka je Y' disjunktna unija $X' \bigcap (Y \setminus X)$, pa je $Y' \subset Y$ pravi podskup. Definirajmo funkciju $g : Y \to Y'$ pravilom f na X' i inkluzijom na $Y \setminus X$, tj. $(\forall y \equiv x \in X')\ g(y) = f(x)$ i $(\forall y \in Y \setminus X)\ g(y) = y$. Trivijalno je provjeriti da je g bijekcija, što znači da je Y beskonačan skup. S druge strane, ako je Y konačan skup onda takav mora biti i svaki njegov podskup X, jer bi protivna pretpostavka dovela, na opisani način, do zaključka da je Y beskonačan - protuslovlje. ■

Dokaz (Teorema 1.3.3). Budući da je $\leq$ uređajna relacija, to je ili $|X| \leq |Y|$ ili $|Y| \leq |X|$. Pretpostavimo da je $|Y| \leq |X|$, tj. da postoji neka injekcija $g : Y \to X$. Za sliku $g[Y] \subseteq X$ tada vrijedi $|g[Y]| = |Y|$. Po Teoremu 1.3.2, skup $g[Y]$ je beskonačan pa je, po Lemi 1.3.1, i skup X beskonačan - protuslovlje. Prema tomu, mora vrijediti $|X| \leq |Y|$. Napokon, budući da je, po Teoremu 1.3.2, $|X| \neq |Y|$, to mora biti $|X| < |Y|$.

1.3.5 Vježbe

1. Neka je $f : X \to Y$ funkcija i neka su $A, B \subseteq X$ i $C, D \subseteq Y$. Dokazati ove formule:

(i) $f[A \bigcup B] = f[A] \bigcup f[B]$; $\quad f^{-1}[C \bigcup D] = f^{-1}[C] \bigcup f^{-1}[D]$;

(ii) $f[A \bigcap B] \subseteq f[A] \bigcap f[B]$; $\quad f^{-1}[C \bigcap D] = f^{-1}[C] \bigcap f^{-1}[D]$;

(iii) $f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B]$; $\quad f^{-1}[C \setminus D] = f^{-1}[C] \setminus f^{-1}[D]$;

(iv) $f[f^{-1}[C]] = C \bigcap f[X] \subseteq C$; $\quad f^{-1}[f[A]] \supseteq A$.

Dokažimo npr. (ii): Ako je u prvoj formuli iz (ii) slika $f[A \bigcap B] = \emptyset$ nemamo što dokazivati. Stoga, neka je $y \in f[A \bigcap B] \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in A \bigcap B$ za koji je $f(x) = y$. Nu, tada je $x \in A$ i $x \in B$, pa je $f(x) \in f[A]$ i $f(x) \in f[B]$, dakle, $y = f(x) \in f[A] \bigcap f[B]$, što je i trebalo dokazati. Da je moguće $f[A \bigcap B] \neq f[A] \bigcap f[B]$ pokazuje slučaj $A \bigcap B = \emptyset$, a $f[A] \bigcap f[B] \neq \emptyset$.

Primjerice, aka su $A = \{a, a'\}, B = \{b, b'\} \subseteq X$ disjunktni podskupovi i $Y = \{y\}$, onda je, za svaku funkciju $f : X \to Y$, $f[A \bigcap B] = f[\emptyset] = \emptyset$ i $f[A] \bigcap f[B] = Y \neq \emptyset$.
Za dokaz druge formule iz (ii), neka je, najprije, $x \in f^{-1}[C \bigcap D]$. Tada postoji $y \in C \bigcap D$ za koji je $f(x) = y$. Dakle, $y \in C$ i $y \in D$ i $f(x) = y$, što povlači $x \in f^{-1}[C]$ i $x \in f^{-1}[D]$, tj. $x \in f^{-1}[C] \bigcap f^{-1}[D]$. Obrat se može dokazati čitajući prethodno zaključivanje natraške.
2. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Tada vrijedi:
(a) Ako je $gf : X \to Z$ injekcija onda je i f injekcija:
(b) ako je $gf : X \to Z$ surjekcija onda je i g surjekcija.
3. Dokazati da je, za svaku bijekciju $f : X \to Y$, $(f^{-1})^{-1} = f$.
4. Dokazati da je kompozicija gf od bijekcija g i f opet bijekcija.
5. Neka je X skup. Za svaki podskup $A \subseteq X$ definirajmo tzv. **karakterističnu funkciju** $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ podskupa A stavljajući

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Dokazati da je funkcija $F : 2^X \to \{f \mid f : X \to \{0,1\}\} \equiv \{0,1\}^X$, određena pravilom $F(A) = \chi_A$ za svaki $A \in 2^X$, bijekcija. (Prema tomu, partitivni skup 2^X i skup $\{0,1\}^X$ svih funkcija iz X u dvočlani skup su ekvipotentni.)
6. Dokazati da je $|Y| \leq |X|$ čim postoji neka surjekcija $f : X \to Y$.
7. Dokazati da je, za svaki skup X, $|X| < \left|2^X\right|$. (To povlači da nema najvećega kardinalnog broja.)

1.4 REALNI BROJEVI

Skup realnih brojeva ima temeljnu ulogu u cijeloj matematici, a u matematičkoj analizi posebice. Uobičajila su se dva pristupa ovomu skupu: induktivni (konstruktivni), koji polazi od Peanovih aksioma za skup prirodnih brojeva, i aksiomatski (deduktivni), koji pretpostavlja dobro poznavanje nekih algebarskih struktura. Mi ćemo se držati (starijega) induktivnoga pristupa.

1.4.1 Prirodni i cijeli brojevi

Prihvaćamo, kao "iskustvenu činjenicu", obstojnost barem jednog skupa N koji udovoljava ovim trima uvjeta:

(P1) N sadrži barem jedan element - označit ćemo ga znakom 1 i nazvati **brojem jedan** (ili **jedinicom**);

(P2) Postoji injektivna funkcija $s : N \to N$, takva da je, za svaki $n \in N$, $s(n) \neq 1$;

(P3) Ako za podskup $M \subseteq N$ vrijedi:

(i) $1 \in M$,
(ii) $(\forall n \in N)\ n \in M \Rightarrow s(n) \in M$,

onda je $M = N$.

Uvjete (P1), (P2) i (P3) nazivamo **Peanovim aksiomima**. Posebice, aksiom (P3) nazivamo **načelom potpune** (ili **matematičke indukcije**. Pokazuje se da, u biti - glede algebarske i uređajne strukture (koju ćemo u skupu N izgraditi), postoji samo jedan skup N s navedenim svojstvima. Taj ćemo skup istaknuti oznakom $\mathbb{N}$ i nazvati **skupom prirodnih brojeva**, a njegove elemente $n \in \mathbb{N}$ **prirodnim brojevima**.

Teorem 1.4.1 $s[\mathbb{N}] \equiv \{s(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dokaz. Neka je $M = \{1\} \bigcup s[\mathbb{N}]$, pa je $1 \in M$. Uzmimo bilo koji $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da je $n \in M$. Tada je $s(n) \in s[\mathbb{N}] \subseteq \{1\} \bigcup s[\mathbb{N}] = M$. Sada po načelu potpune indukcije (P3) zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$, tj. $\{1\} \bigcup s[\mathbb{N}] = \mathbb{N}$. Budući da je, po (P2), $s(n) \neq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, to je $\{1\} \bigcup s[\mathbb{N}]$ disjunktna unija, pa mora biti $s[\mathbb{N}] = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. ■

Korolar 1.4.1 *Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je beskonačan.*

Dokaz. Primijetimo da, po (P2) (injektivnost funkcije s) i Teoremu 1.4.1, postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ određena pravilom s, tj. $f(n) = s(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subset \mathbb{N}$ pravi podskup, to su uvjeti iz Definicije 1.3.6 ispunjeni. (Tvrdnju ovoga korolara se može dokazati i bez poziva na Teorem 1.4.1. Naime, činjenica da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan slijedi izravno iz aksioma (P2).) ■

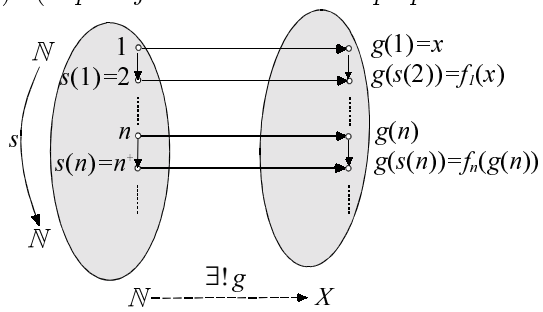
Da bismo mogli korektno definirati (uobičajene) operacije, tj. zbrajanje i množenje u skupu $\mathbb{N}$, valja uočiti jedno njegovo vrlo korisno svojstvo - tzv. **načelo definicije indukcijom** koje slijedi iz aksioma (P3). Iskazat ćemo ga u posebnom (jednostavnijem) slučaju ovim teoremom (bez dokaza):

Teorem 1.4.2 *Neka je X skup, $x \in X$ i neka je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, dana funkcija $f_n : X \to X$. Tada postoji točno jedna funkcija $g : \mathbb{N} \to X$ za koju je:*

(i) $g(1) = x$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\ g(s(n)) = f_n(g(n))$.

*Za funkciju g tada kažemo da je **induktivno definirana** (ili **rekurzivno zadana**). (U primjenama često nastupa posebni slučaj $f_1 = \cdots = f_n = \cdots$!)*



Teorem 1.4.3 (a) *Postoji točno jedna funkcija* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $+(m,n) \equiv m+n$ (čitamo: "em više en" ili "em plus en"), *koju zovemo* ***zbrajanjem****, s ovim svojstvima:*

(i) $(\forall m \in \mathbb{N})\ m+1 = s(m)$;

(ii) $(\forall m,n \in \mathbb{N})\ m+s(n) = s(m+n)$.

(b) *Postoji točno jedna funkcija* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\cdot(m,n) \equiv m \cdot n$ (čitamo: "em puta en"), *koju zovemo* ***množenjem****, s ovim svojstvima:*

(i) $(\forall m \in \mathbb{N})\ m \cdot 1 = m$;

(ii) $(\forall m,n \in \mathbb{N})\ m \cdot s(n) = s(m \cdot n) + m$.

Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Uzmimo $X = \mathbb{N}$, $x = s(m)$ i $f_n = s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa primijenimo Teorem 1.4.2. Postoji, dakle, jedinstvena funkcija $g \equiv g_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju je $g_m(1) = s(m)$ i $g_m(s(n)) = s(g_m(n))$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo li $g_m(n) \equiv m+n$, dobivamo jednakosti iz uvjeta (i) i (ii) u (a). Prema tomu, funkcija g_m je traženo zbrajanje s čvrstim m, tj. "+": $\{m\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Budući da smo m odabrali po volji, to je funkcija $+$ dobro definirana na cijelom $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Slično postupamo i u dokazivanju tvrdnje (b). Neka je $m \in \mathbb{N}$. Uzmimo $X = \mathbb{N}$, $x = m$ i $f_n \equiv f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zbrajanje s m, tj. $f(n) = n+m$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa primijenimo Teorem 1.4.2. Postoji, dakle, jedinstvena funkcija $g \equiv h_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju je $h_m(1) = m$ i, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $h_m(s(n)) = f(h_m(n)) = h_m(n) + m$. Označimo li $h_m(n) \equiv m \cdot n$, dobivamo jednakosti iz uvjeta (i) i (ii) u (b). Prema tomu, funkcija h_m je traženo množenje s čvrstim m, tj. "$\cdot$": $\{m\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Budući da smo m odabrali po volji, to je funkcija $\cdot$ dobro definirana na cijelom $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Primijetimo da se injektivna funkcija s iz aksioma (P2) može interpretirati pomoću zbrajanja. Naime, $s(n) = g_n(1) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Radi lakšeg sporazumijevanja najčešće se koriste sljedeći (indijsko-arapski) znakovi za nekoliko "početnih" prirodnih brojeva (u zagradama navodimo njihova hrvatska imena): $s(1) = 1+1 \equiv 2$ (dva), $s(2) = 2+1 \equiv 3$ (tri), $s(3) = 3+1 \equiv 4$ (četiri), $s(4) = 4+1 \equiv 5$ (pet), $s(5) = 5+1 \equiv 6$ (šest), $s(6) = 6+1 \equiv 7$ (sedam), $s(7) = 7+1 \equiv 8$ (osam), $s(8) = 8+1 \equiv 9$ (devet), $s(9) = 9+1 \equiv 10$ (deset), itd. (Znak 0 nam, zasebice, za sada ne označuje nikakav objekt! Uvest ćemo ga pri izgradnji skupa cijelih brojeva. Znakove $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ nazivamo **decimalnim znamenkama**, a njihovu ćemo praktičnu važnost shvatiti prigodom uvođenja tzv. decimalnoga sustava zapisivanja cijelih brojeva.)

Nije teško dokazati da su binarne operacije $+$ i $\cdot$ na $\mathbb{N}$ **asocijativne** i **komutativne**, tj. da za svaki $m,n,p \in \mathbb{N}$ vrijedi $(m+n)+p = m+(n+p)$ i $m+n = n+m$, kao i $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ i $m \cdot n = n \cdot m$. (Asocijativnost dopušta ispuštanje zagrada, tj. pisanje $m+n+p$ i $m \cdot n \cdot p$.) U buduće ćemo često ispuštati znak za množenje i pisati $m \cdot n$ kao mn. Nadalje, pokazuje se da je zbrajanje **distributivno** (slijeva i zdesna) s obzirom na množenje,

tj. za svaki $m, n, p \in \mathbb{N}$ je $m(n+p) = mn + mp$ i $(m+n)p = mp + np$. Napokon, potpunom indukcijom (po m) nije teško dokazati istinitost ovih triju tvrdnja:

$(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m + n \neq n$;

$(\forall m, n, p \in \mathbb{N})\ m + n = m + p \Rightarrow n = p$;

$(\forall m, n, p \in \mathbb{N})\ mn = mp \Rightarrow n = p$.

Sada prelazimo na uređivanje skupa $\mathbb{N}$. Neka je m, n par prirodnih brojeva. Definiramo: $m < n$ (čitamo: em **je manji(e) od** en) ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $m + p = n$. Iz prethodnih činjenica proizlazi da je p jedinstven i potpuno određen brojevima m i n, pa označujemo $p \equiv n - m$ (čitamo: " en manje em" ili "en minus em"). Nadalje, očito je da $m < n$ povlači $m \neq n$ (dakle, $<$ nije refleksivna relacija), te da $m < n \wedge n < m$ ne može biti istinit sud.

Relaciju $\leq$ na $\mathbb{N}$, za koju ćemo dokazati da je uređajna relacija, definiramo kako slijedi: $m \leq n \Leftrightarrow (m < n \vee m = n)$. Jednostavno je provjeriti da se radi o parcijalnom uređaju, te da, za svaki $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m \leq n \Rightarrow m + p \leq n + p$, tj. relacija $\leq$ je usklađena (kompatibilna) sa zbrajanjem.

Teorem 1.4.4 $(\mathbb{N}, \leq)$ *je uređen skup i* $\leq$ *je jedini uređaj na* $\mathbb{N}$ *koji je usklađen sa zbrajanjem i u kojemu je* $1 = \min \mathbb{N}$.

Dokaz. Najprije dokazujemo da je $1 = \min(\mathbb{N}, \leq)$. Prvo, $1 \leq 1$ jer je $1 = 1$. Nadalje, $1 < 1 + 1 = s(1)$ pa je $1 \leq s(1)$. Sada se indukcijom lako pokaže da je $1 \leq s(n)$ za svaki prirodan broj n. Budući da je $s[\mathbb{N}] = \mathbb{N} \backslash \{1\}$ (v. Teorem 1.4.1), to je $1 \leq n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je tvrdnja dokazana.

Sada dokazujemo da je $\leq$ potpuni uređaj, tj. da za svaki par m, n prirodnih brojeva vrijedi $m \leq n$ ili $n \leq m$. Dovoljno je uzeti bilo koji $m \in \mathbb{N}$ i dokaz provesti potpunom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je tvrdnja istinita, točnije, $1 \leq m$ jer je $1 = \min(\mathbb{N}, \leq)$. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za bilo koji n pa dokažimo njezinu istinitost za $n + 1$. Ako je $m \leq n$ onda je po tranzitivnosti, zbog $n \leq n + 1$, i $m \leq n + 1$. Ako je pak $n < m$, onda postoji p takav da je $n + p = m$. To povlači, zbog $1 \leq p$ i usklađenosti relacije $\leq$ s operacijom $+$, da je $n + 1 \leq n + p = m$. Time je i ova tvrdnja dokazana.

Preostaje dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da je i $\leq'$ uređajna relacija na $\mathbb{N}$, koja je usklađena sa zbrajanjem i za koju je $1 = \min(\mathbb{N}, \leq')$. Treba dokazati da je, za svaki par m, n prirodnih brojeva, $m \leq' n$ onda i samo onda kad je $m \leq n$. Neka je prvo $m \leq n$. Ako je $m = n$ onda, zbog refleksivnosti uređajne relacije, mora biti $m \leq' n$. Ako je $m \neq n$, tj. $m < n$, onda postoji p za koji je $m + p = n$. Pretpostavimo protivno, tj. da ne vrijedi $m \leq' n$. Budući da je $\leq'$ uređajna relacija, mora biti $n \leq' m$, a zbog $n \neq m$ zapišimo to kao $n <' m$. Proizlazi da je $m + p <' m$ što se protivi činjenici $m \leq' m + 1 \leq' m + p$ u $(\mathbb{N}, \leq')$, za svaki par $m, p \in \mathbb{N}$. (Tvrdnja $m \leq' s(m) = m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, se lako dokazuje indukcijom, a $m + 1 \leq' m + p$ je posljedica usklađenosti relacije $\leq'$ sa zbrajanjem.) Obratna implikacija $m \leq' n \Rightarrow m \leq n$ se dokazuje na isti način. ■

Napomena 1.4.1 (a) Primijetimo da smo u dokazu gornjega teorema uporabili načelo potpune indukcije u ponešto izmijenjenom obliku od onoga u aksiomu (P3). Budući da je u primjeni baš takav oblik najučestaliji, posebno ćemo ga istaknuti:

Neka je T bilo koja tvrdnja o prirodnim brojevima. Ako je T istinita za neki $m \in \mathbb{N}$ i ako, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, iz pretpostavke da je T istinita za n slijedi da je T istinita i za $n+1$, onda je T istinita za svaki prirodni broj $n \geq m$. (Dakako, ako je $m = 1$ onda je T istinita za svaki prirodni broj.)

(b) Uređaj $\leq$ na $\mathbb{N}$ ima još jedno važno svojstvo: Svaki neprazan podskup $A \subseteq N$ ima minimalni element $\min A$. (Kaže se da je skup $(\mathbb{N}, \leq)$ **dobro uređen**.)

Dvije sljedeće tvrdnje pokazuju da je $(\mathbb{N}, \leq)$ **diskretno** uređen skup:

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! m \in \mathbb{N})\ (n < m \wedge \{p \in \mathbb{N} \mid n < p < m\} = \emptyset)$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})(\exists! m \in \mathbb{N})\ (m < n \wedge \{p \in \mathbb{N} \mid m < p < n\} = \emptyset)$.

Dokaze ovih tvrdnja prepuštamo čitatelju za vježbu.

Po Definiciji 1.2.6 ima smisla govoriti o segmentima, intervalima, $\cdots$ u $(\mathbb{N}, \leq)$. Označavat ćemo ih s $[m, n]_{\mathbb{N}}$, $\langle m, n\rangle_{\mathbb{N}}$, $\cdots$. Primijetimo da je $\langle n, n+1\rangle_{\mathbb{N}} = \emptyset$, pa ima smisla $s(n) = n + 1$ nazvati **sljedbenikom** od n. Posebno će nam biti važni tzv. **početni komadi** u $(\mathbb{N}, \leq)$, tj. segmenti $[1, n]_{\mathbb{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq n\} \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$. Sam skup $\mathbb{N} = [1, \cdot\rangle_{\mathbb{N}} \equiv \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$, gdje u zapisu ispisujemo elemente poštujući uređaj.

Već smo ustanovili da je skup prirodnih brojeva beskonačan. Sada ćemo dokazati da je svaki početni komad $[1, n]_{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, konačni skup.

Teorem 1.4.5 *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki pravi podskup $A \subset [1, n]_{\mathbb{N}}$ ne postoji injekcija iz $[1, n]_{\mathbb{N}}$ u A.*

Dokaz. Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ je $[1, n]_{\mathbb{N}} = [1, 1]_{\mathbb{N}} = \{1\}$, pa mora biti $A = \emptyset$. Budući da nema funkcije iz nepraznoga u prazan skup, za $n = 1$ je tvrdnja istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$, pa dokažimo da onda vrijedi i za $n+1$. Neka je $f : [1, n+1]_{\mathbb{N}} \to [1, n+1]_{\mathbb{N}}$ bilo koja injekcija. Dokaz će biti potpun dokažemo li da je f i surjekcija. (Tada ne može postojati injekcija u pravi podskup!) Ako $n + 1 \notin f[[1, n]_{\mathbb{N}}]$ onda je $f[[1, n]_{\mathbb{N}}] \subseteq [1, n]_{\mathbb{N}}$, pa smijemo primijeniti induktivnu pretpostavku na restrikciju $f\mid_{[1,n]_{\mathbb{N}}}$ i zaključiti $f[[1, n]_{\mathbb{N}}] = [1, n]_{\mathbb{N}}$. To povlači da je $f(n+1) = n+1$ i, sveukupno, da je f surjekcija. Ako je $n+1 \in f[[1, n]_{\mathbb{N}}]$, onda postoji $m \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ za koji je $f(m) = n + 1$. Promatrajmo funkciju $g : [1, n]_{\mathbb{N}} \to [1, n]_{\mathbb{N}}$ određenu pravilom $g(p) = f(p)$, za $p \neq m$, i $g(m) = f(n + 1)$. Primijetimo da je $f(n + 1) \neq n + 1 = f(m)$, jer je f injekcija. To dalje povlači da je g injekcija, pa je, po induktivnoj pretpostavci, i surjekcija, tj. $g[[1, n]_{\mathbb{N}}] = [1, n]_{\mathbb{N}}$. Napokon,

$f[[1, n + 1]_{\mathbb{N}}] =$

$\{f(p) = g(p) \mid 1 \leq p \leq n \wedge p \neq m\} \bigcup \{f(m) = n + 1\} \bigcup \{f(n + 1)\} =$

$g[[1,n]_{\mathbb{N}}] \bigcup \{n+1\} = [1,n+1]_{\mathbb{N}}$.
Dakle, f je surjekcija, pa je teorem dokazan. ■

Uobičajilo se poistovjetiti kardinalni broj $|[1,n]_{\mathbb{N}}|$ s prirodnim brojem n. To pojednostavnjuje zapisivanje, a i sasvim je opravdano jer je, po Teoremu 1.4.5, $|[1,m]_{\mathbb{N}}| = |[1,n]_{\mathbb{N}}| \Leftrightarrow m = n$. Naredni teorem pokazuje da se to može proširiti na sve konačne neprazne skupove.

Teorem 1.4.6 *Neprazni skup X je konačan onda i samo onda, ako je ekvipotentan nekom početnom komadu $[1,n]_{\mathbb{N}}$ skupa prirodnih brojeva.*

Dokaz. Dovoljnost je gotovo očita. Naime, ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je X ekvipotentan skupu $[1,n]_{\mathbb{N}}$, onda je, po Teoremu 1.4.5 i Teoremu 1.3.2, skup X konačan. Dokažimo nužnost! Neka je $X \neq \emptyset$ konačni skup. Budući da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan (v. Korolar 1.4.1), to po Teoremu 1.3.3 mora biti $|X| < |\mathbb{N}| \equiv \aleph_0$. Pretpostavimo, protivno teoremu, da X nije ekvipotentan skupu $[1,n]_{\mathbb{N}}$ za ma koji $n \in \mathbb{N}$, tj. $|X| \neq |[1,n]_{\mathbb{N}}| \equiv n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\leq$ potpuni uređaj na klasi svih kardinalnih brojeva, to mora biti ili $|X| < n$ ili $|X| > n$ za svaki n. No, $|X| < n$ za svaki n ne može vrijediti, jer za $n = 1$ dobivamo $X = \emptyset$ (nijedna injekcija $X \to \{1\}$ nije surjekcija) - protuslovlje. Prema tomu, moralo bi biti $|X| > n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim, ovo bi omogućilo konstrukciju injekcije $f : \mathbb{N} \to X$, pa bismo smjeli zaključiti da je $|\mathbb{N}| \leq |X|$ - protuslovlje. ■

Teorem 1.4.6 dopušta sljedeću definiciju:

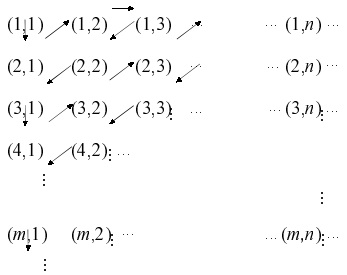
Definicija 1.4.1 *Neka je X konačni i neprazni skup, a n prirodni broj. Reći ćemo da skup X* ***ima*** *n* ***elemenata*** *i pisati* (card$X \equiv$) $|X| = n$, *ako je X ekvipotentan početnomu komadu $[1,n]_{\mathbb{N}}$ od $\mathbb{N}$.*

Definicija 1.4.2 *Reći ćemo da je skup X* ***prebrojiv*** *ako je ekvipotentan nekom podskupu od $\mathbb{N}$. U protivnom ćemo reći da je skup X* ***neprebrojiv****.*

Lako je provjeriti istinitost ovih tvrdnja:

(i) Svi konačni skupovi i skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ jesu prebrojivi;
(ii) Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv;
(iii) Svaki beskonačni podskup $A \subseteq \mathbb{N}$ je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$;
(iv) Svaki beskonačni prebrojiv skup X je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$.

Dokažimo, ilustracije radi, tvrdnju (ii)! Pokazat ćemo da je direktni produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$. U tu svrhu promatrajmo sljedeći zapis skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:



Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pravilom što ga pokazuju strjelice: $f(1) = (1,1)$, $f(2) = (2,1)$, $f(3) = (1,2)$, $f(4) = (1,3)$, $f(5) = (2,2)$, $f(6) = (3,1)$, $f(7) = (4,1)$, $f(8) = (3,2)$, $f(9) = (2,3)$, $f(10) = (1,4)$, $\cdots$. (f se može propisati i neovisno o shemi!) Lako se vidi da je f bijekcija.

Sažmimo ukratko glavne činjenice o skupu $\mathbb{N}$:
Postoji točno jedan skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ *(beskonačan) s binarnim operacijama* $+$ *(zbrajanje) i* $\cdot$ *(množenje), koje su asocijativne i komutativne,* $+$ *je distributivna s obzirom na* $\cdot$*, i s diskretnim uređajem* $\leq$ *koji se dobro ponaša prema* $+$ *i* $\cdot$ *i u kojemu je* $1 = \min(\mathbb{N}, \leq)$. *Dobivenu strukturu ćemo označiti s* $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$.

Sada ćemo dobivenu strukturu proširiti na tzv. skup cijelih brojeva. Sjetimo se da u slučaju $m < n$ u $\mathbb{N}$ postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $m+p = n$. Pisali smo $p \equiv n - m$. Jasno je da "$-$" ne može biti operacija na $\mathbb{N}$ jer u slučaju $n \leq m$ ne znamo što bi "$n - m$" značilo. Ovo vodi na zamisao da se skup $\mathbb{N}$ razumno proširi. U tu svrhu promatrajmo skup $\mathbb{N}$ i njegov preslik $\mathbb{N}' = \{1', 2', 3', \cdots, n', \cdots\}$, gdje nam crtice "$'$" služe za formalno razlikovanje preslika od izvornika. Označimo znakom 0 novi objekt (ne pripada $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{N}'$), nazovimo ga **nulom** (ili **ništicom**), pa promatrajmo skup $Z = \mathbb{N}' \bigcup \{0\} \bigcup \mathbb{N}$. Na skupu Z želimo izgraditi strukturu sličnu onoj na njegovu podskupu $\mathbb{N}$ i to tako da se postojeća struktura na $\mathbb{N}$ ne izmijeni, tj. struktura na Z treba biti proširenje one na podskupu $\mathbb{N}$. Najprije definiramo zbrajanje na Z, koje ćemo opet označiti znakom $+$, tj. $+ : Z \times Z \to Z$. Ako su $m, n \in \mathbb{N}$ ($m', n' \in \mathbb{N}'$), neka $m + n$ ($m' + n'$) u Z bude isto što i u $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}'$). Ako je $m \in \mathbb{N}$ i $n' \in \mathbb{N}'$, neka bude

$$m + n' = n' + m = \begin{cases} m - n, & \text{čim je } n < m \\ 0, & \text{čim je } n = m \\ (n - m)', & \text{čim je } n < m \end{cases} .$$

Napokon, definiramo $m + 0 = m = 0 + m$, $n' + 0 = n' = 0 + n'$ i $0 + 0 = 0$.

Lako se provjeri da je zbrajanje Z proširenje zbrajanja na $\mathbb{N}$ i da je sačuvalo sva dobra svojstva. Pokazuje se prikladnim označiti $\mathbb{N}'$ kao $-\mathbb{N}$ i n' kao $-n$, pa se "$-$" može interpretirati kao nova binarna operacija (**oduzimanje**) na Z.

Množenje na Z definiramo kako slijedi: Ako su $m, n \in \mathbb{N}$, neka $m \cdot n$ u Z bude isto što i $m \cdot n \equiv mn$ u $\mathbb{N}$; ako su $m \in \mathbb{N}$ i $-n \in -\mathbb{N}$, stavljamo $m \cdot (-n) = (-n) \cdot m = -(mn)$; ako su $-m, -n \in \mathbb{N}$, neka bude $(-m) \cdot (-n) = mn$; napokon, neka bude $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0 \cdot (-n) = (-n) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$, za svaki $m \in \mathbb{N}$ i svaki $-n \in -\mathbb{N}$.

Nije teško provjeriti da je ovo množenje proširenje množenja na $\mathbb{N}$, te da nasljeđuje njegova korisna svojstva. I u Z ćemo pojednostavniti zapisivanje često pišući $m \cdot n$ kao mn.

Uređaj $\leq$ na Z uvodimo najprije globalno zahtjevom $-\mathbb{N} \leq \{0\} \leq \mathbb{N}$, tj. $-m \leq 0 \leq n$ za svaki $-m \in -\mathbb{N}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, u $\mathbb{N} \subseteq Z$ neka bude

uređaj $\leq$ nasljeđen od $(\mathbb{N}, \leq)$, dok u $-\mathbb{N}$ obrnimo taj uređaj, tj. $-m \leq -n$ u Z kad god je $n \leq m$ u $\mathbb{N}$.

Z s operacijama $+$ i $\cdot$ i uređajem $\leq$ nazivamo **skupom cijelih brojeva** *i označujemo sa $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$, a njegove elemente nazivamo* **cijelim brojevima**. *Jednostavnosti radi, obično se piše samo $\mathbb{Z}$, a želi li se istaknuti elemente i uređaj, piše se $\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.*

Neka čitatelj dokaže ove jednostavne tvrdnje:

(i) Skup $\mathbb{Z}$ je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$, dakle, $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$;

(ii) Uređeni skup $(\mathbb{Z}, \leq)$ nema najmanjega elementa.

1.4.2 Racionalni brojevi

Promatrajmo direktni produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ i na njemu binarnu relaciju $\sim$ definiranu pravilom:

$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n.$

Lako se provjeri da je $\sim$ razredbena relacija, pa se skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ po njoj cijepa na disjunktne razrede $[(m, n)] \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Označimo slovom Q skup svih tih razreda, tj. $Q = \{[(m, n)] \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Na skupu Q definiramo binarne relacije $+$ (**zbrajanje**) i $\cdot$ (**množenje**) i relaciju $\leq$ (**manje ili jednako**) kako slijedi:

$[(m_1, n_1)] + [(m_2, n_2)] = [(m_1 n_2 + m_2 n_1, n_1 n_2)];$

$[(m_1, n_1)] \cdot [(m_2, n_2)] = [(m_1 m_2, n_1 n_2)];$

$[(m_1, n_1)] \leq [(m_2, n_2)] \Leftrightarrow m_1 n_2 \leq m_2 n_1;$

gdje na desnim stranama definicijskih jednakosti stoje operacije i uređaj na $\mathbb{Z}$. Pokazuje se da su operacije $+$ i $\cdot$ i relacija $\leq$ na Q dobro definirane, tj. da ne ovise o izboru predstavnika ekvivalencijskih razreda. Primjerice, za zbrajanje, neka je $[(m_1', n_1')] = [(m_1, n_1)]$ i $[(m_2', n_2')] = [(m_2, n_2)]$. Tada je, po definiciji,

$[(m_1', n_1')] + [(m_2', n_2')] = [(m_1' n_2' + m_2' n_1', n_1' n_2')],$

pa budući da je, po relaciji $\sim$,

$(m_1' n_2' + m_2' n_1') \cdot (n_1 n_2) = m_1' n_2' n_1 n_2 + m_2' n_1' n_1 n_2 =$

$= m_1 n_2 n_1' n_2' + m_2 n_1 n_1' n_2' = (m_1 n_2 + m_2 n_1) \cdot (n_1' n_2'),$

to je

$[(m_1', n_1')] + [(m_2', n_2')] = [(m_1, n_1)] + [(m_2, n_2)].$

Nadalje, pokazuje se da su operacije $+$ i $\cdot$ asocijativne i komutativne, da je $+$ obostrano distributivna na $\cdot$, da je $\leq$ uređajna relacija, te da se $\leq$ dobro ponaša prema $+$ i $\cdot$.

Skup Q s operacijama $+$ i $\cdot$ i uređajem $\leq$ nazivamo **poljem** (*ili* **potpuno uređenim poljem**) **racionalnih brojeva** *i označujemo s $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$,*

a njegove elemente nazivamo **racionalnim brojevima** (*ili* **razlomcima**). *Jednostavnosti radi, tu strukturu označujemo samo (podebljanim) slovom $\mathbb{Q}$.*

Primijetimo da je pravilom $m \mapsto [(m,1)]$, $m \in \mathbb{Z}$, dobro definirana injektivna funkcija iz $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Q}$. To dopušta da se poistovjećenjem elementa $m \in \mathbb{Z}$ s elementom $[(m,1)] \in \mathbb{Q}$ skup $\mathbb{Z}$ shvati podskupom skupa $\mathbb{Q}$, dakle, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Štoviše, pri ovomu poistovjećenju ostaju sačuvane operacije $+$ i $\cdot$, kao i uređaj $\leq$ na $\mathbb{Z}$, pa je struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ proširenje strukture $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$. Sada se smije pojednostavniti zapisivanje racionalnih brojeva:

$$[(m,n)] = \begin{cases} 0, & \text{čim je } m = 0 \\ \frac{m'}{n'}, & \text{čim je } m \neq 0 \end{cases},$$

gdje je $(m', n') \in [(m,n)]$ i $M(m', n') = 1$ (tj. m' i n' su relativno prosti, v. §1.4.6 Zadatak 8).

Uobičajilo se pisati

$$\mathbb{Q} = \{q = \tfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}/_{\sim},$$

gdje je $\sim$ prije navedena ekvivalencijska relacija na $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ i $M(m,n) = 1$.

Na skupu $\mathbb{Q}$ se prirodno definira proširenje oduzimanja "$-$" na $\mathbb{Z}$. Osim toga, na $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$ možemo definirati novu operaciju $\div$ (**dijeljenje**), $\div(q_1, q_2) \equiv q_1 : q_2 \equiv \frac{q_1}{q_2}$, stavljajući

$$q_1 : q_2 = \tfrac{m}{n} \equiv q,$$

pri čemu je $(m,n) \in [(m_1 n_2, m_2 n_1)]$ i $M(m,n) = 1$, a $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ i $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$. Dodatno se definira i $0 : q = 0$ za svaki $q \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$, dok se "$q : 0$" ne može jednoznačno osmisliti.

Neka čitatelj provjeri istinitost sljedeće tvrdnje:

$$q_1 : q_2 = q_3 \Leftrightarrow q_1 = q_2 \cdot q_3, \quad q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q},\ q_2 \neq 0.$$

Navedimo još dva svojstva skupa racionalnih brojeva:

(i) Skup $\mathbb{Q}$ je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$, tj. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$;

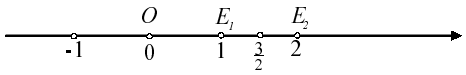
(ii) Uređeni skup $(\mathbb{Q}, \leq)$ je **svuda gust**, tj.
$(\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q})\ q_1 < q_2 \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}) q_1 < q < q_2$.

(Izravna posljedica jest beskonačnost svakog nepraznog intervala $< q_1, q_2 >_{\mathbb{Q}}$ u $(\mathbb{Q}, \leq)$.)

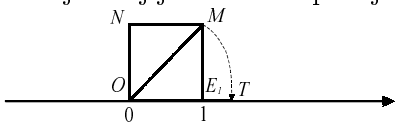
Da bismo dokazali (i), sjetimo se da je $\mathbb{N}$ ekvipotentan svomu direktnom kvadratu, tj. skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Budući da su $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ ekvipotentni, lako se pokaže da su i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ekvipotentni, pa su onda i skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ekvipotentni. Primijetimo da je funkcija $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(m,n) = \frac{m}{n}$, surjekcija, što skupa s prethodnim jamči obstojnost neke surjekcije iz $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. No budući da je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ mora biti $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \equiv \aleph_0$. Za (ii) je dovoljno primijetiti da je $\frac{q_1+q_2}{2} \in < q_1, q_2 >_{\mathbb{Q}}$ čim je $q_1 < q_2$.

Racionalne brojeve je je pogodno prikazati pomoću točaka nekog pravca. U tu svrhu, učvrstimo bilo koju točku O (**ishodište**) odabranoga pravca i točku E_1, različitu od O, na "desnoj" zraci određenoj točkom O. Točki O pridružimo cijeli broj 0, a točki E_1 prirodni broj 1. Nanoseći dužinu $\overline{OE_1}$ uzastopce na odabranu zraku $\overrightarrow{OE_1}$ i pridružujući tako dobivenim točkama redom $(\leq)$ prirodne brojeve, preslikat ćemo skup prirodnih brojeva injektivno u skup svih točaka te zrake. Preslikavajući na isti način preostale cijele brojeve $(-\mathbb{N})$ na "lijevu" zraku, smjestit ćemo $\mathbb{Z}$ u skup svih točaka

odabranoga pravca. Pritom se čuva uređaj, tj. $m < n$ u $\mathbb{Z}$ točno onda kad je E_m "lijevo od" E_n. Poznatim načinom dijeljenja dužine možemo, nadalje, svakom racionalnom broju $q = \frac{m}{n}$ pridružiti jedinstvenu točku E_q na odabranomu pravca. (Pritom za $q \in < k, l >_{\mathbb{Q}}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$, dijelimo dužinu $\overline{E_k E_l}$!) Tako se i $\mathbb{Q}$ injektivno i čuvajući uređaj preslika u skup svih točaka promatranoga pravca.



Budući da je $\mathbb{Q}$ svuda gust, moglo bi se pomisliti da je na opisani način svakoj točki na odabranomu pravcu pridružen neki racionalan broj, tj. da je opisana funkcija iz $\mathbb{Q}$ u skup svih točaka na tomu pravcu surjektivna. Da se radi o zabludi pokazuje ovaj jednostavni primjer.



Konstruirajmo kvadrat $\square OE_1MN$ nad "osnovnom" dužinom $\overline{OE_1}$, pa zarotirajmo njegovu dijagonalu $\overline{OM}$ oko točke O polažući ju na zraku $\overrightarrow{OE_1}$. Tako će se točka M preslikati u neku točku T odabrane zrake. Kad bi točka T bila slika nekog racionalnog broja q, vrijedilo bi $q^2 (\equiv q \cdot q) = 1^2 + 1^2 = 2$ (Pitagorin poučak), što je uobičajeno pisati kao $q = 2^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{2}$ (v. Teorem 1.4.12). Našu će pretpostavku sada lako oboriti sljedeća lema (prije vidi §1.4.6 Vježbe, Zadatak 2.):

Lema 1.4.1 *Kvadrat $n^2 \equiv n \cdot n$ prirodnog broja n je (ne)paran onda i samo onda, ako je n (ne)paran.*

Dokaz. Prvo dokazujemo dovoljnost. Neka je $n \in \mathbb{N}$ paran, tj. $n = 2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je i $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ paran. Ako je n neparan, tj. $n = 2k - 1$, onda je i $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$ neparan. Za dokazivanje nužnosti, neka je $n^2 = 2k$ paran. Kad n ne bi bio paran, bio bi neparan (svaki prirodan broj je ili paran ili neparan), pa bi, po dokazanoj dovoljnosti, i n^2 bio neparan - protuslovlje. Na isti način se zaključuju u slučaju n^2 neparan. ■

Vratimo se našemu razmatranju, tj. pretpostavci da točki T odgovara racionalni broj $q \equiv \sqrt{2}$. To bi značilo da je $\sqrt{2} \equiv \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$ i $M(m,n) = 1$. Tada bi bilo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, tj. $m^2 = 2n^2$, pa bi po Lemi 1.4.1 bilo $m = 2k^2$ za neki $k \in \mathbb{N}$. To bi dalje povlačilo da je $n^2 = 2k^2$, pa bi i n bio paran, tj. $n = 2l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Napokon, slijedilo bi $1 = M(m,n) = M(2k, 2l) \geq 2$ - protuslovlje. Prema tomu, točka T (koja odgovara "veličini" $\sqrt{2}$) nije slika racionalnog broja po opisanom preslikavanju. Drugim riječima, tretiramo li $\sqrt{2}$ kao (neki novi) "broj", $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Zato se kaže da u skupu $\mathbb{Q}$ **postoje praznine**.

Upravo dakazana činjenica navodi na novo proširenje u slijedu $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. U tu svrhu, sjetimo se prereza B u uređenom skupu $(X, \leq)$ (v. Definiciju 1.2.7). Promatrajmo uređeni skup $(\mathbb{Q}, \leq)$ i prereze u njemu. Označimo s R skup svih prereza B u $(\mathbb{Q}, \leq)$. Primijetimo da se i svaki racionalan broj smije smatrati takvim prerezom, jer je moguće poistovjećenje (bijekcija) $\mathbb{Q} \ni q \equiv B_q =< q, \cdot >_{\mathbb{Q}} = \{q' \in \mathbb{Q} \mid q < q'\}$. (Naime, $B_q = B_{q'} \Leftrightarrow q = q'$, pa je, za svaki $q \in \mathbb{Q}$, zapravo $\inf B_q = q$) To povlači da je $\mathbb{Q} \subseteq R$ pa R nije prazan. Štoviše, prethodno razmatranje pokazuje da i $R \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Zaista, budući da $\sqrt{2}$ ($\notin \mathbb{Q}$) odgovara prerezu $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 > 2\}$ u $(\mathbb{Q}, \leq)$, to smijemo držati $\sqrt{2} \in R$. Često je korisno prereze u $(\mathbb{Q}, \leq)$, tj. elemente skupa R, označavati dvojako - kao elemente $r \in R$ i kao odgovarajuće podskupove $r \equiv B \subseteq \mathbb{Q}$.

Sada ćemo na skupu R definirati **uređaj** $\leq$ i operacije $+$ (**zbrajanje**) i $\cdot$ (**množenje**), što će biti proširenja onih na $\mathbb{Q}$. Za dva prereza $B_1 \equiv r_1, B_2 \equiv r_2 \in R$ stavljamo:

$r_1 \leq r_2 \Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1$;

$r_1 + r_2 \equiv B_1 + B_2 = \{q_1 + q_2 \mid q_1 \in B_1, q_2 \in B_2\}$

(za što se lako pokaže da je prerez $B \equiv r$ u $\mathbb{Q}$);

za množenje, neka su najprije $r_1 > 0$ i $r_2 > 0$ (tj. $B_1 > \{0\}$ i $B_2 > \{0\}$), pa definirajmo

$r_1 \cdot r_2 \equiv B_1 \cdot B_2 \equiv \{q_1 \cdot q_2 \mid q_1 \in B_1, q_2 \in B_2\}$

(što je opet neki prerez $B \equiv r$ u $\mathbb{Q}$ i $r > 0$); ako je $r_1 < 0$ i $r_2 > 0$ ($r_1 > 0$ i $r_2 < 0$), neka bude

$r_1 \cdot r_2 = -((-r_1) \cdot r_2) \quad (r_1 \cdot r_2 = -(r_1(- \cdot r_2))$,

gdje je $-r_i \equiv -B_i = \{-q_i \mid q_i \in B_i\}$, $i = 1, 2$.

(Dakako da su na desnim stranama dviju prvih definicijskih jednakosti operacije na $\mathbb{Q}$. Provjeru neovisnosti o izboru reprezentanata prepuštamo čitatelju.) Nije teško provjeriti da se po inkluziji $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow R$ čuvaju operacije $+$ i $\cdot$ kao i uređaj $\leq$ iz $\mathbb{Q}$.

Skup R s ovako definiranim operacijama $+$ i $\cdot$ i uređajem $\leq$ nazivamo **poljem** (*ili* **potpuno uređenim poljem**) **realnih brojeva** *i označujemo s $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, a njegove elemente nazivamo* **realnim brojevima**. *Kao i do sada, jednostavnosti radi, najčešće ćemo ispuštati oznake za strukturu i pisati samo $\mathbb{R}$.*

Istaknimo skupove, odnosno, proširenja što smo ih ovdje konstruirali: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Pokazuje se da svakoj točki T brojevnog pravca odgovara točno jedan realan broj r i obratno, pa se kaže da skup $\mathbb{R}$, za razliku od $\mathbb{Q}$, **nema praznina** (v. Teorem 1.4.9). Pritom je $<$ u $\mathbb{R}$ isto što i "biti lijevo" na brojevnom pravcu.

Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \equiv \mathbb{J}$ nazivamo **skupom iracionalnih brojeva**, a njegove elemente **iracionalnim brojevima**. Dakle, $\sqrt{2}$ je primjer iracionalnoga (realnog) broja.

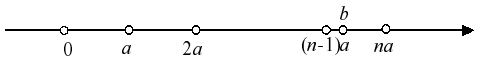
Sada ćemo se pozabaviti nekim važnim temeljnim svojstvima skupa realnih brojeva.

Teorem 1.4.7 *Svaki neprazni i odozdol (odozgor) omeđeni skup* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ima infimum* $\inf A$ *(supremum* $\sup A$*).*

Dokaz. Neka je A odozdol omeđen nekom donjom međom $m \in \mathbb{R}$, tj. $m \leq a$ za svaki $a \in A$. Po definicijama skupa $\mathbb{R}$ i uređaja $\leq$ na njemu, m je pojednostavljena oznaka za prerez B_m koji smijemo označiti kao $< m, \cdot >_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}$ (iako, općenito, $m \notin \mathbb{Q}$), dok je skup A, zapravo, skup $\{B_a \mid a \in A\}$ prereza $B_a =< a, \cdot >_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}$. Budući da je $\{m\} \leq A$, to je $B_a \subseteq B_m$ za svaki $a \in A$, dakle, i $B \equiv \bigcup\limits_{a \in A} B_a \subseteq B_m$. Skup A je neprazan pa su takvi i B_a, dakle, i B. Nadalje, $\mathbb{Q} \backslash B \supseteq \mathbb{Q} \backslash B_m \neq \emptyset$ i $\mathbb{Q} \backslash B_a < B_a$ za svaki $a \in A$, pa je i $\mathbb{Q} \backslash B = \mathbb{Q} \backslash (\bigcup\limits_{a \in A} B_a) = \bigcap\limits_{a \in A} (\mathbb{Q} \backslash B_a) < B_a$ za svaki $a \in A$. Slijedi zaključak da je B prerez u $(\mathbb{Q}, \leq)$. (Naime, B nema minimalnoga elementa. U protivnom, taj bi pripadao nekom B_a pa bi bio i $\min B_a$, što proturječi činjenici da je B_a prerez.) Kao i do sada, pojednostavnimo oznaku $B =< b, \cdot >_{\mathbb{Q}} \equiv b \in \mathbb{R}$, pa je $b \leq a$ za svaki $a \in A$, jer je $B_a \subseteq B$ za svaki $a \in A$. Prema tomu, b je donja međa skupa A. Neka je b' bilo koja donja međa skupa A, kojoj neka pripada prerez B'. Tada je $b' \leq a$ za svaki $a \in A$, pa je $B' \supseteq B_a$ za svaki $a \in A$. Stoga je $B' \supseteq B = \bigcup\limits_{a \in A} B_a$, dakle, $b' \leq b$, pa je b najveća donja međa od A, tj. $b = \inf A$. Savim slično se dokazuje tvrdnja o supremumu nepraznog i odozgor omeđenog skupa A. ■

Naredna dva teorema donose još dva važna svojstva skupa realnih brojeva .(Prvi od njih vrijedi i u $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.) Može se dokazati da su oni zajedno ekvivalentni Teoremu 1.4.7.

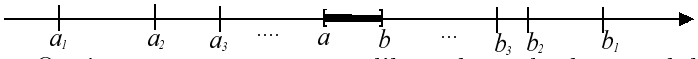
Teorem 1.4.8 (Arhimedov aksiom) *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Tada postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $na > b$.

Skica: 

Dokaz. Lako bismo mogli teorem dokazati primjenom Teorema 1.4.7, ali ćemo radije iskoristiti definiciju uređenoga polja $\mathbb{R}$ kao proširenja od $\mathbb{Q}$ pomoću prereza. Primijetimo, najprije, da za svaki $r \in \mathbb{R}$ postoje neki $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < q$ (r je neki prerez B u $(\mathbb{Q}, \leq)$, a uređaj na $\mathbb{R}$ je proširenje onoga na $\mathbb{Q}$). Nadalje, za svaki $r \in \mathbb{R}^+$ ($\equiv \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$) postoji neki $q \in \mathbb{Q}^+$ ($\equiv \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$) takav da je $q \leq r$. Zaista, budući da je $0 < r$, to za pripadne prereze vrijedi $B \subsetneqq B_0$, tj. $B_0 \setminus B \neq \emptyset$. Postoji, dakle, neki $q \in B_0 \setminus B \subseteq \mathbb{Q}$ što onda povlači da je $0 < q \leq r$. Ovo nam pokazuje da je dovoljno teorem dokazati u slučaju $a, b \in \mathbb{Q}$. Štoviše, po usklađenosti konstruiranih struktura od $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Q}$, dovoljno je teorem dokazati kad je $a = \frac{1}{m}$ i $b = p$, $m, p \in \mathbb{N}$. Ako je $m \leq p$ uzmimo $n = p^2 + 1$. Tada

je $na = n \cdot \frac{1}{m} \geq \frac{n}{p} = \frac{p^2+1}{p} > \frac{p^2}{p} = p = b$. Ako je, pak, $m > p$ onda postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $m = p + k$. Birajući $n = (p+k)^2$ dobivamo $na = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{p+k} = \frac{(p+k)^2}{p+k} = p + k > p = b$. ■

Teorem 1.4.9 (Cantorov aksiom) *Neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$ dan segment $[a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ i neka $n \leq m$ povlači $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$ (tj. $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$). Tada je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Skica: 

Dokaz. Ovaj teorem ćemo, za razliku od prethodnoga, dokazati primjenom Teorema 1.4.7. Označimo $A \equiv \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $B \equiv \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pa je očito $\emptyset \neq A \leq B \neq \emptyset$ (podskupovi od $\mathbb{R}$). Po Teoremu 1.4.7 postoji $\sup A \equiv a \in \mathbb{R}$ (svaki element od B je gornja međa od A). Jasno, $a_n \leq a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $a \leq b_n$ za svaki n. Kad, naime, ne bi bilo tako, postojao bi neki $n_0 \in \mathbb{N}$ za koji bi bilo $a > b_{n_0}$, što bi značilo da b_{n_0} nije gornja međa od A - protuslovlje. Slijedi da je $a_n \leq a \leq b_n$ za svaki n, tj. $a \in [a_n, b_n]$ za svaki n. Time je teorem dokazan. (Može se pokazati da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b]$ pri čemu je $a = \sup A$ i $b = \inf B$.) ■

Sjetimo se da skupovi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ imaju "jednako mnogo" ($\aleph_0$) elemenata, tj. da su ekvipotentni, dakle, beskonačni i prebrojivi. Dokazat ćemo da smo proširenjem skupa $\mathbb{Q}$ iracionalnim brojevima - prerezima do $\mathbb{R}$ pridodali "mnogo više" elemenata, tj. da je skup realnih brojeva beskonačan i neprebrojiv. Najprije dokažimo ovaj teorem:

Teorem 1.4.10 *U svakom intervalu $\langle a, b\rangle$ realnih brojeva, $a < b$, postoji neki racionalan broj, tj, $\langle a, b\rangle_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$.*

Dokaz. Obično se ovaj teorem dokazuje primjenom Arhimedova aksioma (Teorem 1.4.8), ali mi ćemo ga dokazati jednostavnije, tj. izravno jer to dopušta pristup pomoću prereza. Dokaz je, zapravo, sadržan u "uvodu" dokaza Teorema 1.4.8, tj. u dokazu za "reduciranje" Arhimedova aksioma s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Q}$. Zaista, tamo dokazana činjenica da, za svaki realni broj $r > 0$, postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < q \leq r$, može se na očit način (uzmimo $r' = \frac{r}{2}$) pojačati do $0 < q < r$. Prema tomu, za svaki $r \in \mathbb{R}$ je $\langle 0, r\rangle_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$. Sada primijetimo da ista konstrukcija vrijedi za svaki uređeni par $a < b$ u $\mathbb{R}$. ■

Teorem 1.4.11 *Skup iracionalnih brojeva $\mathbb{J}$ (dakle i $\mathbb{R} \supset \mathbb{J}$) nije prebrojiv.*

Dokaz. Dokazat ćemo da je svaki interval $\langle a, b\rangle_{\mathbb{J}}$, $a < b \in \mathbb{R}$, neprebrojiv skup. Dokaz se zasniva na ovoj

Tvrdnji: Ne postoji surjekcija iz $\mathbb{N}$ na $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Da bismo Tvrdnju dokazali, promatrajmo bilo koju funkciju $f : \mathbb{N} \to \langle a, b\rangle$. Načelo definicije indukcijom dopušta, za svaki $n \in \mathbb{N}$, definirati segment $I_n \equiv [a_n, b_n] \subset \langle a, b\rangle$ tako da bude $I_{n+1} \subseteq I_n$ i $f(n) \in \langle a, b\rangle \setminus I_n$.

Opišimo induktivni korak $n \longmapsto n+1$ eksplicite:

Neka su segmenti $I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n$, za koje je $f(k) \in \langle a,b\rangle \setminus I_k$ za svaki $k \in [1,n]_{\mathbb{N}}$, već definirani. Ako je $f(n+1) \leq a_n$, uzmimo $I_{n+1} = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$; ako je $a_n < f(n+1) < b_n$, uzmimo $I_{n+1} = \left[a_n, \frac{a_n+f(n+1)}{2}\right]$; ako je $f(n+1) \geq b_n$, uzmimo $I_{n+1} = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$.
Po Cantorovu aksiomu (Teorem 1.4.9) postoji neki realni broj $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Po konstrukciji mora biti $f(n) \neq x$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $x \in I_n$, a $f(n) \notin I_n$. Zaključujemo da za svaku funkciju $f : \mathbb{N} \to \langle a,b\rangle$ postoji neka točka $x \in \langle a,b\rangle \setminus f[\mathbb{N}]$. Time je tvrdnja dokazana.

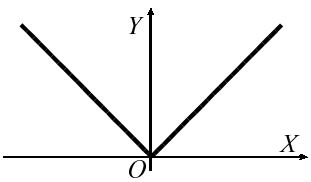
Tvrdnja povlači da interval $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije prebrojiv skup. Budući da je $\langle a,b\rangle_{\mathbb{Q}} \bigcup \langle a,b\rangle_{\mathbb{J}}$ disjunktna unija u kojoj je $\langle a,b\rangle_{\mathbb{Q}}$ prebrojiv skup, to $\langle a,b\rangle_{\mathbb{J}}$ mora biti neprebrojiv. (Lako se dokaže da je unija od dva prebrojiva skupa prebrojiv skup!) ■

1.4.3 Apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutnom vrijednošću na skupu realnih brojeva smatramo funkciju $\|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu pravilom

$$\| (x) \equiv |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} .$$

Definicija izravno povlači da je, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$ i $|x| \geq 0$, tj. vrijednosni skup $\| [\mathbb{R}] = \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$. Pritom je $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Primijetimo da je, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x = 1 \cdot |x| \equiv +|x|$ čim je $x \geq 0$, odnosno, $x = (-1) \cdot |x| \equiv -|x|$ čim je $x \leq 0$, pa u tom smislu često kažemo da je realni broj $x > 0$ **pozitivan** (ili da ima **predznak plus** - "+"), a da je realni broj $x < 0$ **negativan** (ili da ima **predznak minus** - "−"). (Broju $0 \in \mathbb{R}$ ne pridijeljujemo predznak!) Graf apsolutne vrijednosti je prikazan na crtežu dolje.



Budući da je $x^2 = (-x)^2$ ($x^2 \equiv x \cdot x$), to je $|x|^2 = x^2$. Nadalje, $|-x| = |x|$ i posebice $|x-y| = |y-x|$, za svaki par $x, y \in \mathbb{R}$. Navest ćemo još neka važna svojstva apsolutne vrijednosti:

(i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{R}^+) < r \Leftrightarrow -r < x < r$ (tj. $x \in < -r, r >$);

(ii) $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $|x+y| \leq |x| + |y|$ (**trokutna nejednakost**)

i, općenito, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R})$ $|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

($\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \equiv r_1 + \cdots + r_n$, v. pododjeljak 1.4.4);

(iii) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ |x - y| \geq |x| - |y|$;

(iv) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

i, općenito, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}) \quad |\prod_{i=1}^{n} x_i| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$

$(\prod_{i=1}^{n} r_i \equiv r_1 \cdot \ldots \cdot r_n$, v. pododjeljak 1.4.4);

(v) $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0)\ |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$;

Dokažimo npr. (ii): Ako je $x + y \geq 0$ onda je $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$, a ako je $x + y < 0$ onda je opet $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$. Opći slučaj se sada rutinski dokazuje potpunom indukcijom.

1.4.4 Potenciranje

Asocijativnosti zbrajanja i množenja u $\mathbb{R}$ dopuštaju da se, primjenom načela definiranja indukcijom, definiraju zbroj i umnožak od bilo koliko, ali *konačno*, realnih brojeva. Tako je za **zbroj** (ili **sumu**) od n realnih brojeva (**pribrojnika**) $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, u oznaci: $\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv x_1 + \ldots + x_n$, rekurzivna definicija ova:

$$\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1, \quad \sum_{i=1}^{k+1} x_i = (\sum_{i=1}^{k} x_i) + x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pritom je $(\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot y = \sum_{i=1}^{n} (x_i y)$. Posebice, za $x_1 = \ldots = x_n \equiv x$, dobivamo $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx$.

Umnožak (ili **produkt**) od n realnih brojeva (**faktora**) $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, u oznaci: $\prod_{i=1}^{n} x_i \equiv x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, rekurzivno definiramo ovako:

$$\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1, \quad \prod_{i=1}^{k+1} x_i = (\prod_{i=1}^{k} x_i) \cdot x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ako je pritom $x_1 = \ldots = x_n \equiv x$, onda se umnožak $\prod_{i=1}^{n} x_i$ naziva **n-tom potencijom** broja x i označuje kao x^n; za x se kaže da je **baza**, a za n da je **eksponent** potencije x^n. Po definiciji je, dakle, $x^1 = x$ i $x^{k+1} = x^k \cdot x$, $k \in \mathbb{N}$. Odatle potpunom indukcijom zaključujemo:

$(\star) \qquad x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{m \cdot n}, \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n,$

te da, za ma koje $x, y \in \mathbb{R}$ i $m, n \in \mathbb{N}$., iz $0 \leq x < y$ i $n \in \mathbb{N}$ slijedi $x^n < y^n$. Nadalje, ako je $x > 1$ $(0 \leq x < 1)$ onda je i $x^n > 1$ $(0 \leq x^n < 1)$. Napokon, za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $x^m < x^n$ čim je $m < n$ u $\mathbb{N}$.

Potenciranje prirodnim eksponentima $(\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N})$ proširujemo **na** negativne **cjelobrojne eksponente** $(-n \in \mathbb{Z})$, ali za $x \neq 0$, stavljajući: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ i $x^0 = 1$. Pokazuje se da i dalje vrijede jednakosti $(\star)$.

Konačnim funkcijskim kompozicijama sastavljenim od potenciranja, množenja i zbrajanje dobivamo vrlo važan skup funkcija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ - tzv. polinome. Točna definicija jest ova: Neka su dani $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Funkciju

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

nazivamo **polinomom** (n-toga **stupnja**). Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo **koeficijentima** polinoma p. (Oni posve određuju taj polinom.)

U točki 1.4.1 smo spomenuli **decimalni način zapisivanja** prirodnih brojeva navodeći oznake (i nazive): 1 (jedan), 2 (dva), $\cdots$, 9 (devet) i 10 (deset). Cijeli broj 0 nazvali smo nulom ili ništicom. Brojeve $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ nazivamo i **decimalnim znamenkama**. Decimalni zapis prirodnog (pa onda i cijelog i racionalnog) broja zasniva se na ovoj činjenici:

Za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji jedan jedini polinom p kojemu su koeficijenti decimalne znamenke i za koji je $p(10) = m$.

Ako je takav polinom p određen koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tj. $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, onda je pripadni decimalni zapis broja $m = p(10)$ upravo $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$. Primjerice, prirodni broj $7 \cdot (10)^3 + 4 \cdot (10)^2 + 0 \cdot (10)^1 + 5$ ima decimalni zapis 7405. Dakle, broj 10 je "baznčan" za decimalni sustav - odatle naziv!. Na isti način zapisujemo i negativne cijele brojeve $(-m)$ stavljajući znak "$-$" ispred zapisa (za m). Napomenimo da se pored decimalnoga rabe i neki drugi sustavi za zapisivanje cijelih brojeva. Primjerice, **binarni sustav** u kojemo ulogu "baznčnoga" broja preuzima broj 2, pa taj sustav ima samo dvije **binarne znamenke** - $0, 1$.

Osvrnimo se sada i na decimalno zapisivanje racionalnih brojeva. Ako je racionalan broj $q = \frac{m}{10^n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), nazivamo ga **decimalnim brojem**. Neka je $m > 0$ i neka je njegov decimalni zapis $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$, tj. $m = a_k 10^k + \cdots + a_1 10 + a_0$. Tada je $q = a_k 10^{k-n} + \cdots + a_1 10^{1-n} + a_0 10^{-n}$, pa se za **decimalni zapis decimalnoga broja** q uzima:

$a_k \cdots a_n, a_{n-1} \cdots a_0$, kad je $k \geq n$;

$0, a_k \cdots a_0$, kad je $k = n - 1$;

$0, 0 \cdots 0 a_k \cdots a_0$, kad je $k \leq n - 2$ ($n - k - 1$ ništica od zareza do a_k).

U slučaju $m < 0$ postupamo kao i u slučaju $m > 0$ dodajući znak "$-$" ispred zapisa. Primjerice, $347,18$ je decimalni zapis (decimalnoga broja) $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7 + 1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{34718}{10^2}$; $-0,695$ je decimalni zapis broja $-6 \cdot 10^{-1} - 9 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-3} = \frac{-695}{10^3}$; $0,000201$ je decimalni zapis broja $2 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-6} = \frac{201}{10^6}$.

Postoje, međutim, i nedecimalni racionalni brojevi, npr. $\frac{1}{3}$. Ipak, može se pokazati (v. §1.4.6 Vježbe, Zadatak 12.) da je svaki racionalan broj ili decimalan ili dopušta tzv. **periodički decimalni** zapis (neke znamenke ili neke skupine znamenaka iza zareza se pravilno ponavljaju). Primjerice, $\frac{1}{3} \equiv 0,333 \cdots \equiv 0,\dot{3}$; $\frac{1219}{990} \equiv 1,2313131 \cdots \equiv 1,2\dot{3}\dot{1}$.

Sada bi trebalo "otkriti" pogodna tehnička pravila (sheme) za izvođenje računskih operacija $(+, -, \cdot, \div)$ u skupu $\mathbb{Q}$ s decimalnim zapisom njegovih elemenata. No, ona su čitatelju dobro poznata iz osnovne škole, pa ćemo ih ovdje ispustiti.

Sjetimo se da smo potenciranje bili definirali samo za cjelobrojne eksponente. Sljedeći "teorem o jedinstvenosti baze" jamči mogućnost potenciranja racionalnim eksponentom (tzv. korjenovanje).

Teorem 1.4.12 *Neka su dani $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, i $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji točno jedan $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takav da je $x^n = a$.*

U dokazu ćemo trebati neka svojstva ("neprekidnost") množenja i potenciranja realnih brojeva, koja ćemo iskazati dvjema lemama.

Lema 1.4.2 *Neka su $x, y, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Tada postoje $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$, takvi da vrijedi:*

$$(\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad (|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2) \Rightarrow |(x+s)(y+t) - xy| < \epsilon.$$

Dokaz. Uzmimo $\delta_1 = \min\{1, \frac{\epsilon}{2(1+|y|)}\}$ i $\delta_2 = \frac{\epsilon}{2(1+|x|)}$, pa su $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ i vrijedi: $|(x+s)(y+t) - xy| = |(x+s)t + sy| \leq |t|(|x| + |s|) + |s||y| < |t|(|x| + 1) + |s|(1 + |y|) \leq \delta_2(|x| + 1) + \delta_1(1 + |y|) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. ■

Lema 1.4.3 *Za svaki $x, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takav da vrijedi:*

$$(\forall s \in \mathbb{R}) \quad |s| < \delta \Rightarrow |(x+s)^n - x^n| < \epsilon.$$

Dokaz. Dokazujemo potpunom indukcijom. Za $n = 1$ je $|(x+s)^1 - x^1| = |s|$, pa je dovoljno uzeti neki $\delta < \epsilon$. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za bilo koji $n \in \mathbb{N}$. Neka je $y = x^n$, pa po Lemi 1.4.2 postoje brojevi $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ takvi da iz $|s| < \delta_1$ i $|t| < \delta_2$ slijedi $|(x+s)(x^n + t) - x^{n+1}| < \epsilon$. Po induktivnoj pretpostavci, za $\delta_2 > 0$ postoji $\delta_3 > 0$ takav da $|s| < \delta_3$ povlači $|(x+s)^n - x^n| < \delta_2$. Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$, pa je $\delta > 0$ i, za svaki $s \in \mathbb{R}$, iz $|s| < \delta$ slijedi $|s| < \delta_1$ i $|(x+s)^n - x^n| < \delta_2$. Uzmimo $t = (x+s)^n - x^n$, pa to, skupa s prethodnim, jamči da $|s| < \delta$ povlači $|(x+s)^{n+1} - x^{n+1}| = |(x+s)(x+s)^n - x^{n+1}| = |(x+s)(x^n + t) - x^{n+1}| < \epsilon$. ■

Dokaz. (Teorema 1.4.12) Neka je $A = \{r \mid r \geq 0 \wedge a < r^n\} \subseteq \mathbb{R}$. Budući da $r > \max\{a, 1\}$ povlači $r^n > r > a$, to je $A \neq \emptyset$. Nadalje, $\{0\} \leq A$ pa je A omeđen odozdol. Po teoremu 1.4.7 postoji $\inf A \equiv x$ i očito je $x \geq 0$. Tvrdimo: $x^n = a$. Pretpostavimo protivno, tj. $x^n \neq a$, dakle, ili $x^n > a$ ili $x^n < a$. Tada bi bio $\epsilon = |a - x^n| > 0$. Odabravši za taj ϵ, po Lemi 1.4.3, broj $\delta > 0$ dobili bismo da, za svaki $s \in \mathbb{R}$, vrijedi: $|s| < \delta \Rightarrow |(x+s)^n - x^n| < \epsilon$. Sada, ako bi bilo $x^n > a$, bilo bi $x^n - a = \epsilon$, dakle, $x > 0$. Uzmimo $s < 0$ tako da bude $|s| < \delta$ i $|s| < x$. To će povlačiti $0 < x + s < x$ i $0 < x^n - (x+s)^n =$

$|x^n - (x+s)^n| < \epsilon = x^n - a$, dakle, $a < (x+s)^n$. Proizlazi da je $x + s \in A$, što protuslovi činjenici $x + s < x = \inf A$. Preostaje mogući $x^n < a$, pri čemu $\epsilon = a - x^n$. Uzmimo takav $s > 0$ da bude $s \leq \delta$, pa će biti $x < x + s$ i $0 < (x+s)^n - x^n = |(x+s)^n - x^n| < \epsilon = a - x^n$. Slijedi da je $(x+s)^n < a$ pa je $x + s \in A$. Budući da je $x = \inf A$ i $s > 0$, to postoji $r \in A$ takav da je $x \leq r < x + s$. Nu, po definiciji za A mora biti $a < r^n < (x+s)^n$, što protuslovi već dokazanoj nejednakosti $a > (a+s)^n$. Ovime smo dokazali obstojnost realnoga broja $x \geq 0$ za koji je $x^n = a$. Dokažimo i njegovu jedinstvenost! Pretpostavimo da pored x postoji i broj $y \geq 0$ za koji je $y^n = a$. Kad bi bilo $y < x$, bilo bi i $a = y^n < x^n = a$ - nemoguće, a isto povlači i pretpostavka $y < x$. Preostaje $x = y$. ■

1.4.5 Kombinatoričke osnove

Načelo definicije indukcijom dopušta definirati funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pravilom $f(1) = 1$, i $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$. To je tzv. **faktorijel**-funkcija i obično ju se označuje s $f(n) = n!$ ("en-faktorijel"). Dakle, $1! = 1$, $2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $\cdots$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n \cdot (n+1)$. Korisno je dodatno definirati $0! = 1$.

Vrlo važnu ulogu imaju prirodni brojevi koji se dobivaju pomoću faktorijela na sljedeći način: Neka su $n, k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $k \leq n$. Broj $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ označujemo s $\binom{n}{k}$ (čitamo: en povrh ka) i nazivamo **binomnim koeficijentom** (v. Teorem 1.4.14). Lako je dokazati sljedeća svojstva binomnih koeficijenata:

(i) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$;

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (*simetričnost*),
što povlači da za binomne koeficijente
$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$
vrijedi:
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}, \cdots;$

(iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $k < n$.

Koristeći (iii) se, indukcijom po n, dokazuje da je svaki binomni koeficijent zaista prirodan broj. Binomne koeficijente je zgodno prikazati pomoću sljedeće sheme, tzv. **Pascalova trokuta**:

n=0(k=0)	**1**
n=1(k=0,1)	**1 1**
n=2(k=0,1,2)	**1 2 1**
n=3(k=0,1,2,3)	**1 3 3 1**
n=4(k=0,1,2,3,4)	**1 4 6 4 1**
n=5(k=0,1,2,3,4,5)	**1 5 10 10 5 1**
n=6(k=0,1,2,3,4,5,6)	**1 6 15 20 15 6 1**
n=7(k=0,1,2,3,4,5,6,7)	**1 7 21 35 35 21 7 1**

(Svaki "unutrašnji" član u $(n+1)$-vom retku jest zbroj "gornjih susjeda" iz n-toga retka, a "rub" tvore jedinice!)

Teorem 1.4.13 *Za svaki par $x, y \in \mathbb{R}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi tzv.* ***binomna formula***:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.\end{aligned}$$

Dokaz. Ilustracije radi, sjetimo se ove formule u dobro poznatim slučajevima $n = 1, 2, 3$: $(x+y)^1 = x + y$, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Budući da ćemo teorem dokazati potpunom indukcijom, prvi je korak načinjen. Provedimo induktivni korak $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}&(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) =_{\text{(induktivna pretpostavka)}} \\ &\quad (\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k)(x+y) = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} = \\ &\quad x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1} = \\ &\quad \text{(\"pomičemo\" indeks } k \text{ u } k+1 \text{ u drugoj sumi, pa u pribrojnicima mora } k \text{ postati } k\text{-}1\text{)} \\ &\quad x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-(k-1)}y^{(k-1)+1} + y^{n+1} = \\ &\quad x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1})x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} =_{\text{(svojstvo (iii))}} \\ &\quad x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k,\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. Jednakost $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ je posljedica uočene simetričnosti binomnih koeficijenata i, dakako, komutativnosti zbrajanja i množenja u $\mathbb{R}$. ■

Korolar 1.4.2 (i) $(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$;

(ii) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$;

(iii) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

Dokaz. Tvrdnja (i) slijedi iz Teorema 1.4.13 zamjenom y sa $-y$, tj. $(x-y)^n = (x+(-y))^n$, dok se (ii) dobiva iz Teorema 1.4.14 u slučaju $x = y = 1$. Tvrdnja (iii) se dobiva iz (i) stavljajući $y = x$. ■

Definicija 1.4.3 ***Permutacijom*** (*ili* ***premjestbom***) n***-tog reda*** *nazivamo svaku bijekciju* $[1, n]_{\mathbb{N}} \to [1, n]_{\mathbb{N}}$.

Izjednačujući takvu bijekciju s njezinom uređenom (po domeni) slikom, smijemo reći da je permutacija n-toga reda svaki **n-slog** (ili **uređena n-torka**) $(i_1, \cdots, i_n)$ međusobno različitih (dakle, svih) elemenata od $[1,n]_{\mathbb{N}}$, tj. smijemo reći da je permutacija n-toga reda svaki uređaj skupa $[1,n]_{\mathbb{N}}$. Broj i_j, $1 \leq j \leq n$, nazivamo **j-tom koordinatom** sloga $(i_1, \cdots .i_n)$. Očito je da se gornja definicija može formalno prenijeti na svaki konačni skup $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, pa tada govorimo o **permutaciji skupa** X.

Primjer 1.4.1 Popišimo sve permutacije skupa $X = \{a, b, c\}$. To su:
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Teorem 1.4.14 *Kardinalni broj P_n skupa svih permutacija n-toga reda jest $n!$.*

Dokaz. Po definiciji (komentaru) je svaka permutacija n-tog reda neki element $(i_1, \cdots .i_n)$ direktnoga produkta $[1,n]_{\mathbb{N}} \times \cdots \times [1,n]_{\mathbb{N}} \equiv ([1,n]_{\mathbb{N}})^n$ kojemu su sve koordinate međusobno različite. Za prvu koordinatu imamo, dakle, n mogućnosti izbora, za drugu - $n-1$, $\cdots$, za zadnju (n-tu) - jednu mogućnost. Po "produktnom pravilu" (v. §1.4.6 Vježbe, Zadatak 25.) je $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$. ■

Reći ćemo da su u permutaciji $(i_1, \cdots .i_j, \cdots, i_k, \cdots, i_n)$ koordinate i_j i i_k, $1 \leq j < k \leq n$, tvore **inverziju**, ako je $i_k < i_j$. Primjerice, u permutaciji trećega reda $(3, 1, 2)$ inverziju tvore 3 i 1 te 3 i 2, dok u permutaciji $(1, 2, 3)$ nema inverzija. Ako u permutaciji $(i_1, \cdots .i_n)$ ima ukupno paran broj (uključujući ništicu) inverzija, govorimo o **parnoj** permutaciji, a u protivnom o **neparnoj** permutaciji. Primjerice, $(2, 3, 1)$ ima točno dvije inverzije pa je to parna permutacije, dok je $(3, 2, 1)$ neparna permutacija jer ima ukupno tri inverzije.

Radi li se o permutacijama konačnog skupa X, $|X| = n$, najprije treba indeksirati njegove elemente zapisom $X = \{x_i \mid i \in [1,n]_{\mathbb{N}}\}$, tj. odrediti "osnovnu permutaciju" $(x_1, \cdots, x_n)$, a dalje se radi vodeći računa samo o indeksima. (Indeksirati elemente skupa X, $|X| = n$, zapravo znači odabrati neku bijekciju $f : [1,n]_{\mathbb{N}} \to X$ i zapisati $X = \{f(i) = x_i \mid i \in [1,n]_{\mathbb{N}}\} = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Da se svaki konačan skup može indeksirati slijedi iz Teorema 1.4.6)

Definicija 1.4.4 ***Kombinacijom n-tog reda i r-tog razreda*** *smatramo svaki r-člani podskup $\{i_1, \cdots, i_r\}$ od $[1,n]_{\mathbb{N}}$, dopuštajući i slučaj $r = 0$, tj. prazni podskup $\emptyset \subset [1,n]_{\mathbb{N}}$.*

Definicija se na očit način prenosi na svaki konačni skup $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, pa se tada govori o **kombinaciji r-toga razreda skupa** X. Primijetimo da mora biti $0 \leq r \leq n$.

Primjer 1.4.2 Popišimo sve kombinacije drugoga razreda skupa $X = \{a, b, c\}$. To su: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$.

Teorem 1.4.15 *Kardinalni broj K_n^r skupa svih kombinacija n-tog reda i r-tog razreda jest binomni koeficijent $\binom{n}{k}$.*

Dokaz. Za $r = 0$ i $r = n$ postoje, za svaki $n \in \mathbb{N}$, jedinstveni podskupovi $\emptyset$ i $[1, n]_{\mathbb{N}}$ od $[1, n]_{\mathbb{N}}$ redom, što se slaže s $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Ako je $n = 1$ to su i jedini podskupovi od $[1, n]_{\mathbb{N}} = \{1\}$. Neka je sada $n \geq 2$ i $1 \leq r \leq n - 1$. Primijetimo da se svaka permutacija može dobiti izborom neke kombinacije permitirajući tu kombinaciju i njezin komplement. Budući da

- $[1, n]_{\mathbb{N}}$ ima ukupno K_n^r (=?) r-članih podskupova,
- svaki r-člani skup ima ukupno P_r permutacija,
- svaki $(n - r)$-člani skup ima ukupno P_{n-r} permutacija,

to produktno pravilo povlači: $P_n = K_n^r \cdot P_r \cdot P_{n-r}$.

Slijedi: $K_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{k}$. ■

Definicija 1.4.5 ***Varijacijom n-tog reda i r-tog razreda*** *smatramo svaki r-slog $(i_1, \cdots, i_r)$ međusobno različitih elemenata od $[1, n]_{\mathbb{N}}$, dopuštajući i slučaj $r = 0$, tj. "prazni slog" $\emptyset$.*

Definicija se prirodno prenosi na svaki konačni skup $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, pa tada govorimo o **varijaciji r-toga razreda skupa** X. Primijetimo da zbog različitosti elemenata mora biti $0 \leq r \leq n$.

Primjer 1.4.3 Popišimo sve varijacije drugoga reda skupa $X = \{a, b, c\}$. U prethodnomu primjeru smo ispisali sve pripadne kombinacije drugoga razreda: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Preostaje ih permutirati, što daje: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

Korolar 1.4.3 *Kardinalni broj V_n^r skupa svih varijacija n-tog reda i r-tog razreda jest $n \cdot (n - 1) \cdot \cdots \cdot (n - r + 1) \equiv (n)_r$.*

Dokaz. Iz Definicije 1.4.5 proizlazi da su varijacije isto što i permutacije odgovarajućih kombinacija. Prema tomu, Teoremima 1.4.15 i 1.4.16 i produktnom pravilu zaključujemo:

$V_n^r = K_n^r \cdot P_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot r! = n \cdot (n - 1) \cdot \cdots \cdot (n - r + 1)$. ■

U §1.1.2 smo postulirali da skup ne smije sadržavati međusobno jednakih elemenata, tj. da se elementi smiju pojavljivati samo kao "jedinstveni primjerci". Praktične potrebe, međutim, nalažu promatranje i takvih "skupova" u kojima se elementi pojavljuju u više primjeraka. To vodi k pojmu **multiskupa** M (nad nekim skupom S). Ne ulazeći u tančine, $M = \{n_s \cdot s \mid s \in S, n_s \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, gdje $n_s \cdot s$ kazuje da se element $s \in S$ pojavljuje u n_s primjeraka u multiskupu M. Primjerice, ako je skup $S = \{a, b, c, d\}$, jedan multiskup nad njim može biti $M = \{2 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 0 \cdot d\} = \{a, a, b, b, b, c\}$. Ovdje će nas, u prvom redu, zanimati multiskupovi nad početnim komadima $[1, k]_{\mathbb{N}}$ skupa prirodnih brojeva, tj. $M = \{n_1 \cdot 1, \cdots, n_k \cdot k\}$, $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$.

Pritom zbroj $n_1 + \cdots + n_k = n$ smatramo kardinalnim brojem $|M|$ toga multiskupa. Svrsishodno je takav multiskup označiti s $M(n; n_1, \cdots, n_k)$. Primjerice, $k = 3$ i $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 1$ posve određuju multiskup $M(7; 2, 4, 1) = \{2 \cdot 1, 4 \cdot 2, 1 \cdot 3\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}$ od 7 elemenata.

Definicija 1.4.6 ***Permutacijom s ponavljanjem*** $(n = n_1 + \cdots + n_k)$-***toga reda*** *nazivamo svaki uređaj multiskupa* $M(n; n_1, \cdots, n_k)$. *(Pritom, dakako, ne razlikujemo uređaje u kojima primjerci istih elemenata međusobno mijenjaju mjesta.)*

Definicija se prirodno prenosi na svaki konačni skup $X = \{x_1, \cdots, x_k\}$, pa tada govorimo o **permutacijama s ponavljanjem skupa** X ili o **permutacijama multiskupa** $M \equiv X(n; n_1, \cdots, n_k) = \{n_1 \cdot x_1, \cdots, n_k \cdot x_k\}$, $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Primjer 1.4.4 Neka je M multiskup (od) svih slova riječi TATA, tj. $M = \{2{\cdot}\mathrm{A}, 2{\cdot}\mathrm{T}\} = \{\mathrm{A,A,T,T}\}$. Ispišimo sve njegove permutacije. To su: AATT, ATAT, ATTA, TAAT, TATA, TTAA. (Uočimo: $k = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n = 4$).

Teorem 1.4.16 *Kardinalni broj* $P_{n;n_1,\cdots,n_k}$ *skupa svih permutacija s ponavljanjem* $(n = n_1 + \cdots + n_k)$*-toga reda jest* $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$.

Dokaz. Pretpostavimo li da su u multiskupu $M(n; n_1, \cdots, n_k)$ svi elementi međusobno različiti, smjeli bismo ga poistovjetiti s početnim komadom $[1, n]_{\mathbb{N}}$, pa bi ukupan broj permutacija bio $P_n = n!$. Međutim, n_1 primjeraka elementa 1 ne razlikujemo, pa tako ni njihove permutacije kojih je $P_{n_1} = n_1!$. Isto vrijedi za n_2 primjeraka elementa 2, ..., n_k primjeraka elementa k. Primijenjujući produktno pravilo dobivamo
$P_n = P_{n;n_1,\cdots,n_k} \cdot P_{n_1} \cdots P_{n_k}$, pa je $P_{n;n_1,\cdots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$. ■

Napomena 1.4.2 Jednostavnosti radi, u oznaku za kardinalni broj permutacija s ponavljanjem često upisujemo samo one od brojeva n_i, $i \in \{1, \cdots, k\}$, koji su veći od 1 ($1! = 1$). Primjerice, multiskup $M = X(12; 5 \cdot a, 1{\cdot}b, 1{\cdot}c, 1{\cdot}d, 1{\cdot}e, 2{\cdot}f, 1{\cdot}g) = \{a, a, a, a, a, b, c, d, e, f, f, g\}$ ima $P_{12;5,1,1,1,1,2,1} = P_{12;5,2} = \frac{12!}{5!2!} = 2652$ permutacija.

Promatrajmo opet početni komad $[1, n]_{\mathbb{N}}$ uređenoga skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Neka se, za svaki $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, multiskup M_i sastoji od r primjeraka, $r \in \mathbb{N}$, broja i. Dakle, $M_1 = \{1, \cdots, 1 \mid r \text{ primjeraka}\} = \{r \cdot 1\}$, ..., $M_n = \{r \cdot n\}$. Neka je multiskup $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \{r \cdot 1, \cdots, r \cdot n\}$. Primijetimo da je $M = M(nr; r, \cdots, r)$.

Definicija 1.4.7 ***Kombinacijom s ponavljanjem*** n***-tog reda i*** r***-tog razreda*** *nazivamo svaki* r*-člani podmultiskup multiskupa* $M(nr; r, \cdots, r)$, *dopuštajući i slučaj* $r = 0$ *- praznoga podmultiskupa.*

Definicija se na očit način prenosi na svaki konačni skup $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Pritom govorimo o **kombinacijama s ponavljanjem r-toga razreda skupa** X ili o **kombinacijama r-toga razreda multiskupa** $M \equiv X(nr; r \cdot x_1, \cdots, r \cdot x_n)$.

Primjer 1.4.5 Popišimo sve kombinacije s ponavljanjem trećega razreda skupa $X = \{a, b\}$. Ovdje je $n = 2$ i $r = 3$, pa je pripadni multiskup $M = \{a, a, a, b, b, b\}$. Tražene kombinacije jesu: $\{a, a, a\}$, $\{a, a, b\}$, $\{a, b, b\}$, $\{b, b, b\}$.

Napomena 1.4.3 Primijetimo da se u Definiciji 1.4.7 ništa bitno ne mijenja ako se umjesto multiskupa $M(nr; r, \cdots, r)$ uzme bilo koji multiskup $M(m; r_1, \cdots, r_n)$, pri čemu je $\min\{r_i \mid i \in [1, n]_{\mathbb{N}}\} \geq r$ $(r_1 + \cdots + r_n = m)$. Slično, smije se raditi i u svakom multiskupu $M \equiv X(m; r_1 \cdot x_1, \cdots, r_n \cdot x_n)$ nad skupom $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, čim se naglasi o kojemu razredu $r \leq \min\{r_i \mid i \in [1, n]_{\mathbb{N}}\}$ je riječ.

Teorem 1.4.17 *Kardinalni broj $K_n'^r$ skupa svih kombinacija s ponavljanjem n-tog reda i r-tog razreda jest binomni koeficijent $\binom{r+n-1}{r}$.*

Dokaz. Budući da su kombinacije s ponavljanjem definirane kao podmultiskupovi, može ih se indeksiranjem interpretirati i kao neke kombinacije (bez ponavljanja). Razmišljajmo ovako: U bilo kojoj kombinaciji s ponavljanjem n-tog reda u r-tog razreda, budući da uređaj nije bitan, smijemo poredati prvo sve primjerke (ako ih ima) broja 1, za njima sve primjerke (ako ih ima) broja 2 itd. do svih primjeraka (ako ih ima) broja n. Sada svakom primjerku broja 1 pridružimo njegov redni broj, tj. broj njegova mjesta u postavljenomu poretku (s lijeva na desno), svakom primjerku broja 2 njegov redni broj više 1 itd. svakom primjerku broja n njegov redni broj više $n - 1$. Tako dobivamo kombinaciju (bez ponavljanja) $(r + n - 1)$-vog reda i r-tog razreda. Nu, vrijedi i obratno, tj. obratnim postupkom se svakoj kombinaciji $(r + n - 1)$-vog reda i r-tog razreda pridružuju jedinstvena kombinacija s ponavljanjem n-tog reda u r-tog razreda. Po Teoremu 1.4.16 sada zaključujemo: $K_n'^r = K_{r+n-1}^r = \binom{r+n-1}{r}$. ■

Definicija 1.4.8 ***Varijacijom s ponavljanjem n-tog reda i r-tog razreda*** *nazivamo svaki r-slog iz multiskupa $M(nr; r, \cdots, r)$, dopuštajući i slučaj $r = 0$ - prazni slog.*

Definicija se prirodno prenosi na svaki konačni skup $X = \{x_1, \cdots x_n\}$ pa tada govorimo o **varijacijama s ponavljanjem r-toga razreda skupa** X ili o **varijacijama r-toga razreda multiskupa** $M \equiv X(nr; rx_1, \cdots, rx_n)$.

Primijetimo da Napomena 1.4.3 vrijedi i za Definiciju 1.4.8. Zaista, ništa se bitno ne mijenja, ako se umjesto multiskupa $M(nr; r, \cdots, r)$ uzme bilo koji multiskup $M(m; r_1, \cdots, r_n)$, gdje je $\min\{r_i \mid i \in [1, n]_{\mathbb{N}}\} \geq r$. Isto tako,

smije se rabiti svaki multiskup $M \equiv X(m; r_1 \cdot x_1, \cdots, r_n \cdot x_n)$ nad skupom $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, čim se odredi razred $r \leq \min\{r_i \mid i \in [1,n]_{\mathbb{N}}\}$.

Primjer 1.4.6 Popišimo sve varijacije s ponavljanjem trećega razreda skupa $X = \{a, b\}$. Ovdje je $n = 2$ i $r = 3$ pa je pripadni multiskup $M = \{a, a, a, b, b, b\}$. Preostaje permutirati sve kombinacije s ponavljanjem iz Primjera 1.4.5. Tako dobivamo: (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (a, b, b), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b).

Korolar 1.4.4 *Kardinalni broj $V_n'^r$ skupa svih varijacija s ponavljanjem n-tog reda i r-tog razreda jest potencija n^r.*

Dokaz. Dovoljno bi bilo primijetiti da su varijacije s ponavljanjem, zapravo, permutacije odgovarajućih kombinacija s ponavljanjem, pa onda izvući traženi zaključak. Ipak, korolar ćemo dokazati izravno. Budući da je svaka varijacija s ponavljanjem neki uređeni r-slog iz multiskupa $M(nr; r, \cdots, r)$, može ju se dobiti tako da se na prvo mjesto stavi bilo koji broj iz $[1,n]_{\mathbb{N}}$, na drugo mjesto isto tako itd. na r-to mjesto opet bilo koji broj. Po produktnomu pravilu slijedi $V_n'^r = n \cdots n$ (r puta), dakle, $V_n'^r = n^r$. ■

1.4.6 Vježbe

1. Neka su X, Y i Z skupovi i $X \subseteq Y \subseteq Z$. Ako je $|X| = |Z|$ onda je i $|Y| = |Z|$. (Ova činjenica se koristi u dokazu antisimetričnosti relacije $\leq$ na klasi svih kardinalnih brojeva; v. Definiciju 1.3.7)

Dokaz. Budući da je $|X| = |Z|$, postoji neka bijekcija $f : Z \to X$. Načelo definicije indukcijom dopušta definirati funkcije $f^1 = 1_Z$ i $f^{n+1} = i f f^n : Z \to Z$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $i : X \hookrightarrow Z$ inkluzija. Definirajmo funkciju $g : Z \to Y$ pravilom $g(z) = f(z)$ za svaki $z \in Z' \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(Z \setminus Y)$ i $g(z) = z$ za svaki $z \in Z \setminus Z'$. Nije teško provjeriti da je g bijekcija, dakle, $|Y| = |Z|$.

2. Reći ćemo da je broj $n \in \mathbb{N}$ **paran** (**neparan**), ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2k$ ($n = 2k - 1$). Dokazati da je svaki prirodni broj ili paran ili neparan, te da je skup svih parnih (neparnih) prirodnih brojeva ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$.

3. Potpunom indukcijom dokazati ove tvrdnje:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

(ii) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(iv) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2 \quad (= \frac{n^2(n+1)^2}{4})$;

(v) $(\forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\})(\exists k \in \mathbb{N}) \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$.

4. Reći ćemo da $m \in \mathbb{N}$ **dijeli** $n \in \mathbb{N}$ (ili da je n **djeljiv s** m) i pisati m/n, ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = mk$. Očito je da je svaki $n \in \mathbb{N}$ djeljiv s 1 i s n. Reći ćemo da je prirodni broj p, $p \geq 2$, **prost** broj (ili **prim-broj**), ako je p djeljiv samo s 1 i s p. Dokazati da je svaki prirodni broj n jednak umnošku nekih prostih brojeva, te da je skup P svih prostih brojeva ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$.

5. Broj $k \in \mathbb{N}$ nazivamo **zajedničkim (više)kratnikom** od $m, n \in \mathbb{N}$, ako m/k i n/k. Dokazati da je, za svaki $m, n \in \mathbb{N}$, skup svih zajedničkih višekratnika od m i n neprazan i da ima minimalni element, tzv. **najmanji zajednički (više)kratnik** $V(m, n)$ brojeva m i n.

6. Broj $l \in \mathbb{N}$ nazivamo **zajedničkom mjerom** od $m, n \in \mathbb{N}$, ako l/m i l/n. Dokazati da je, za svaki $m, n \in \mathbb{N}$, skup svih zajedničkih mjera od m i n neprazan i da ima maksimalni element, tzv. **najveću zajedničku mjeru** $M(m, n)$ brojeva m i n.

7. Pojmovi najmanjega zajedničkog višekratnika $V(m, n)$ i najveće zajedničke mjere $M(m, n)$ se proširuju (po uzoru na 5. i 6.) na svaki par cijelih brojeva $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dokazati:

(i) $V(m, n) = V(n, m)$ i $M(m, n) = M(n, m)$;

(ii) Svaka zjednička mjera od m i n dijeli $M(m, n)$;

(iii) $V(m, n)$ dijeli svaki zajednički višekratnik od m i n;

(iv) $V(km, kn) = kV(m, n)$.

8. Reći ćemo da su cijeli brojevi $m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ **relativno prosti**, ako je $M(m, n) = 1$. Dokazati:

(a) $M(m, n) = 1 \Rightarrow (\exists k, l \in \mathbb{Z})\ mk + nl = 1$;

(b) $M(m, n) = 1 \Rightarrow mn/V(m, n)$.

9. Dokazati: $(\forall m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})\ V(m, n)M(m, n) = mn$.

10. Neka je $[(m, n)]$ ekvivalencijski razred u skupu $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \times \mathbb{N}$ definiran u §1.4.2. Dokazati da postoje $m', n' \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \times \mathbb{N}$ takvi da je $(m', n') \in [(m, n)]$ i $M(m', n') = 1$.

11. Dokazati da u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ne postoje minimalni ni maksimalni element, te da, za svaki $q \in \mathbb{Q}$, ne postoji neposredni sljedbenik ni neposredni prethodnik od q.

12. Dokazati da i u skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ ne vrijedi Cantorov aksiom (v. Teorem 4.1.9).

13. Dokazati da za svaki $q \in \mathbb{Q}$ postoji ili decimalni ili periodički decimalni zapis i obratno, tj. ako realni broj dopušta decimalni ili periodički decimalni zapis onda je on racionalan.

14. Realni broj $a \in \mathbb{R}$ nazivamo **algebarskim brojem**, ako postoji polinom $x \mapsto p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ s *racionalnim* koeficijentima $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{Q}$ kojemu je a nultočka, tj. za koji je $p(a) = 0$. Preostale realne brojeve nazivamo **transcendentnima**. (Primjerice, $\sqrt{2}$ je algebarski broj, dok je, za svaki krug, omjer njegova opsega i promjera transcendentan broj "pi" - $\pi \approx 3,14159\cdots$.) Dokazati da je $\mathbb{Q}$ pravi podskup skupa $\mathbb{A}$ svih algebarskih brojeva, te da je $\mathbb{A}$ prebrojiv, tj. $|\mathbb{A}| = \aleph_0$.

15. Dokazati da je skup svih transcendentnih brojeva ekvipotentan skupu iracionalnih brojeva $\mathbb{J}$.

16. Dokazati da je broj $\sqrt{p_1 \cdots p_k}$ iracionalan čim su $p_1, \cdots, p_k$ međusobno različiti prosti brojevi.

17. Dokazati da, za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ slijedi $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

18. Dokazati da je, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max\{-x, x\}$.

19. Dokazati da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, bijekcija i odrediti f^{-1}.

20. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je, za svaki $\epsilon > 0$, $x < y + \epsilon$. Dokazati da je tada $x \leq y$.

21. Neka je podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan. Dokazati da je realni broj x_0 infimum (supremum) od A, $x_0 = \inf A$ ($x_0 = \sup A$) onda i samo onda, ako udovoljava ovim dvama uvjetima:

(a) $(\forall a \in A)\ x_0 \leq a \quad ((\forall a \in A)\ a \leq x_0)$;

(b) $(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)\ a < x_0 + \epsilon \quad ((\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)\ x_0 - \epsilon < a)$.

22. Dokazati tzv. **Bernoullijevu nejednakost**:

$(\forall h \in \langle -1, \cdot\rangle)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+h)^n \geq 1 + nh.$

Pritom je, za svaki $n \geq 2$, $(1+h)^n = 1 + nh \Leftrightarrow h = 0$.

23. Izračunati koeficijent c u članu $c \cdot ab$ binomnoga razvoja

za $(\sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt[10]{\frac{a^7}{b^8}})^n$.

24. Zapisati brojeve 8, 15 i 37 u binarnomu i trinarnomu sustavu.

25. Neka su X i Y konačni skupovi, a $X \times Y$ direktni produkt. Dokazati da za pripadne kardinalne brojeve vrijedi tzv. **produktno pravilo** (ili **kombinacijsko načelo**): $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

26. Dokazati Teorem 1.4.14, tj. tvrdnju $P_n = n!$, potpunom indukcijom.

27. Deseteročlana udruga izabire svoje tročlano povjerenstvo. Koliko različitih (glede članstva) povjerenstava može izabrati?

28. Koliko se različitih "riječi" može dobiti premještajući slova u riječi MATEMATIKA?

29. Pet jabuka treba razdijeliti (ne režući plodove) sedmorici. Koliko je mogućih razdioba?

30. Novčić se baca pet puta uzastopce. Na koliko se načina mogu pojaviti rezultati (ili pismo - P ili glava G) tih bacanja?

1.5 KOMPLEKSNI BROJEVI

Pored u prethodnomu odjeljku konstruiranoga potpuno uređenog polja realnih brojeva $\mathbb{R}$, vrlo važnu ulogu u matematičkoj analizi ima i polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ (bez uređaja) što ćemo ga ovdje izgraditi.

1.5.1 Pojam i osnovne operacije

Definicija 1.5.1 ***Poljem kompleksnih brojeva*** *nazivamo direktni produkt* $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ *zajedno s operacijama zbrajanja i množenja, kao i oduzimanja i dijeljenja, definiranima kako slijedi:*

(i) $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

(ii) $(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$;

(iii) $(x_1,y_1) - (x_2,y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;

(iv) $(x_1,y_1) : (x_2,y_2) = (\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2+y_2^2})$, $(x_2,y_2) \neq (0,0)$.

Operacije na desnim stranama definicijskih jednakosti jesu one na $\mathbb{R}$. Polje kompleksnih brojeva označujemo slovom $\mathbb{C}$; njegove elemente nazivamo **kompleksnim brojevima** i obično označujemo slovom z. Pri množenju $(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) \equiv z_1 \cdot z_2$ u $\mathbb{C}$ najčešće ispuštamo (kao i u $\mathbb{R}$) oznaku "$\cdot$" i pišemo z_1z_2, a za dijeljenje $(x_1,y_1) : (x_2,y_2) \equiv z_1 : z_2$ u $\mathbb{C}$ često rabimo (kao i u $\mathbb{R}$) razlomačku oznaku $\frac{z_1}{z_2}$. Prvu koordinatu x kompleksnog broja $z = (x,y)$ nazivamo **realnim dijelom**, a drugu y - **imaginarnim dijelom** kompleksnoga broja z; pišemo: $x = Re(z)$, $y = Im(z)$. Poistovjetimo li $\mathbb{R}$ sa $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, polje kompleksnih brojeva postaje prirodnim proširenjem polja realnih brojeva (u skupovnom i strukturnom smislu). Naime, lako se provjeri da su tada operacije "$+$", "$\cdot$","$-$" i "$\div$" u $\mathbb{C}$ proširenja odgovarajućih operacija u $\mathbb{R}$ te da zbrajanje i množenje nasljeđuju sva dobra svojstva (asocijativnost, komutativnost, distributivnost). Napokon, valja primijetiti da se u $\mathbb{C}$ **ne može uvesti uređaj** koji bi bio **usklađen s operacijama**. Budući da ini uređaji i nisu važni, to se nijednoga posebno ne ističe.

U praksi se češće operira kompleksnim brojevima u zapisu drugačijem od navedenoga. Da bismo ga upoznali, promatrajmo jednadžbu $x^2 + 1 = 0$ u skupu $\mathbb{R}$ (v. §1.5.4 Vježbe, Zadatak 6.). Očito je da ona nema rješenja. Uvedimo u razmatranje novi objekt (izvan $\mathbb{R}$) kojemu dopuštamo "množenje" sa samim sobom rezultat kojega neka bude broj -1. Nazovimo taj objekt **imaginarnom jedinicom** i označimo slovom i. Dakle, po definiciji je $i^2 = -1$, odnosno (formalno) $i \equiv \sqrt{-1}$. Nazovimo skup $\mathbb{R}i = \{yi \mid y \in \mathbb{R}\}$ svih formalnih "umnožaka" yi, $y \in \mathbb{R}$, skupom **imaginarnih brojeva**, a njegove elemente yi **imaginarnim brojevima**. Neka je $C \equiv \mathbb{R} + \mathbb{R}i = \{x + yi \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ skup svih formalnih "zbrojeva" $x + yi$, $x \in \mathbb{R}$, $yi \in \mathbb{R}i$. Definirajmo zbrajanje i množenje, te oduzimanje i dijeljenje, u C kao pripadne operacije binomima $a + b$ u $\mathbb{R}$, vodeći računa o tomu da su ovdje a i b "nezbrojivi" i da je $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $\cdots$, tj. $i^{4n+k} = i^k$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, te $i^k = i, -1, -i, 1$ čim je $k = 1,2,3,4$ redom. Dodatno definiramo i $i^0 = 1$. Sada se $C \equiv \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ smije poistovjetiti s $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x + yi \equiv z = (x,y)$, jer se operacije (i)-(iv) na $\mathbb{C}$ podudaraju s odgovarajućima (i)$'$-(iv)$'$ na C:

(i)$'$ $z_1 + z_2 \equiv (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;
(ii)$'$ $z_1 \cdot z_2 \equiv (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$;
(iii)$'$ $z_1 - z_2 \equiv (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$;
(iv)$'$ $\dfrac{z_1}{z_2} \equiv \frac{x_1+y_1 i}{x_2+y_2 i} = \frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{-x_1 y_2+y_1 x_2}{x_2^2+y_2^2} i$, $z_2 \equiv x_2 + y_2 i \neq 0 + 0i$.

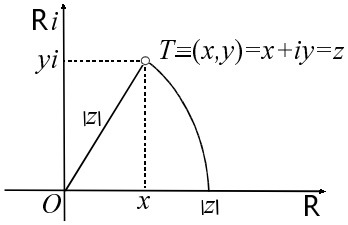
Za svaki $z = x + yi \in \mathbb{C}$ definiramo pripadni **konjugurani** kompleksni broj $\overline{z} = x + (-y)i \equiv x - yi$. Primijetimo da je $\overline{\overline{z}} = z$, pa brojeve $z, \overline{z}$ nazivamo **konjugirano kompleksnim parom**. Nadalje, umnožak $z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$. Nenegativni realni broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazivamo **apsolutnom vrijednošću** ili **modulom** kompleksnoga broja $z = x + yi$ i označujemo s $|z|$. Uočimo da je $z\overline{z} = |z|^2$ i da je $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i (\equiv 0 \in \mathbb{C})$.

Primijetimo da, zbog (ii)$'$, pri potenciranju kompleksnih brojeva smijemo primjenjivati binomnu formulu (Teorem 1.4.14), tj. da $z = x + yi$ vrijedi:

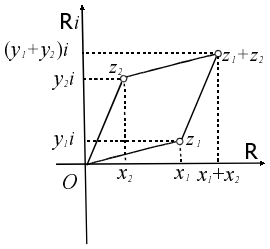
$$\begin{aligned} z^n = \quad & x^n + nx^{n-1}yi + \tbinom{n}{2} x^{n-2}y^2 i^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} i^{n-2} + \\ & nxy^{n-1}i^{n-1} + y^n i^n = \cdots = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

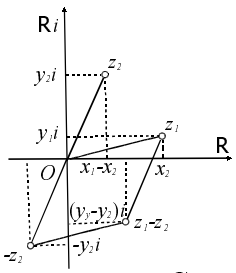
1.5.2 Geometrijski prikaz kompleksnog broja

U §1.4.2 smo realne brojeve geometrijski interpretirali pomoću točaka nekog pravca, tj. potpuno uređeno polje $\mathbb{R}$ smo na pogodan način poistovjetili s (brojevnim) pravcem. Budući da je $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, moguće je polje kompleksnih brojeva poistovjetiti s (brojevnom ili Gaussovom) ravninom. Naime, svakom kompleksnom broju $z = (x, y) \equiv x + yi$ odgovara jedinstvena točka $T = (x, y)$ u (koordinatnoj, v. §2.2.2) ravnini - i obratno.



Uočimo da je modul $|z|$ od z euklidska udaljenost točke T, koja u kompleksnoj ravnini odgovara broju z, od ishodišta $O = (0, 0)$.





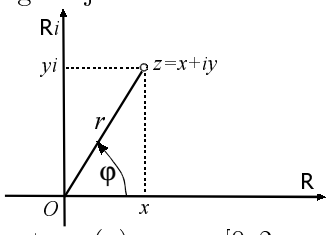
Napokon, primijetimo da operacije "+" i "−" u $\mathbb{C}$ dopuštaju u kompleksnoj ravnini jednostavan slikovit prikaz (paralelogramsko pravilo):

Rabeći gornju interpretaciju, lako se pokaže da i za kompleksne brojeve vrijedi trokutna nejednakost

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.5.3 Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

Radi lakšeg operiranja kompleksnim brojevima, korisno je usvojiti još jedan način njihova zapisivanja. Neka je dan $z = x+yi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. **Argumentom** kompleksnoga broja z nazivamo kutnu mjeru $\varphi \in \mathbb{R}$ kuta između pozitivne ("desne") zrake brojevnoga pravca i zrake OT, $O = (0,0)$ i $T = (x,y)$, i pišemo: $\arg(z) = \varphi$; pritom smatramo da je $\varphi < 0$ čim ga mjerimo gibajući se kao satna kazaljka, a u suprotnom da je $\varphi > 0$. Po dogovoru stavljamo $\arg(0) = 0$. Primijetimo da je $\varphi = \arg(z) \Leftrightarrow \varphi + k \cdot 2\pi = \arg(z)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jednostavnosti radi, ovdje ćemo modul $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$ kompleksnog broja z označavati slovom r.



Argument $\arg(z) = \varphi \in [0, 2\pi >$ (koji se u praksi najčešće ističe) od $z = x + yi$ se lako izračuna iz jednadžbe $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ (o trigonometrijskim funkcijama v. §3.1.3), vodeći računa o predznacima koordinata x i y; ako je $x = 0$, tj. $z = yi \neq 0$, onda je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ čim je $y > 0$ i $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ čim je $y < 0$. Primijetimo da je sada $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$, pa dobivamo prikaz

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

što nazivamo **trigonometrijskim zapisom** kompleksnoga broja z. Budući da su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ jednaki točno onda kad je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$, to je $z_1 = z_2$ onda i samo onda kad je $r_1 = r_2$ i $\varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Praktičnost trigonometrijskoga zapisa kompleksnog broja pokazuju naredni teoremi.

Teorem 1.5.1 *Za svaki par $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ je*

(i) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

(ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Dokaz. $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$ (po (ii)$'$) $= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$ (adicijski teorem) $= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, čime je tvrdnja (i) dokazana. Sasvim slično se dokazuje tvrdnja (ii). ■

Korolar 1.5.1 *Neka su dani $n \in \mathbb{N}$ i $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$. Tada je*

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} r_k(\cos\sum_{k=1}^{n}\varphi_k + i\sin\sum_{k=1}^{n}\varphi_k) \quad i \quad |\prod_{k=1}^{n} z_k| = \prod_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Posebice, za $z_1 = \cdots = z_n \equiv z$ dobivamo tzv. ***Moivreovu formulu***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi) \quad i \quad |z^n| = |z|^n.$$

Dokaz. Primijenjujući Teorem 1.5.1(i), dokaz se provodi indukcijom po n. Za tvrdnju o apsolutnim vrijednostima trebamo i osnovnu trigonometrijsku relaciju $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. ■

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja je posebno pogodan za potenciranje racionalnim eksponentom $q = \frac{m}{n}$. Jasno, temeljni zadatak jest izračunati potenciju $z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, koju ćemo i ovdje (kao i $\mathbb{R}$) označiti s $\sqrt[n]{z}$ i nazvati **n-tim korijenom** kompleksnoga broja z. Dakle, $w = \sqrt[n]{z}$ točno onda kad je $w^n = z$. Sljedeći teorem pokazuje kako se za dani $z = a + bi$ određuje njegov n-ti korijen $w = x + yi$.

Teorem 1.5.2 *Neka su dani $z = a + bi = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada $w = \sqrt[n]{z}$ ima n različitih vrijednosti $w_1, \cdots, w_n$, koje određujemo po formuli*

$$w_{k+1} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\tfrac{\psi+k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\tfrac{\psi+k\cdot 2\pi}{n}),\ k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

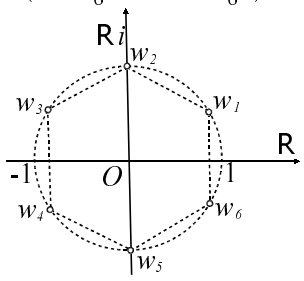
gdje je $\sqrt[n]{\rho}$ n-ti korijen u $\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$.

Dokaz. Treba odrediti kompleksni broj $w = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ takav da je $w^n = z$, tj. $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ (v. Korolar 1.5.1). Mora, dakle, biti $r^n = \rho$ (u $\mathbb{R}$) i $n\varphi = \psi + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. $r = \sqrt[n]{\rho} \geq 0$ i $\varphi = \frac{\psi+k\cdot 2\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Periodičnost trigonometrijskih funkcija cos i sin povlači da samo za n uzastopnih vrijednosti od k, primjerice, za $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, dobivamo različite vrijednosti za w. ■

Teorem 1.5.2 pokazuje da jednadžba $w^n - z = 0$ u $\mathbb{C}$ ima točno n različitih rješenja - korijena. Nadalje, iz navedene formule se vidi da su ti korijeni vrhovi pravilnoga n-torokuta upisanoga središnjoj kružnici s polumjerom $\sqrt[n]{\rho}$ (v. §2.3.4).

Primjer 1.5.1 Izračunajmo $\sqrt[6]{-8}$. Budući da je $z = -8 = 8\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$ to je $\sqrt[6]{-8} = \sqrt[6]{8}(\cos\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{6}) = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}))$, za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Prema tomu,

$w_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$
$w_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}i;$
$w_3 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$
$w_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$
$w_5 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -\sqrt{2}i;$
$w_6 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (v. crtež).



1.5.4 Vježbe

1. Dokazati sljedeće relacije o konjugiranju kompleksnih brojeva:

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; (ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

(iii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; (iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$;

(v) $\overline{\overline{z}} = z$, (vi) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

2. Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je

(a) $\overline{z} = z^2$; (b) $\overline{z} = z^3$.

3. Odrediti podskup A kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ elementi z kojega ispunjaju uvjet

(a) $|z - 1| < 1$; (b) $|z| + Re(z) \leq 2$;

(c) $|z - 2| + |z + 2| = 6$; (d) $|z^2 + 1| - 2|z| = 0$.

4. Odrediti $Re(z)$ i $Im(z)$, ako je $z = (\frac{1+i}{1-i})^n$ i $n \in \mathbb{N}$.

5. Neka je $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ kompleksni polinom ($p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) s realnim koeficijentima $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ($\in \mathbb{R}$). Dokazati: $p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\overline{z}) = 0$.

6. **Jednadžbom** u (nepraznom) skupu Y nazivamo svaku relaciju

$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \cap \Delta_Y \subseteq Y \times Y$$

na Y, pri čemu su $f, g : X \to Y$ funkcije, a $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ dijagonala. Reći ćemo jednadžba **ima rješenje** ako joj pripadna relacija nije prazna. Pritom **rješenjem** (ili **korijenom**) dane jednadžbe nazivamo svaki element $x_0 \in X$ koji udovoljava pripadnoj relaciji. **Riješiti jednadžbu** znači odrediti podskup $X_0 \subseteq X$ što ga tvore sva njezina rješenja. **Riješiti jednadžbu u skupu** $A \subseteq X$ znači odrediti presjek $X_0 \cap A$, tj. riješiti jednadžbu

$$\{((f|A)(x), (g|A)(x)) \mid x \in A\} \cap \Delta_Y,$$

pri čemu su $f|A, g|A : A \to Y$ pripadna funkcijska suženja.

Uobičajilo se, jednostavnosti radi, jednadžbu $\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \cap \Delta_Y$ zapisivati samo kao uvjet za njezino rješenje, tj. kao formalnu jednakost $f(x) = g(x)$ u skupu Y (usp. zadatke 2. i 3.(c),(d)!) Ako je $f(x_0) \neq g(x_0)$ za svaki $x_0 \in X$ ($x_0 \in A$), govorimo da jednadžba $f(x) = g(x)$ **nema rješenja** (**u skupu** A).

Neka je $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinom $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$. Riješiti jednadžbu $p(z) = 0$ u skupu $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$.

7. **Nejednadžbom** u (nepraznom) *parcijalno uređenom* skupu $(Y, \leq)$ nazivamo svaku od relacija

$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \cap T_Y \subseteq Y \times Y,$$
$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \cap (T_Y \setminus \Delta_Y) \subseteq Y \times Y,$$
$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \cap T^Y \subseteq Y \times Y,$$
$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \cap T^Y \setminus \Delta_Y) \subseteq Y \times Y,$$

na Y, pri čemu su $f, g : X \to Y$ funkcije, a

$$T_Y = \{(y, y') \mid y, y' \in Y,\ y \leq y'\} \subseteq Y \times Y,$$
$$T^Y = \{(y, y') \mid y, y' \in Y,\ y' \leq y\} \subseteq Y \times Y.$$

Sada se posve slično, po uzoru na jednadžbu, definiraju svi pripadni pojmovi u svezi s rješidbom dane jednadžbe (usp. zadatak 3.(a) i (b)).

Neka je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(z) = |z - 1|$. Riješiti nejednadžbu $f(z) \geq \sqrt{2}$ u skupu $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Poglavlje 2

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

2.1 MATRICE I DETERMINANTE

U ovomu odjeljku ćemo uvesti dva temeljna tehnička pojma u linearnoj algebri - matricu i determinantu - i demonstrirati njihovu primjenu na rješavanje sustava linearnih jednadžaba. Pritom ćemo zaobići pojmove vektorskog prostora i linearnog operatora, jer ne raspolažemo dostatnim predznanjem iz apstraktne algebre.

2.1.1 Matrica

Definicija 2.1.1 *Brojevnu tablicu*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ m,n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

nazivamo ***matricom - realnom*** *ako su svi* $a_{ij} \in \mathbb{R}$*, a* ***kompleksnom*** *ako je barem jedan* $a_{ij}(\neq 0) \in \mathbb{C}$*,* $i = 1, \cdots, m$*;* $j = 1, \cdots, n$*. Brojeve* a_{ij} *nazivamo* ***matričnim elementima****; pritom* $a_{i1}, \cdots, a_{in}$ *tvore* i***-ti*** *matričin* ***redak****, a* $a_{1j}, \cdots, a_{mj}$ j***-ti stupac****.*

Za matricu s m redaka i n stupaca, $m \neq n$, često naglašavamo da je **pravokutna** matrica **tipa** (m,n); posebne tipove $(1,n)$ i $(m,1)$, $n,m \geq 2$, redom nazivamo **jednorednom** i **jednostupčanom** matricom; ako je

$m = n$, govorimo o **kvadratnoj** matrici n**-toga reda**. (Primijetimo da je kvadratna matrica prvoga reda - broj a_{11}.) Elementi $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ kvadratne matrice tvore njezinu **glavnu dijagonalu**, a elementi $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ njezinu **sporednu dijagonalu**. Kvadratnu matricu kojoj je svaki element na glavnoj dijagonali jedinica, a svaki ini element jest nula, nazivamo **jediničnom** matricom. Napokon, matricu nazivamo **nulmatricom** ako joj je svaki element nula.

Matrice označujemo velikim (malo ukošenim) masnim slovima: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$,..., $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, ... Jediničnu matricu označujemo slovom $\boldsymbol{I}$, a nulmatricu slovom $\boldsymbol{O}$. Želimo li istaknuti matrične elemente i tip, pišemo i $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n}$ ili samo (a_{ij}). Ponekad se pojavi potreba i za zapisom $a_{ij} = (\boldsymbol{A})_{ij}$.

Primjer 2.1.1 Promatrajmo ove matrice: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} & -1 \\ -4 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,
$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -i+3 & 1 & 0 & \sqrt{2} & i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
$\boldsymbol{A}$ je pravokutna (2,3)-matrica, $\boldsymbol{I}$ je jedinična matrica drugoga reda, $\boldsymbol{B}$ je jednoredna (1,5)-matrica, a $\boldsymbol{O}$ je jednostupčana (3,1)-nulmatrica. Primijetimo i to da su $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{O}$ realne, dok je $\boldsymbol{B}$ kompleksna matrica. (Budući da je $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} + \{0i\} \subset \mathbb{C}$, to svaku realnu matricu smijemo, zapravo, smatrati i kompleksnom!)

Definicija 2.1.2 *Dvije matrice* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n}$ *i* $\boldsymbol{A}' = (a'_{i'j'})_{m'n'}$ *smatramo* ***jednakima*** *i pišemo* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, *ako je* $m = m'$, $n = n'$ *i, za svaki* $i(\equiv i') = 1, \cdots, n$ *i* $j(\equiv j') = 1, \cdots, m$, $a_{ij} = a'_{ij}$.

Na **skupu svih matrica** istog tipa na prirodan se način definiraju **zbrajanje** i **oduzimanje**, kao i **množenje matrice skalarom** (realnim ili kompleksnim brojem).

Definicija 2.1.3 *Ako su* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *i* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ *dvije matrice istog tipa* (m, n), *onda zbrojem matrice* $\boldsymbol{A}$ *s matricom* $\boldsymbol{B}$ *smatramo matricu* $\boldsymbol{C}$ *tipa* (m, n) *s elementima* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$; *pišemo:* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Definicija 2.1.4 *Umnožak broja* λ *s matricom* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *tipa* (m, n) *definiramo kao matricu* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ *istoga tipa s elementima* $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$; *pišemo:* $\boldsymbol{B} = \lambda \boldsymbol{A}$. *Za* $\lambda = -1$ *pišemo* $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$. *Matrično oduzimanje sada definiramo pravilom:* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$.

Primjer 2.1.2 Za matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & i \\ -i & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & i \\ 2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ izračunajmo $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ i $(-2i)\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+(-1) & i+1 \\ -i+2 & 2+i \\ 0+2 & 1+\frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1+i \\ 2-i & 2+i \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-(-1) & i-1 \\ -i-2 & 2-i \\ 0-2 & 1-\frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1+i \\ -2-i & 2-i \\ -2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix};$$

$$(-2i)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} (-2i)\frac{1}{2} & (-2i)i \\ (-2i)(-i) & (-2i)2 \\ (-2i)0 & (-2i)1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & 2 \\ -2 & -4i \\ 0 & -2i \end{bmatrix}.$$

Lako je dokazati istinitost sljedećega teorema:

Teorem 2.1.1 *Ako su $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ matrice istog tipa, a λ i μ brojevi, onda je:*

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;
(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;
(iii) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;
(iv) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;
(v) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$. ■

Načelo definicije indukcijom i svojstvo (ii) iz gornjega teorema dopuštaju definirati zbroj od konačno mnogo ($r\in\mathbb{N}$, $r\geq 3$) matrica istog tipa:

$$\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_k\equiv\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_{r-1}+\boldsymbol{A}_r=$$
$$(\sum_{k=1}^{r-1}\boldsymbol{A}_k)+\boldsymbol{A}_r\equiv(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_{r-1})+\boldsymbol{A}_r.$$

Ako su $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ matrice istog tipa i $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ brojevi, onda zbroj (matricu)

$$\boldsymbol{A}\equiv\lambda_1\boldsymbol{A}_1+\lambda_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{A}_r\equiv\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\boldsymbol{A}_k$$

nazivamo matričnom **linearnom kombinacijom** (s koeficijentima $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$). Kažemo da je linearna kombinacija **trivijalna**, ako je $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$; u protivnom, tj. čim je barem jedan od koeficijenata $\lambda_k\neq 0$, $k\in[1,r]_{\mathbb{N}}$, govorimo o **netrivijalnoj** linearnoj kombinaciji. (Ako je linearna kombinacija trivijalna onda je očito $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ - nulmatrica, ali ne i obratno!)

Definicija 2.1.5 *Za matrice $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ tipa (m,n) kažemo da su **linearno zavisne** ako se nulmatrica $\boldsymbol{O}$ tipa (m,n) može prikazati kao neka njihova netrivijalna linearna kombinacija. U protivnom ćemo reći da su matrice $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ **linearno nezavisne**.*

Po definiciji se, dakle, bar jedna od linearno zavisnih matrica $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ može izraziti kao linearna kombinacija preostalih. Zaista, ako je npr. $\lambda_{k_0}\neq 0$, onda $\boldsymbol{O}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\boldsymbol{A}_k\Rightarrow\boldsymbol{A}_{k_0}=\frac{1}{\lambda_{k_0}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{r}\lambda_k\boldsymbol{A}_k$.

Primjer 2.1.3 Matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$, i $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$ su linearno zavisne jer je $3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$. Budući da su ovdje svi koeficijenti različiti od nule, to se svaka od promatranih matrica može prikazati linearnom kombinacijom dviju preostalih. Tako je $\boldsymbol{A} = \frac{2}{3}\boldsymbol{B} + \frac{1}{3}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} = \frac{3}{2}\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} = 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}$.

Napomena 2.1.1 Svaki matričin redak (stupac) smijemo smatrati jednorednom (jednostupčanom) matricom, pa u tomu smislu govorimo i o ***linearnoj kombinaciji*** i ***linearnoj zavisnosti*** ili ***nezavisnosti redaka*** (***stupaca***) promatrane matrice.

Primjer 2.1.4 Matrični redci u $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ su linearno zavisni, jer su linearno zavisne jednoredne matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$ (v. Primjer 2.1.3).

Za tzv. ulančane matrične parove može se definirati njihovo množenje.

Definicija 2.1.6 *Reći ćemo da je uređeni matrični par* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$*, gdje je* $\boldsymbol{A}$ *tipa* (m, n) *i* $\boldsymbol{B}$ *tipa* (r, p)*,* ***ulančan*** *ako je* $r = n$*; pritom pišemo* $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ *i* $\boldsymbol{B} = (b_{kj})$*. Tada* ***umnožak*** *matrice* $\boldsymbol{B}$ *matricom* $\boldsymbol{A}$ *definiramo kao matricu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *tipa* (m, p) *s elementima* $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$*,* $i = 1, \cdots, m$*,* $j = 1, \cdots, p$*, i pišemo* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ $(\equiv \boldsymbol{AB})$*. (Dakle, matrični element* c_{ij} *je zbroj svih umnožaka odgovarajućih elemenata iz* i*-toga retka matrice* $\boldsymbol{A}$ *s onima iz* j*-toga stupca matrice* $\boldsymbol{B}$*.)*

Primjer 2.1.5 Pomnožimo matricom $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matricu $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}$ je tipa $(2, 3)$, a $\boldsymbol{B}$ tipa $(3, 1)$ pa je uređeni par $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ ulančan. Pripadni umnožak jest matrica $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ tipa $(2, 1)$,

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 0(-1) + 1 \cdot 0 + (-1)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da uređeni par $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$ nije ulančan, pa umnožak matrice $\boldsymbol{A}$ matricom $\boldsymbol{B}$, "$\boldsymbol{BA}$", nije definiran.

Primjer 2.1.6 Neka je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Lako se izračuna $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$. Primijetimo da su oba para $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ i $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$ ulančana i da su produktne matrice $\boldsymbol{AB}$ i $\boldsymbol{BA}$ istoga tipa, ali da je $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Prema tomu, matrično množenje *nije* komutativno.

Teorem 2.1.2 *Neka su* $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$, $\boldsymbol{B} = (b_{kl})$, $\boldsymbol{C} = (c_{lj})$, $\boldsymbol{D} = (d_{lj})$, $\boldsymbol{E} = (e_{jt})$ *matrice tipa* (m,n), (n,r), (r,p), (r,p), (p,s) *redom i neka je* λ *bilo koji broj. Tada je:*

(i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(ii) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{BC}+\boldsymbol{BD}$;

(iii) $(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} = \boldsymbol{CE}+\boldsymbol{DE}$;

(iv) $\lambda(\boldsymbol{AB}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

Dokaz. Sve su tvrdnje rutinski lako dokazive.
Ilustracije radi, dokažimo (i):

$$((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij} = \sum_{l=1}^{r}(\boldsymbol{AB})_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{r}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} =$$
$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{l=1}^{r} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\boldsymbol{BC})_{kj} = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij},$$

za svaki $i = 1, \cdots, m$ i svaki $j = 1, \cdots, n$. ■

2.1.2 Determinanta

Determinantu definiramo kao funkciju $\boldsymbol{A} \mapsto \det \boldsymbol{A}$ iz skupa svih kvadratnih matrica u skup realnih (ili kompleksnih) brojeva. Pravilo je sljedeće:

Definicija 2.1.7 *Neka je* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *kvadratna matrica* n*-tog reda,* S_n *skup svih permutacija* $p = (p_1, p_2, \cdots .p_n)$ *od* $[1,n]_{\mathbb{N}}$ *i* $i(p)$ *ukupni broj inverzija u toj permutaciji. Broj*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{p \in S_n} (-1)^{i(p)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2}$$

nazivamo ***determinantom matrice*** *A.* (Znak $\sum\limits_{p \in S_n}$ upućuje na zbrajanje po svim permutacijama iz S_n pa pribrojnika ima koliko i svih permutacija n-toga reda, dakle, $|S_n| = P_n = n!$.)

Primijetimo da je, u slučaju $n = 1$, $\det[a_{11}] = a_{11}$. Korisno je prihvatiti da formalna oznaka za determinantu bude pripadna matrična tablica, ali sada (razlikovanja radi) u okomitim zagradama, tj.

$$\det \boldsymbol{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

To dopušta govoriti o elementima, retcima, stupcima, $\cdots$ determinante $\det \boldsymbol{A}$, pa onda i o samoj **determinanti** $D \equiv \det \boldsymbol{A}$ ne spominjući pripadnu matricu $\boldsymbol{A}$.

Primjer 2.1.7 Izračunajmo vrijednost D determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Budući da je $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$, to u prvoj permutaciji nema inverzija, a drugoj je jedna. Dakle, $i(1,2) = 0$, $i(2,1) = 1$. Stoga je, po definiciji,

$$D = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(Determinanta drugoga reda je jednaka razlici umnška elemenata glavne i umnoška elemenata sporedne dijagonale.)

Primjer 2.1.8 Izračunajmo vrijednost D determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Ovdje je $S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$, pa je $i(1,2,3) = 0$, $i(1,3,2) = 1$, $i(2,1,3) = 1$, $i(2,3,1) = 2$, $i(3,1,2) = 2$, $i(3,2,1) = 3$. Prema tomu,

$$\begin{aligned} D = {} & (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + \\ & +(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} = \cdots = \\ & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \end{aligned}$$

Ishod nameće primjenu memotehničkoga pravila (tzv. **Sarrusova pravila**) - sheme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

u kojoj treba pomnožiti elemente svake od triju "glavnih dijagonala" pa dobiveno zbrojiti, pomnožiti elemente svake od triju "sporednih dijagonala" pa dobiveno zbrojiti, te na koncu oduzeti drugi broj od prvoga. Primjerice, za $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ je $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 + (-1)4(-1) + 0 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2(-1) + 1 \cdot 4 \cdot 1 + (-1)3 \cdot 5) = 14 - (-11) = 25.$

Da bismo pronašli što jednostavniji postupak za izračunavanja determinante, posebice za $n \geq 4$, pogledajmo još jednom definicijsku formulu (2). Uočimo da je $\det \boldsymbol{A}$ zbroj od $n!$ pribrojnika, a svaki pribrojnik je umnožak od po jednog elementa iz svakoga retka i svakoga stupca i pritom je prvi faktor iz prvoga retka, drugi iz drugoga, ..., n-ti iz n-toga retka. Takav umnožak zadržava svoj predznak čim je broj inverzija drugih indeksa njegovih faktora paran, a mijenja predznak čim je broj tih inverzija neparan. Kad bi u promatranim umnošcima faktori komutirali tako da prvi faktor bude iz prvoga stupca, drugi iz drugoga, ..., n-ti iz n-toga, onda bi drugi indeksi tih faktora uvijek bili u osnovnoj permutaciji $(1, 2, \cdots, n)$, a prvi indeksi bi tvorili sve moguće permutacije. Jednostavno je pokazati da je broj inverzija u permutaciji prvih indeksa - kad su drugi indeksi u osnovnoj permutaciji, jednak broju inverzija u permutaciji drugih indeksa - kad su prvi indeksi

u osnovnoj permutaciji. (Komutiranjem faktora se broj inverzija prvih indeksa poveća za onoliko za koliko se broj inverzija drugih indeksa smanji - i obratno!) Stoga se formula (2) smije napisati i u ovomu obliku

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{p \in S_n} (-1)^{i(p)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \quad p = (p_1, p_2, \cdots, p_n). \tag{2'}$$

Sljedećim stavcima ćemo iskazati nekoliko temeljnih determinantinih svojstava.

Stavak 2.1.1 *Neka su $D = (a_{ij})$ i $D' = (a'_{ij})$ determinante za koje $a'_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \cdots .n$. Tada je $D = D'$. (Ekvivalentno: Zamjenom svakoga retka odgovarajućim stupcem i obratno, determinanta ne mijenja vrijednost. Dakle, sve što se iskaže i dokaže o determinanti u terminima redaka, može se iskazati i dokazati u terminima stupaca.)*

Dokaz. Stavak 2.1.1 je izravna posljedica prije spomenute ekvivalentnosti (2)$\Leftrightarrow$(2′). ■

Stavak 2.1.2 *Izmjenom mjesta dvaju redaka (stupaca) determinanta mijenja predznak.*

Dokaz. Izmjenom mjesta dvaju redaka, u formuli (2) dolazi do premjestbe pripadnih faktora iz tih redaka, a time i do premjestbe dvaju elemenata u permutaciji drugih faktora. Posljedica je ili povećanje ili smanjenje broja pripadnih inverzija za neparan broj. (Ako dva susjedna elementa neke permutacije izmijene mjesta, broj inverzije će se promijeniti za ± 1; ako nisu susjedi onda je između njih k elemenata, pa se njihovo međusobno premještanje može obaviti pomoću $2k - 1$ premještanja susjednih elemenata.) To povlači promjenu predznaka svakoga pribrojnika u formuli (2), tj. promjenu predznaka od $\det \boldsymbol{A}$. ■

Stavak 2.1.3 *Determinanta s dva jednaka retka (stupca) jednaka je nuli.*

Dokaz. Međusobnom zamjenom dvaju jednakih redaka determinanta D se očito ne mijenja. S duge strane, po Stavku 2.1.2, mora promijeniti predznak. Preostaje zaključiti $D = 0$. ■

Stavak 2.1.4 *Ako se D' može dobiti iz determinante D tako da se svi elementi nekog retka (stupca) podijele brojem $\lambda \neq 0$, onda je $D = \lambda D'$. (Ekvivalentno:* (a) *Determinanta se množi nekim brojem tako da se njima pomnože svi elementi samo jednog retka (stupca);* (b) *zajednički se faktor svih elemenata jednog retka (stupca) smije izlučiti ispred determinante.)*

Dokaz. Neka je podijeljen l-ti redak, za neki $l \in \{1, \cdots, n\}$, determinante D. Po Definiciji 2.1.7, determinanta D' je zbroj odgovarajućih umnožaka u svakomu od kojih se kao jedan od faktora pojavljuje element $\frac{a_{lj}}{\lambda}$, $j = 1, \cdots, n$, podijeljena retka. Zaključak slijedi neposredno. ■

Primjer 2.1.9 Izračunajmo determinantu $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{16} & 8 & 22 \\ \frac{1}{8} & -12 & -11 \\ \frac{3}{8} & 24 & -33 \end{vmatrix}$.

$$D = \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{11}{4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{33}{4} \cdot 25 = 206,25.$$

Stavak 2.1.5 *Ako su svi elementi nekog retka (stupca) jednaki nuli i determinanta je jednaka nuli.*

Dokaz. Dovoljno je primijetiti da tada svaki pribrojnik u formuli (2) sadrži faktor 0. ■

Stavak 2.1.6 *Ako se dvije n-redne determinante razlikuju samo u elementima jednog te istog retka (stupca), onda se one smiju zbrojiti tako da se zbroje odgovarajući elementi tih redaka (stupaca), dok se ostali retci (stupci) ne mijenjaju.*

Dokaz. Neka se determinante D i D' razlikuju samo u elementima l-toga retka, za neki $l \in \{1, \cdots, n\}$. Tada je

$$D + D' = \sum_{p \in S_n} (-1)^{i(p)} a_{lr_l} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} a_{ir_i} + \sum_{p \in S_n} (-1)^{i(p)} a'_{lr_l} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} a_{ir_i} =$$

$$\sum_{p \in S_n} (-1)^{i(p)} (a_{lr_l} + a'_{lr_l}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} a_{ir_i} = D'',$$

gdje je D'' determinanta kojoj l-ti redak tvore elementi $((a_{lr_l} + a'_{lr_l})$, $r_i = 1, \cdots, n$, dok su svi ostali retci jednaki odgovarajućima od D, odnosno, D'. ■

Stavak 2.1.7 *Determinanta ne mijenja vrijednost ako se elementima bilo kojeg retka (stupca) pribroje, nekim brojem λ pomnoženi, odgovarajući elementi bilo kojeg drugog retka (stupca).*

Dokaz. Stavak 2.1.7 slijedi iz Stavaka 2.1.6 i 2.1.3. ■

Primjer 2.1.10 Izračunajmo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1000 & -668 & 1331 \\ -1200 & 799 & -1601 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Da bismo u računu izbjegli množenje velikih brojeva, primijenimo Stavak 2.1.7, tako da najprije prvomu retku pridodamo treći redak pomnožen s 333, a potom drugomu retku - treći redak pomnožen s -400. Tako dobivamo

$$D = \begin{vmatrix} 1000+(-3)333 & -668+2\cdot 333 & 1331+(-4)\cdot 333 \\ -1200 & 799 & -1601 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1200 & 799 & -1601 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1200+(-3)(-400) & 799+2(-400) & -1601+(-4)(-400) \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (4+(-6)+0)-(-3+(-2)+0) = 3.$$

Za otkrivanje našto skrovitijih determinantinih svojstava trebamo pojam tzv. algebarskog komplementa. Ako se u matrici $\boldsymbol{A}$ tipa (m,n) uoči bilo kojih r redaka i s stupaca, $1 \le r \le m$ i $1 \le s \le n$, onda sva njihova "presjecišta" tvore matricu tipa (r,s) koju nazivamo **podmatricom** matrice $\boldsymbol{A}$. Determinantu kvadratne podmatrice ($r = s$) nazivamo **poddeterminantom** matrice $\boldsymbol{A}$, a ako je $\boldsymbol{A}$ kvadratna matrica ($m = n$), govorimo i o poddeterminanti determinante $\det \boldsymbol{A}$. Posebno će nam biti važni slučajevi $m = n$ i $r = s = n-1$, tj. poddeterminante što se dobiju ispuštanjem točno jednog (i-tog) retka i točno jednog (j-tog) stupca kvadratne matrice $\boldsymbol{A}$ (determinante $\det \boldsymbol{A}$), $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Takvu poddeterminantu označujemo s D_{ij}.

Definicija 2.1.8 ***Algebarskim komplementon*** (*ili* ***kofaktorom***) *elementa* a_{ij} *determinante* $D = \det \boldsymbol{A}$ *nazivamo broj* $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

Stavak 2.1.8 *Svaka determinanta dopušta tzv.* ***Laplaceov razvoj*** *po elementima bilo kojeg retka (stupca), tj.*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ j \in \{1, \cdots n\}, \tag{3}$$

$$(D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ i \in \{1, \cdots n\}). \tag{3'}$$

Dokaz. Dokažimo, prvo, tvrdnju u slučaju $i = 1$, tj. da D dopušta Laplaceov razvoj po elementima prvoga retka, odnosno, da je

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}. \tag{4}$$

Označimo sa $S_{(j)}$ skup svih permutacija $p_j = (k_2, \cdots, k_n)$ od $[1,n]_{\mathbb{N}} \setminus \{j\}$. Primijetimo da se permutacija $p = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ od $[1,n]_{\mathbb{N}}$, gdje je $k_1 = j$, može dobiti tako da se permutaciji p_j "pridoda" j na prvo mjesto. Označimo li sa $S'_{(j)}$ skup svih permutacija p dobivenih iz permutacije $p_j \in S_{(j)}$ na taj način, proizlazi da je skup S_n svih permutacije od $[1,n]_{\mathbb{N}}$ jednak disjunktnoj uniji svih skupova $S'_{(j)}$, pa za pripadne kardinalne brojeve vrijedi

$$|S_n| = \sum_{j=1}^{n} \mid S'_{(j)} \mid = \sum_{j=1}^{n} \mid S_{(j)} \mid .$$

Budući da u permutaciji $p = (j, k_2, \cdots, k_n)$ ima $j-1$ inverzija *više nego* u permutaciji $p_j = (k_2, \cdots, k_n)$ (toliko, tj. $j-1$, inverzija tvori element j s preostalim elementima kad se nalazi na prvomu mjestu u bilo kojoj permutaciji od $[1, n]_{\mathbb{N}}$), to primjenom definicijske formule (2) na D_{1j}, $j = 1, \cdots, n$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j} = \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \sum_{p_j \in S_{(j)}} (-1)^{i(p_j)} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = \\
& \sum_{j=1}^{n} \sum_{p_j \in S_{(j)}} (-1)^{i(p_j)+1+j} a_{1j} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = \\
& \sum_{j=1}^{n} \sum_{p_j \in S'_{(j)}} (-1)^{i(p_j)+1+j} a_{1j} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = \\
& \sum_{p \in S(n)} (-1)^{i(p)+2} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = \\
& \sum_{p_j \in S_{(j)}} (-1)^{i(p)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = D.
\end{aligned}$$

Dokažimo sada obstojnost Laplaceova razvoja po bilo kojem determinantinu retku! U tu svrhu, premjestimo uočeni i-ti redak, $i \geq 2$, na prvo mjesto, pa će (bivši) prvi redak postati drugim retkom, ..., $(i-1)$-vi - i-tim retkom. Time smo izvršili ukupno $(i-1)$-nu zamjenu susjednih redaka i dobili determinantu D' elemente koje označimo s a'_{ij}, algebarske komplemente - s A'_{ij} i podeterminante - s D'_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$. Budući da je $a'_{1j} = a_{1j}$ i $D'_{1j} = D_{1j}$ za svaki j, Stavak 2.1.2 i dokazana formula (4) povlače

$$\begin{aligned}
D = (-1)^{i-1}D' = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} a'_{1j}A'_{1j} = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} a'_{1j}(-1)^{1+j}D'_{1j} = \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i-1+1+j}D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.
\end{aligned}$$

Naime, za $k \neq i$ je $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = 0$ (i za $l \neq j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{il}A_{ij} = 0$), jer determinanta kojoj pripada takav Laplaceov razvoj ima dva jednaka retka (stupca). ■

Primjer 2.1.11 Izračunajmo determinantu $D = \begin{vmatrix} -2 & 8 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & 15 & -3 \\ 7 & 28 & -14 & 14 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Izlučimo, po Stavku 2.1.4, iz prvoga retka faktor 2, iz drugoga - faktor 3, iz trećega - faktor 7, te iz "drugoga" stupca - faktor 4. Primijenjujući Stavak 2.1.7, novodobiveni prvi redak pribrojimo drugomu retku, potom - trećemu retku, te ga još pomnožena s 3 pribrojimo četvrtomu retku. Dobivenu determinantu razvijmo (Stavak 2.1.8) po elementima prvoga stupca, pa ponovno

primijenimo odgovarajuća pravila na novodobivenu determinantu (trećega reda). Cijeli postupak je skraćeno prikazan donjim računom:

$$D = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 4\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 168\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$168\left((-1)\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 16 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & -3 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 9 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = -168\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-168\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -3 \end{vmatrix} = -168\cdot(-2)\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} = 4032.$$

Stavak 2.1.9 *Determinanta je jednaka nuli onda i samo onda kad su joj retci (stupci) linearno zavisni.*

Dokaz. Ako su determinantini retci linearno zavisni, barem se jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija preostalih (v. Definiciju 2.1.7 i Napomenu 2.1.1), pa je po Stavku 2.1.7 ta determinanta jednaka nuli. Obratno, pretpostavimo da je determinanta D jednaka nuli. Radi li se o determinanti nul-matrice, tvrdnja o linearnoj zavisnosti je očigledna. Stoga pretpostavimo da je barem jedan od determinantinih elemenata različit od nule. Izostavljanjem r redaka i r stupaca iz D, $r = 0, 1, \cdots, n-1$, dobivamo pripadnu poddeterminantu $(n-r)$-toga reda. Označimo $k \equiv n - r \in \{1, \cdots, n-1\}$, pa primijetimo da nužno postoji neki k za koji je barem jedna poddeterminanta $D^{(k)}$ od D k-toga reda različita od nule i svaka poddeterminanta višega (od k) reda jednaka nuli. Ne smanjujući općenitost, smijemo pretpostaviti (v. Stavak 2.1.2) da je $D^{(k)}$ pripadni "gornji lijevi dio" od D, tj. da je

$$D^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Promatrajmo sve daterminante $(k+1)$-vog reda što se mogu dobiti izostavljanjem $n-k-1$ redaka i $n-k-1$ stupaca iz determinante D, kojima je $D^{(k)}$ poddeterminanta. Označimo takvu podeterminantu s $D_{st}^{(k+1)}$ čim ona sadrži s-ti redak i t-ti stupac od D, $s, t > k$. Dakle,

$$D_{st}^{(k+1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kt} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sk} & a_{st} \end{vmatrix}.$$

Označimo kofaktore od $a_{1t}, \cdots a_{kt}, a_{st}$ (zadnji stupac) redom s $A_{1,k+1}, \cdots, A_{k,k+1}, A_{k+1,k+1}$ (radi se o $(k+1)$-vom stupcu promatrane determinante $D_{st}^{(k+1)}$). Ti kofaktori ne ovise o indeksu t. Po formuli (3) (Stavak 2.1.8) i zbog $D_{st}^{(k+1)} = 0$, slijedi

$$0 = a_{1t}A_{1,k+1} + \cdots + a_{kt}A_{k,k+1} + a_{st}A_{k+1,k+1},$$

pa, budući da je $A_{k+1,k+1} \neq 0$, dobivamo

$$a_{st} = -\frac{A_{1,k+1}}{A_{k+1,k+1}}a_{1t} - \cdots - \frac{A_{k,k+1}}{A_{k+1,k+1}}a_{kt}$$

za svaki $t > k$. S druge strane, po formuli (5), isto vrijedi i za $t \leq k$. (Ako, naime, elemente jednog od prvih k stupaca pomnožimo odgovarajućim kofaktorima elemenata zadnjega stupca, zbroj tako dobivenih umnožaka bit će jednak nuli.) Stavimo li

$$\lambda_i = -\frac{A_{i,k+1}}{A_{k+1,k+1}},\ i = 1, \cdots, k, \text{ dobivamo } a_{st} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{it},\ t = 1, \cdots, n,$$

tj.

$$[a_{s1}\ \cdots\ a_{sn}] = [\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{i1} \cdots \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{in}] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, [a_{i1} \cdots a_{in}]$$

za svaki $s = k+1, \cdots, n$. Budući da dobiveno vrijedi i za svaki $s = 1, \cdots, k$, ($\lambda_i = 0$ za $i \neq s$ i $\lambda_s = 1$), dokazali smo da je svaki determinantin redak linearna kombinacija prvih k ($1 \leq k \leq n-1$) redaka. Prema tomu, determinanta D ima linearno zavisne retke. ■

Dokazujući nužnost u Stavku 2.1.9 dokazali smo i ovu činjenicu:

Neka su determinanti D n-tog reda sve poddeterminante $(k+1)$-vog reda jednake nuli i neka ima bar jednu poddeterminantu k-tog reda različitu od nule, $1 \leq k \leq n-1$. Tada D ima točno k linearno nezavisnih redaka (stupaca) i svaki je od preostalih redaka (stupaca) neka njihova linearna kombinacija. Broj k nazivamo **rangom** *determinante D i obično označujemo slovom r, uključujući pritom i proširenje: $r = n \Leftrightarrow D \neq 0$ i $r = 0 \Leftrightarrow D = \det \boldsymbol{O}$.*

2.1.3 Matričin rang

Matričin rang definiramo analogno determinantinu rangu.

Definicija 2.1.9 *Reći ćemo da matrica $\boldsymbol{A}$ ima* ***rang*** *$r \equiv r(\boldsymbol{A})$, ako sadrži kvadratnu podmatricu r-toga reda determinanta koje je različita od nule i ako je determinanta svake kvadratne podmatrice od $\boldsymbol{A}$ reda većeg od r jednaka nuli.*

Iz definicije slijedi da je matričin rang $r(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}$ čim je matrica $\boldsymbol{A}$ tipa (m, n). Nadalje, iz Stavka 2.1.9 i njegova dokaza slijedi:

Matrica $\boldsymbol{A}$ ima rang r ako i samo ako sadrži točno r linearno nezavisnih redaka (stupaca); preostali retci (stupci) su neke njihove linearne kombinacije.

Primjer 2.1.12 Matrica $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tipa $(3,4)$ ima četiri kvadratne podmatrice trećega reda (dobivamo ih ispuštanjem po jednog stupca) i sve one imaju determinantu jednaku nuli. Budući da postoji barem jedna kvadratna podmatrica od $\boldsymbol{A}$ drugoga reda (npr. ona u "donjem desnom kutu") kojoj je determinanta različita od nule, slijedi da je $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

Radi važnosti matričina ranga, korisno je otkriti što jednostavniju tehniku njegova određivanja.

Definicija 2.1.10 ***Elementarnom operacijom*** *na matrici nazivamo svaki od ovih postupaka:*

(i) *Izmjena mjesta bilo kojih dvaju redaka (stupaca);*

(ii) *množenje bilo kojeg retka (stupca) bilo kojim brojem različitim od nule;*

(iii) *pribrajanje bilo kojem retku (stupcu) bilo koje linearne kombinacije bilo kojih od preostalih redaka (stupaca).*

Definicija 2.1.11 *Neka su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ matrice istog tipa. Reći ćemo da je matrica $\boldsymbol{B}$* ***ekvivalentna*** *matrici $\boldsymbol{A}$, ako se $\boldsymbol{B}$ može dobiti iz $\boldsymbol{A}$ primjenom konačno mnogo elementarnih operacija.*

Lako se pokaže da je ova ekvivalentnost razredbena relacija na skupu svih matrica istog tipa. Označit ćemo ju s $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Teorem 2.1.3 *Ekvivalentne matrice imaju isti rang.*

Dokaz. Prvom elementarnom operacijom se mijenja samo predznak one poddeterminante koja sadrži dotične retke (stupce) ili njihove dijelove; drugom se pripadna poddeterminanta množi brojem različitim od nule; trećom se podeterminantina vrijednost ne mijenja. Prema tomu, elementarne operacije ne utječu na (ne)iščezavanje poddeterminanata. ■

Jednostavno je pokazati da elementarnim operacijama na matrici $\boldsymbol{A}$ možemo dobiti matricu $\boldsymbol{B}$ kojoj je svaki element $b_{ij} = 0$ čim je $i \neq j$, a očito je da je rang $r(\boldsymbol{B})$ jednak broju elemenata $b_{ii} \neq 0$.

Primjer 2.1.13 Odrediti matričin rang $r(\boldsymbol{A})$ za

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -9 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & -13 & -16 & 21 \\ 0 & 0 & 14 & -13 & -16 & 21 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U prvomu koraku smo pomnožili prvi redak s $3, -4, 1, 2$ i redom pribrojili drugomu, trećemu, četvrtomu, petomu retku. Time smo smo u prvomu stupcu "ispod" mjesta (1,1) dobili same nule. U drugomu koraku smo treći redak pribrojili četvertomu i dobiveno stavili na mjesto drugoga retka, drugi redak smo stavili na mjesto četvrtoga retka, a četvrti na mjesto trećega retka. Time smo smo i u drugomu stupcu "ispod" mjesta (2,2) dobili same nule. Nastavljajući na isti način, dobivamo matricu koja "ispod" "glavne dijagonale" ima same nule. Napokon, primijenjujući elementarne operacije na stupcima, dobivamo matricu kojoj su svi elementi s različitim indeksima jednaki nuli. Sada je očito da je rang $r(\boldsymbol{A}) = 4$.

Na kraju ćemo se još malo baviti kvadratnim matricama.

Definicija 2.1.12 *Za kvadratnu matricu n-tog reda kažemo da je* ***regularna*** *ako joj je rang jednak n. U protivnom, tj. ako je matričin rang manji od njenoga reda, govorimo o* ***singularnoj*** *matrici.*

Ekvivalentno je reći (v. činjenicu istaknutu po dokazu Stavka 2.1.9):

Matrica $\boldsymbol{A}$ je regularna $\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} \neq 0$, odnosno,

$\boldsymbol{A}$ je singularna $\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} = 0$.

Primjer 2.1.14 Kvadratna matrica $\boldsymbol{A}$ trećega reda, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ je singularna, jer je $\det \boldsymbol{A} = 0$. (Rang $r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$.)

Promatrajmo par kvadratnih matrica $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ istog reda i jediničnu matricu $\boldsymbol{I}$ toga reda. Reći ćemo da je matrica $\boldsymbol{B}$ **inverzna** matrici $\boldsymbol{A}$, ako je $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{BA}$.

Teorem 2.1.4 *Singularna matrica nema inverzne matrice. Regularna matrica $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ ima točno jednu inverznu matricu $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A}^{-1} = (b_{ij})$,*

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \boldsymbol{A}},$$

(A_{ji} je kofaktor od a_{ji} u determinanti $\det \boldsymbol{A}$*).*

Dokaz. Kad bi singularna matrica $\boldsymbol{A}$ imala inverznu matricu $\boldsymbol{B}$, bilo bi (v. §2.1.5 Vježbe, Zadatak 7.(iii)):

$1 = \det \boldsymbol{I} = \det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} = 0 \cdot \det \boldsymbol{B} = 0$ - protuslovlje.

Neka je $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ bilo koja regularna matrica bilo kojeg reda n. Tada je $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ pa je jednakošću $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \boldsymbol{A}}$ dobro definirana matrica $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ istoga reda n. Množenjem $\boldsymbol{AB}$ dobivamo (v. Stavak 2.1.8)

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{A_{jk}}{\det \boldsymbol{A}} =$$

$$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot \begin{cases} \det \boldsymbol{A}, & \\ 0, & \end{cases} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Dakle, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$. Na isti se način dobiva i $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$. Za dokaz jedinstvenosti inverzne matrice, neka su matrice $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ inverzne matrici $\boldsymbol{A}$. Tada je $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{IC} = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B}$. ■

Primjer 2.1.15 Potvrdimo da je matrica $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ regularna i odredimo joj inverznu matricu $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Budući da kratki račun daje $\det \boldsymbol{A} = -2 \neq 0$, to je zaista matrica $\boldsymbol{A}$ regularna. Za određivanje inverzne joj matrice treba izračunati sve algebarske komplemente A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ A_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \text{ itd.:}$$

$A_{13} = 1$, $A_{14} = -1$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 1$, $A_{24} = -1$, $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$, $A_{34} = -1$, $A_{41} = -1$, $A_{42} = -1$, $A_{43} = -1$, $A_{44} = -1$.

Prema tomu,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} (\mathrm{A}_{ji}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Rješavanje sustava linearnih jednadžaba

Promatrat ćemo **sustav** od m **linearnih jednadžaba** s n nepoznanica (u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i, i = 1, \cdots, m, \tag{6}$$

i istražiti njegovu rješivost u $\mathbb{R}$. Brojeve a_{ij} nazivamo **koeficijentima**, brojeve b_i - **slobodnim koeficijentima**, a brojeve-varijable x_j - **nepoznanicama** danoga sustava (6). **Rješenjem** sustava (6) smatramo svaki uređeni

n-slog $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ koji mu uvrštenjem $x_j = x_j^0$, $j = 1, \cdots, n$, identički udovoljuje.

Primjenom matričnog zapisa sustav (6) poprima oblik

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{6'}$$

gdje su $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, pa i rješenje smijemo zapisati kao $\boldsymbol{X}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$.

Matricu $\boldsymbol{A}$ nazivamo **matricom sustava** (6), a matricu $\boldsymbol{C}$ što se dobiva njezinim proširenjem za stupac (matricu) $\boldsymbol{B}$ nazivamo **proširenom matricom sustava** (6). Dakle,

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Označimo li svaki stupac od $\boldsymbol{A}$ kao matricu $\boldsymbol{A}_j = (a_{ij})_{(m,1)}$, $j = 1, \cdots, n$, možemo pojednostavniti zapise:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_n]$ i $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_n \ \boldsymbol{B}] \equiv [\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}]$,

dok sustav (6) dopušta zapis

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_n x_n = \boldsymbol{B}. \tag{6''}$$

Sada je očito da sustav (6) ima rješenje onda i samo onda, ako je $\boldsymbol{B}$ neka matrična linearna kombinacija od $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$.

Teorem 2.1.5 (i)(Kronecker-Capellijev teorem) *Sustav* (6) *ima rješenje onda i samo onda kad je* $r([\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}]) = r(\boldsymbol{A})$*;*

(ii) *ako je r zajednički matrični rang od $\boldsymbol{A}$ i $[\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}]$, onda je sustav* (6) *ekvivalentan sustavu koji se iz njega dobiva uzimanjem bilo kojih r linearno nezavisnih jednadžaba, tj. jednadžaba koeficijenti kojih u matrici tvore r linearno nezavisnih redaka;*

(iii) *u slučaju $m = n$, sustav* (6) *ima točno jedno rješenje $\boldsymbol{X}^0$ onda i samo onda ako je pripadna matrica $\boldsymbol{A}$ regularna. Pritom je $\boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.*

Dokaz. (i). Matrica $\boldsymbol{A}$ je tipa (m, n), a proširena matrica $[\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}]$ tipa $(m, n+1)$. Ako $\boldsymbol{A}$ i $[\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}]$ imaju isti rang r, onda se r linearno nezavisnih stupaca matrice $[\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}]$ može naći već među stupcima matrice $\boldsymbol{A}$, a preostali stupci matrice $[\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_n \ \boldsymbol{B}]$, dakle i zadnji, mogu se zapisati kao njihove linerne kombinacije. Prema tomu, postoje brojevi x_j^0, $j = 1, \cdots, n$, koji uvrštenjem $x_j = x_j^0$ zadovoljavaju sustav (6″), dakle, i (6). Obratno, ako brojevi x_j^0, $j = 1, \cdots, n$, tvore rješenje od (6), dakle, i od (6″), onda je

matrica $\boldsymbol{B}$ neka linearna kombinacija od $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$. Kad bi bilo $r(\boldsymbol{A}) \neq r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}])$, bilo bi $r(\boldsymbol{A}) < r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}])$, što bi značilo da se je dodavanjem stupca $\boldsymbol{B}$ broj linearno nezavisnih stupaca povećao, pa $\boldsymbol{B}$ ne bi bio linearna kombinacija od $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ - protuslovlje.
(ii). Premještanjem matričnih redaka od $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}]$ možemo postići da upravo prvih r redaka (jednadžaba) bude linearno nezavisno. Ako je $r < m$, svaki i-ti redak (jednadžba), $i = r+1, \cdots, m$, je neka linearna kombinacija prvih r redaka (jednadžaba). Postoje, dakle, realni brojevi $\lambda_{i'i''}$, $i' = 1, \cdots, r$, $i'' = r+1, \cdots, m$, takvi da je

$$[a_{i''1}\ \cdots\ a_{i''n}\ b_{i''}] = \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''}\,[a_{i'1}\ \cdots\ a_{i'n}\ b_{i'}] \tag{7}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{i''j}x_j, b_{i''} = \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''} \sum_{j=1}^{n} a_{i'j}x_j, \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''}b_{i'}, \quad i'' = r+1, \cdots, m).$$

Ako je $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ rješenje prvih r jednadžaba iz sustava (6), tj. ako je $a_{i'1}x_1^0 + \cdots + a_{i'n}x_n^0 \equiv b_{i'}$ za $i' = 1, \cdots, r$ $(i \leq r)$, onda za $i'' = r+1, \cdots, m$ $(i \geq r+1)$ pomoću (7) dobivamo

$$\begin{aligned} &a_{i''1}x_1^0 + \cdots + a_{i''n}x_n^0 - b_{i''} = \\ &x_1^0 \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''}a_{i'1} + \cdots + x_n^0 \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''}a_{i'n} - \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''}b_{i'} = \\ &\sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'i''}(x_1^0 a_{i'1} + \cdots + x_n^0 a_{i'n} - b_{i'}). \end{aligned}$$

Prema tomu, $(x_1^0, \cdots, x_n^0) \equiv \boldsymbol{X}^0$ jest rješenje i preostalih $m-r$ jednadžaba iz sustava (6), dakle i cijeloga sustava (6).
(iii) Ako je $m = n$ i matrica $\boldsymbol{A}$ regularna, onda je $r(\boldsymbol{A}) = n = r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}])$ pa sustav (6) ima neko rješenje $\boldsymbol{X}^0$ po (i). Pretpostavimo da sustav (6) ima, pored $\boldsymbol{X}^0$, i rješenje $\boldsymbol{Y}^0$. Tada je

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^0, \text{ dakle, } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}^0 - \boldsymbol{X}^0) = \boldsymbol{O}.$$

Množeći zadnju jednakost slijeva inverznom matricom $\boldsymbol{A}^{-1}$ dobivamo $\boldsymbol{Y}^0 - \boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{O}$, tj. $\boldsymbol{Y}^0 = \boldsymbol{X}^0$, pa sustav (6) ima točno jedno rješenje. Pomnožimo li (6′) slijeva inverznom matricom $\boldsymbol{A}^{-1}$ dobivamo traženo jedinstveno rješenje $\boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. Obratno, neka je u sustavu (6) $m = n$ i neka je $\boldsymbol{X}^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ njegovo jedino rješenje. Matrica $\boldsymbol{B}$ u zapisu (6″) je tada matrična linearna kombinacija od $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ s koeficijentima $x_1^0, \cdots, x_n^0$. Pretpostavimo protivno, tj. da matrica $\boldsymbol{A}$ nije regularna. Tada su njeni stupci linearno zavisni pa postoje brojevi $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, od kojih barem jedan nije nula, takvi da je $\lambda_1\boldsymbol{A}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{O}$. Nu, tada je

$$\boldsymbol{B} = x_1^0\boldsymbol{A}_1 + \cdots + x_n^0\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{O} = (x_1^0 + \lambda_1)\boldsymbol{A}_1 + \cdots + (x_n^0 + \lambda_n)\boldsymbol{A}_n,$$

pa je i $\boldsymbol{Y}^0 = (x_1^0 + \lambda_1, \cdots, x_n^0 + \lambda_1) \neq \boldsymbol{A}^0$ rješenje sustava (6) - protuslovlje.
■

Napomena 2.1.2 Ako sustav (6) ima dva rješenje $\boldsymbol{X}^1$ i $\boldsymbol{X}^2$, onda je i $\boldsymbol{X}(\lambda) = \lambda\boldsymbol{X}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^2$, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, njegovo rješenje. Zaključujemo da skup svih rješenja sustava (6), općenito, može biti ili prazan ili jednočlan ili neprebrojivo beskonačan.

Napomena 2.1.3 Ako je matrica $\boldsymbol{A}$ regularna (pa je i $m = n$), jedinstveno se rješenje $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ od (6) može napisati tzv. Cramerovom formulom:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je $D = \det[\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_n] \equiv \det \boldsymbol{A}$, $D_1 = \det[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_n]$,...,$D_n = \det[\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_{n-1}\ \boldsymbol{B}]$, tj. D_k je determinanta one matrice koja se od $\boldsymbol{A}$ dobije zamjenom stupca $\boldsymbol{A}_k$ stupcem $\boldsymbol{B}$, $k = 1, \cdots, n$ (v. §2.1.5 Vježbe, Zadatak 9.).

Primjer 2.1.16 Riješimo sustav linearnih jednadžaba ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$)

$$x + y + z = 0, \quad -x + y + z = -2, \quad x + y - z = 2.$$

Primijetimo da je pripadna matrica $\boldsymbol{A}$ regularna, jer joj je determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Budući da je

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & --2 \end{vmatrix}$$

to Cramerova formula daje (jedinstveno) rješenje $(1, 0, -1)$.

Primjer 2.1.17 Sustav $2x+3y = a$, $4x+6y = 2$, ovisan o parametru $a \in \mathbb{R}$, ima za $a = 1$ beskonačno mnogo rješenja (npr. $(-1, 1)$, $(0, \frac{1}{3})$, $(1, -\frac{1}{3})$, $\cdots$), dok za $a \neq 1$ nema rješenja jer matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 2 & 3 & a(\neq 1) \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

nemaju isti rang. (Prva ima rang 1 a druga 2; pribrojimo li drugoj jednadžbi prvu jednadžbu pomnoženu brojem 2 dobivamo $0 = -2a + 2$ što, za $a \neq 1$, nije istina.)

Napomena 2.1.4 Ako je u sustavu (6) matrica $\boldsymbol{B}$ nulmatrica $\boldsymbol{O}$, nazivamo ga homogenim sustavom. U ovomu slučaju, jasno, matrica $\boldsymbol{A}$ i proširena matrica $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{O}]$ imaju isti rang, pa homogeni sustav ima rješenje. Očigledno je $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$, tj. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$, rješenje svakog homogenog sustava, a nazivamo ga trivijalnim rješenjem. Ako je pritom rang $r(\boldsymbol{A}) = n$ onda je to, po Teoremu 2.1.5, (ii) i (iii), i jedino rješenje homogenoga sustava. Homogeni sustav će, dakle, imati i netrivijalno rješenje čim je $r(\boldsymbol{A}) < n$.

Sažmimo sve do sada izloženo o rješavanju linearnoga sustava (6):

1. Treba odrediti matrične rangove $r(\boldsymbol{A})$ i $r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}])$, pa ako su različiti zaključiti da sustav (6) nema rješenja (Teorem 2.1.5 (i)).

2. Ako je $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}]) \equiv r \leq m$, sustav (6) se reducira na sustav od r linearno nezavisnih jednadžaba (redaka od $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}]$) s n nepoznanica (Teorem 2.1.5 (ii)).
3. Ako je $r < n$, na lijevoj strani (reduciranoga sustava) treba ostaviti r nepoznanica stupci kojih su linearno nezavisni, a na desno treba prebaciti sve ostale pribrojnike.
4. Uzevši bilo koje vrijednosti za $n - r$ na desno prebačenih nepoznanica, preostaje riješiti sustav od r linearno nezavisnih jednadžaba s r nepoznanica (Teorem 2.1.5 (iii)).

Primjer 2.1.18 Sustav

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0,$$

je homogen, pa ima trivijalno rješenje $(0, 0, 0, 0)$. Budući da je rang pripadne matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

manji od broja nepoznanica, tj. $r(\boldsymbol{A}) < 4$, to ovaj sustav ima i netrivijalno rješenje. Odredimo rang $r(\boldsymbol{A})$ (ovdje su dovoljne elementarne operacije samo retcima):

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

pa je $r(\boldsymbol{A}) = 3$. Budući da su prva tri stupca linearno nezavisna i budući da smo operirali samo retcima, određujući rang dobili smo i ekvivalentni sustav

$$x_1 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0, \quad x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 = 0.$$

Prebacimo li pribrojnike s nepoznanicom x_4 na desno i stavimo li $x_4 \equiv 2u$, $u \in \mathbb{R}$, dobivamo sva rješenja: $(0, -2u, u, 2u)$, $u \in \mathbb{R}$. (Za $u = 0$ dobivamo i trivijalno rješenje!)

Primjer 2.1.19 U sustavu (s parametrom $a \in \mathbb{R}$)

$$ax + y = 1, \quad 3x + 2y = 0, \quad x + ay = 1,$$

odredimo parametarske vrijednosti a za koje sustav ima (nema) rješenje.
Najprije odredimo rangove $r(\boldsymbol{A})$ i $r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}])$. Računat ćemo usporedno primijenjujući samo elementarne operacije retcima. (Time ćemo u svakomu koraku dobiti sustav ekvivalentan polaznomu, jer svaki redak predstavlja točno jednu jednadžbu!) Dakle,

$$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2-3a & -3 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{bmatrix},$$

što pokazuje da nastupaju dva zanimljiva slučaja: $a \neq 1$ i $a = 1$. Ako je $a \neq 1$ onda zadnji redak dopušta dijeljenje s $1 - a$, pa je tada proširena matrica

$$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}] \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2-3a & -3 \\ 0 & 1+a & 1 \end{bmatrix}.$$

Pripadne poddeterminante (iz prvih dvaju stupaca)

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 2-3a \end{vmatrix} = 2-3a, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1+a \end{vmatrix} = 1+a,$$

ne mogu istodobno iščezavati, pa je $r(\boldsymbol{A}) = 2$, dok je

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2-3a & -3 \\ 0 & 1+a & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

pa je $r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}]) = 3$. Zaključujemo da naš sustav nema rješenja čim je $a \neq 1$. (Za takav sustav se kaže da je **proturječan** ili **kontradiktoran**.) Ako je pak $a = 1$ onda je

$$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dakle, $r(\boldsymbol{A}) = 2 = r([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}])$, pa sustav ima rješenje. Pribrajanjem drugoga retka prvomu te množenjem drugoga retka brojem -1, dobivamo

$$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tj. sustav } \quad x = -2, y = 3,$$

što je zapravo traženo rješenje.

2.1.5 Vježbe

1. Dokazati da su prve tri od matrica

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

linearno nezavisne i prikazati četvrtu kao njihovu linearnu kombinaciju.

2. Neka je $\boldsymbol{A}$ matrica tipa (m, n), a $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica n-toga (m-toga) reda Dokazati da je $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$).

3. Neka je $\boldsymbol{A}$ matrica tipa (m, n), a $\boldsymbol{O}$ neka označuje bilo koju nulmatricu. Dokazati da je $\boldsymbol{AO} = \boldsymbol{O}$ i $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O}$ kad god su ti umnošci mogući.

4. (a) Koliko inverzija prvih (drugih) indeksa ima u zapisu $a_{11}a_{32}a_{24}a_{43}$?

(b) Koliko je inverzija prvih indeksa u zapisu toga umnoška kad su drugi indeksi u osnovnoj permutaciji, a koliko je inverzija drugih indeksa kad su prvi indeksi u osnovnoj permutaciji?

5. Izravnom provjerom potvrditi da će izmjenom mjesta trećega i sedmoga elementa u permutaciji $(5, 1, 4, 2, 3, 7, 6)$ broj pripadnih inverzija promijeniti parnost.

6. Neka je $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ "donja (gornja) trokutasta" matrica, tj. kvadratna matrica s elementima $a_{ij} = 0$ čim je $i > j$ ($a_{ij} = 0$ čim je $i < j$). Dokazati da je $\det \boldsymbol{A} = \prod_i a_{ii}$. (Posebice, $\det \boldsymbol{I} = 1$.)

7. Dokazati da za kvadratne n-redne matrice $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ vrijede ove formule:

(i) $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$;

(ii) $\det(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda^n \det \boldsymbol{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$);

(iii) $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$.

8. Ako su $\boldsymbol{A}^1$ i $\boldsymbol{A}^2$ rješenja linearnog sustava $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{B}$, dokazati da je, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, i $\boldsymbol{A}(\lambda) = \lambda \boldsymbol{A}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{A}^2$ rješenje toga sustava.

9. Dokazati ispravnost Cramerove formule.

Dokaz. Budući da je, pod navedenim uvjetima, jedino rješenje sustava (6) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, to je

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{j1} b_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{jn} b_j \end{bmatrix}.$$

Uvodeći pokrate $D \equiv \det \boldsymbol{A}$ i $D_i \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ji} b_j$, $i = 1, \cdots, n$, dobivamo traženu formulu.

10. Riješiti sustav $5x + 6y - 5z = 45$, $3x - 2y + 4z = 20$, $4x + y - 2z = 35$.

11. Je li sustav $x_5 + x_6 = 2$, $x_4 + x_5 = 3$, $x_3 + x_4 = 4$, $x_2 + x_3 = 5$, $x_1 + x_2 = 6$, proturječan?

2.2 VEKTORSKA ALGEBRA

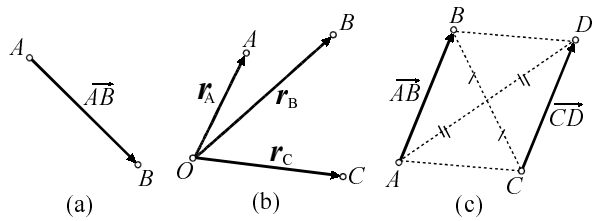
U ovomu odjeljku ćemo definirati pojam standardnog ("geometrijskog") vektora i u pripadni skup uvesti odgovarajuću algebarsku strukturu. Pritom pretpostavljamo da su temeljni pojmovi i uobičajene oznake iz elementarne euklidske geometrije (točka - T, pravac - p, dužina - $\overline{AB}$, zraka, ravnina - ρ, kut - φ, prostor, $\cdots$) kao i njihovi odnosi dobro poznati. Prostor ćemo označavati (podebljanim) slovom $\mathbb{E}$.

2.2.1 Usmjerena dužina i vektor

Svaki uređeni par (A, B) točaka A i B iz prostora $\mathbb{E}$ nazivamo **usmjerenom** (ili **orijentiranom**) **dužinom** i označujemo s $\overrightarrow{AB}$. Pritom za A kažemo da je **početak** a za B da je **kraj** usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$. Skup svih usmjerenih dužina s početkom u istoj točki O označujemo s $\mathbb{V}(O)$. Usmjerene dužine $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\cdots$ iz $\mathbb{V}(O)$ nazivamo i **radijus-vektorima** (varijabilnih) točaka A, B, $\cdots$ s obzirom na (čvrstu) točku O i označujemo s $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\cdots$.

(U pravilu, točka O će biti ishodište danog provokutnog koordinatnog sustava u prostoru. Uobičajilo se usmjerene dužine predočavati kao na donjemu crtežu - (a), (b).)

Definicija 2.2.1 *Reći ćemo da je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ u relaciji $\approx$ s usmjerenom dužinom $\overrightarrow{CD}$ i pisati $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$, ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište.* (Pripadni crtež je dolje - (c).)



Nije teško dokazati da je relacija $\approx$ ekvivalentna ovim trima zahtjevima: dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su paralelne ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ su paralelne ($\overline{AC} \parallel \overline{BD}$) i dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju jednake duljine ($d(A,C) = d(B,D)$). Nadalje, lako se provjeri da je $\approx$ razredbena relacija na skupu svih usmjerenih dužina, pa se taj skup cijepa na pripadne razrede.

Definicija 2.2.2 *Svaki ekvivalencijski razred po relaciji $\approx$ na skupu svih usmerenih dužina nazivamo* ***vektorom****. Skup svih vektora označujemo s $\mathbb{V}^3$, a njegove elemente (vektore) - malim (masnim) slovima: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \cdots$.*

> Za osnovni odnos između točaka i vektora prihvaćamo kao činjenicu ovo - ($\star$): *Za svaku točku A u prostoru $\mathbb{E}$ i svaki vektor $\boldsymbol{a}$ iz $\mathbb{V}^3$ postoji točno jedna točka B takva da je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ element ekvivalencijskoga razreda $\boldsymbol{a}$.*

Prema tomu, ako je $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{a}$, tj. $[\overrightarrow{AB}] = \boldsymbol{a}$, smijemo govoriti da je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ **predstavnik** danoga **vektora** $\boldsymbol{a}$. Pritom kažemo i da smo vektor $\boldsymbol{a}$ "sveli na" početak A, odnosno, da smo ga "nanijeli od" A. Osim toga, tada govorimo i da vektor $\boldsymbol{a}$ ima **pravac** određen točkama A, B u **smjeru** od A prema B i **duljinu** (ili **apsolutnu vrijednost** ili **modul** ili **normu**) $\|\boldsymbol{a}\| = d(A,B)$ (v. Napomenu 2.2.1).

Neka je O bilo koja točka u prostoru $\mathbb{E}$. Budući da, po ($\star$), svaki vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^3$ ima jedinstvenoga predstavnika u skupu $\mathbb{V}(O)$ i da je, s druge strane, svaka usmjerena dužina s početkom O predstavnik jedinstvenoga vektora, to su skupovi $\mathbb{V}(O)$ i $\mathbb{V}^3$ u bijektivnoj svezi. Prema tomu, dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ predstavljaju isti vektor točno onda kad je $A = B$.

Definicija 2.2.3 *Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ vektori i O točka u prostoru $\mathbb{E}$, te neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ pripadni radijus-vektori. Reći ćemo da su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$* ***kolinearni****, ako točke O, A i B pripadaju istom pravcu. Nadalje, reći ćemo da*

oni imaju ***isti smjer*** *(ili* ***istu orijentaciju****) čim su točke A i B na istoj zraci toga pravca određenoj točkom O, a da imaju* ***suprotne smjerove*** *čim A i B pripadaju različitim zrakama s obzirom na točku O.*

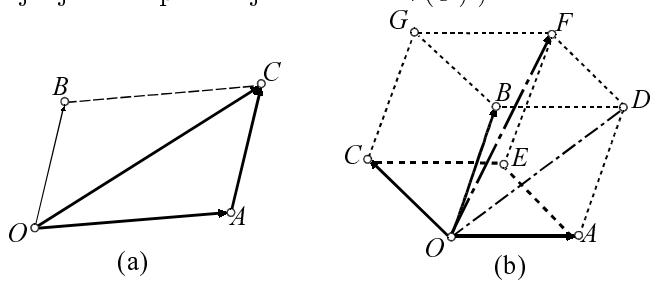
Napomena 2.2.1 Lako se vidi da je vektorska kolinearnost dobro definirana, tj. da ne ovisi o izboru točke-ishodišta O. Naime, iz definicije slijedi da su predstavnici $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{O'A'}$ vektora $\boldsymbol{a}$ u skupovima $\mathbb{V}(O)$ i $\mathbb{V}(O')$, redom, u relaciji $\approx$, a isto vrijedi i za predstavnike $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{O'B'}$ vektora $\boldsymbol{b}$ redom u skupovima $\mathbb{V}(O)$ i $\mathbb{V}(O')$. Slijedi da točke O, A i B pripadaju jednom pravcu, ako i samo ako točke O', A' i B' pripadaju jednom pravcu. Ovakva napomena će se odnositi i na sve ostale definicije u kojima se vektorska svojstva opisuju pomoću reprezentanata, pa više ne ćemo naglašavati dobru definiranost takvih pojmova.

Za svaku točku A u prostoru $\mathbb{E}$, vektor $[\overrightarrow{AA}]$ nazivamo **nulvektorom** i označujemo s $\mathbf{0}$. To je jedini vektor kojemu pravac ni smjer nisu određeni, dok je očito $\|\mathbf{0}\| = 0$. Po dogovoru smatramo da je nulvektor kolinearan svakom vektoru. Ako je $\boldsymbol{a} = [\overrightarrow{AB}]$, onda $[\overrightarrow{BA}]$ nazivamo (vektoru $\boldsymbol{a}$) **suprotnim vektorom** i označujemo s $-\boldsymbol{a}$. Vektori $\boldsymbol{a}$ i $-\boldsymbol{a}$ imaju isti pravac i jednaku duljinu, dok su im smjerovi suprotni. Svaki vektor $\boldsymbol{e} \in \mathbb{V}^3$ duljine 1, tj. $\|\boldsymbol{e}\| = 1$, nazivamo **jediničnim vektorom**.

Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, što ćemo ih sada definirati, uvodimo preko nekog (bilo kojeg) skupa $\mathbb{V}(O)$ svih pripadnih radijus-vektora.

Definicija 2.2.4 ***Zbroj*** *danih radijus-vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ definiramo kao radijus-vektor $\overrightarrow{OC}$, gdje je C ona točka za koju dužine $\overline{OC}$ i $\overline{AB}$ imaju zajedničko polovište. (Točke O, A, C, B su tada vrhovi jedinstvenoga paralelograma, pa se govori i o "paralelogramskomu zbrajanju".) Pišemo: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Vektore zbrajamo preko njihovih predstavnika u nekom $\mathbb{V}(O)$. Dakle, ako je $\boldsymbol{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\boldsymbol{b} = [\overrightarrow{OB}]$, onda definiramo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, gdje je $\boldsymbol{c} = [\overrightarrow{OC}]$ i $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.*

Primijetimo da je, pod gornjim pretpostavkama, $\overrightarrow{OB} \approx \overrightarrow{AC}$, tj. $[\overrightarrow{OB}] = [\overrightarrow{AB}]$, pa je $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{AC}]$. Usmjerene dužine $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AC}$ zbrajamo na "prirodni način", tj, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ ("*zbrajanje po trokutu*", v. crtež- (a); to nije zbrajanje u skupu radijus-vektora $\mathbb{V}(O)$!).



Teorem 2.2.1 *Zbrajanje u svakom skupu $\mathbb{V}(O)$ pripadnih radijus-vektora ima ova svojstva:*

(i) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$;

(ii) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OO}=\overrightarrow{OA}$;

(iii) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OO}$, $[\overrightarrow{OA'}]=-[\overrightarrow{OA}]$;

(iv) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Dokaz. (i). Neka su O, A, B, C vrhovi paralelopipeda kojemu su $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ bridovi. Označimo preostale vrhove slovima D, E, F, G, tako da bude $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$ i $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}$ (v. prethodni crtež - (b)). Sve stranice i svi dijagonalni presjeci svakog paralelopipeda su paralelogrami, pa po Definiciji 2.2.4 (zbrajanju radijus-vektora) dobivamo:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Dokazi preostalih tvrdnja su još jednostavniji pa ih ispuštamo. ■

Po Definiciji 2.2.4 slijedi da vektorsko zbrajanje nasljeđuje dobra svojstva zbrajanja radijus-vektora iz Teorema 2.2.1.

Teorem 2.2.2 *Zbrajanje u skupu $\mathbb{V}^3$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(ii) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(iii) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

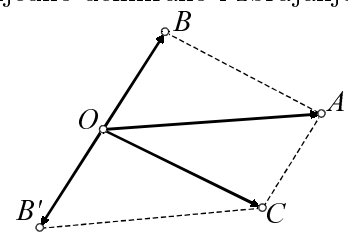
(iv) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

Dokaz. Sva se gornja svojstva lako dokazuju služeći se zbrajanjem usmjerenih dužina po trokutnomu pravilu. Primjerice, neka je $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{OA}]$, $\boldsymbol{b}=[\overrightarrow{AB}]$ i $\boldsymbol{c}=[\overrightarrow{BC}]$ (izbor ovih predstavnika dopušta svojstvo ($\star$)). Tada je $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$, pa je zaista $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. ■

Zbroj (radijus-)vektora, zbog asocijativnosti (i), smijemo pisati i bez zagrada, tj. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ i, općenito,

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{n-1}+\boldsymbol{a}_n=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{n-1})+\boldsymbol{a}_n, \quad n\in\mathbb{N}, n\geq 3.$$

Vektorsko oduzimanje definiramo kao zbrajanje sa suprotnim vektorom, tj. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. Ako je npr. $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{OA}]$ i $\boldsymbol{b}=[\overrightarrow{OB}]$ onda je $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=[\overrightarrow{BA}]=[\overrightarrow{OC}]$, gdje je $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$, $[\overrightarrow{OB'}]=-[\overrightarrow{OB}]$ (v. crtež). Na taj je način ujedno definirano i zbrajanje radijus-vektora.



Definicija 2.2.5 ***Množenjem*** *(vektora)* ***skalarom*** *nazivamo funkciju iz* $\mathbb{R} \times \mathbb{V}^3$ *u* $\mathbb{V}^3$, $(\lambda, \boldsymbol{a}) \mapsto \lambda\boldsymbol{a}$, *gdje je* $\lambda\boldsymbol{a}$ *vektor duljine* $|\lambda| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$ *kolinearan vektoru* $\boldsymbol{a}$, *koji je usmjeren kao* $\boldsymbol{a}$ *čim je* $\lambda > 0$, *a suprotno usmjeren čim je* $\lambda < 0$. *(Po definiciji je, dakle,* $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *za svaki* λ, *kao i* $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ *za svaki* $\boldsymbol{a}$.*) Sasvim analogno definiramo i množenje radijus-vektora skalarom - realnim brojem.*

Pomnožimo li vektor $\boldsymbol{a}$, $\|\boldsymbol{a}\| \neq 0$, recipročnom vrijednošću njegove duljine, dobit ćemo jedinični vektor $\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$ kojega nazivamo **jediničnim vektorom vektora** $\boldsymbol{a}$. Lako je provjeriti da množenje skalarom ima ova svojstva:

Teorem 2.2.3 *Za bilo koje* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}^3$ *i bilo koje* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

(i) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$;

(ii) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;

(iii) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

Teorem 2.2.4 *Ako su vektori* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *kolinearni i* $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, *onda postoji jedinstveni broj* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

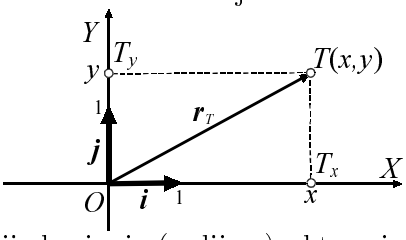
Dokaz. Aka su $\boldsymbol{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $A \neq O$, i $\boldsymbol{b} = [\overrightarrow{OB}]$ kolinearni, onda točke O, A i B pripadaju istom pravcu p. Neka je točkama O i E na p, $d(O, E) = 1$, određen pripadni brojevni pravac, pa neka točakama A i B odgovaraju redom apscise x_A i x_B (v. §1.4.2). Budući da je $|x_A| = d(O, A) \neq 0$, to postoji broj $\lambda = \frac{x_B}{x_A}$. Pritom je $\lambda > 0$ čim su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ istosmjerni, a $\lambda < 0$ čim $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ imaju suprotne smjerove. Nadalje, $\|\boldsymbol{b}\| = d(O, B) = |x_B| = |\lambda||x_A|$, pa mora biti $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. Iz $\lambda_1\boldsymbol{a} = \lambda_2\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ odmah slijedi $\lambda_1 = \lambda_2$. ■

2.2.2 Vektor u provokutnom koordinatnom sustavu

Neka je p bilo koji pravac u prostoru $\mathbb{E}$ i O bilo koja točka na tomu pravcu. Promatrajmo onaj podskup od $\mathbb{V}(O)$ što ga tvore svi radijus-vektori s krajevima na p. Izborom neke točke E na pravcu p, $E \neq O$, i definiranjem $d(O, E) = 1$, određujemo na p jedan brojevni pravac. Pritom kažemo da smo na pravcu p zadali **koordinatni sustav** $(O; \boldsymbol{i})$ s **ishodištem** O i (jediničnim) **baznim vektorom** $\boldsymbol{i} = [\overrightarrow{OE}]$. Sada se svakom radijus-vektoru $\overrightarrow{OT}$, T točka na p, može pridružiti jedinstvena koordinata-**apscisa** $x_T \in \mathbb{R}$ njegova kraja T tako da bude $\overrightarrow{OT} = x_T\overrightarrow{OE}$ (T.2.2.4). Broj x_T nazivamo **koordinatom** točke T ili **skalarnom komponentom** radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$ (vektora $[\overrightarrow{OT}]$) u koordinatnomu sustavu $(O; \boldsymbol{i})$. Primijetimo da koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i})$ određuje, na dotičnom pravcu, dvije brojevne zrake - "pozitivnu" i "negativnu".

Neka je ρ bilo koja ravnina u prostoru $\mathbb{E}$ i O bilo koja točka u toj ravnini. **(Desni) pravokutni koordinatni sustav** u ravnini ρ, u oznaci $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$,

definiramo kako slijedi: Točkom O položimo dva međusobno *okomita* pravca p i q u ravnini ρ, pa svakomu od njih pridružimo brojevni pravac tako da bude $d(O, E_p) = 1 = d(O, E_q)$ i da točka E_p vrtnjom u ρ oko O za $\frac{\pi}{2}$ (suprotno od urine kazaljke - "pozitivna rotacija") podne u točku E_q. Točku O opet nazivamo **ishodištem** toga koordinatnog sustava, a jedinične vektore $\boldsymbol{i} = [\overrightarrow{OE_p}]$ i $\boldsymbol{j} = [\overrightarrow{OE_q}]$ - **baznim vektorima**. Uobičajilo se zadane brojevne pravce na p i q nazvati **koordinatnim osima**; na p - X-os (**apscisna os** X), a na q - Y-os (**ordinatna os** Y). Primijetimo da su koordinatnim sustavom $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ u ρ potpuno određeni koordinatni sustavi $(O; \boldsymbol{i})$ i $(O; \boldsymbol{j})$ na pravcima p i q redom. Neka je T bilo koja točka u ravnini ρ. Pravac u ρ točkom T usporedan s Y-osi siječe X-os u nekoj točki T_x, a pravac u ρ točkom T usporedan s X-osi siječe Y-os u nekoj točki T_y. Koordinatu od T_x u sustavu $(O; \boldsymbol{i})$ označujemo s x_T i nazivamo **apscisom** točke T, dok koordinatu od T_y u sustavu $(O; \boldsymbol{j})$ označujemo s y_T i nazivamo **ordinatom** točke T u (pravokutnom koordinatnom) sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Jednom riječju, kažemo da točka T ima u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **koordinate** x_T i y_T i pišemo $T = (x_T, y_T)$. (Štoviše, jasno je da vrijedi i obratno, tj. svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ odgovara, u danomu pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ u ravnini ρ, jedinstvena točka T u toj ravnini tako da bude $x_T = x$ i $y_T = y$.) Za brojeve-koordinate x_T i y_T kažemo i da su **skalarne komponente** radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$ (vektora $[\overrightarrow{OT}]$) u koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Radijus-vektore $\overrightarrow{OT_x} = x_T\overrightarrow{OE_p}$ i $\overrightarrow{OT_y} = y_T\overrightarrow{OE_q}$ nazivamo **vektorskim komponentama** radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$, a vektore $[\overrightarrow{OT_x}] = x_T\boldsymbol{i}$ i $[\overrightarrow{OT_y}] = y_T\boldsymbol{j}$ - **vektorskim komponentama** vektora $[\overrightarrow{OT}]$ (v. crtež). Primijetimo da koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ dijeli pripadnu ravninu na četiri dijela - **kvadranta**.



Po definiciji zbrajanja (radijus-)vektora je očito

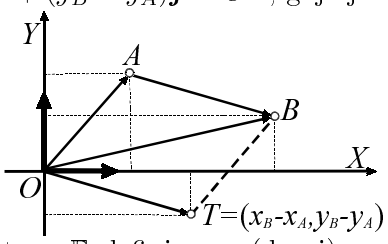
$$\boldsymbol{a} \equiv [\overrightarrow{OT}] = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \quad (\boldsymbol{r}_T \equiv \overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OE_p} + y\overrightarrow{OE_q}).$$

Napomena 2.2.2 Jasno je da u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, u danoj ravnini ρ, možemo prikazati samo one vektore iz $\mathbb{V}^3$ što imaju svoje predstavnike u toj ravnini. Za te vektore kažemo da su kolinearni ravnini ρ. Svaka tri ili više vektora kolinearna istoj ravnini nazivamo koplanarnim vektorima. Primjerice, vektori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ jesu koplanarni vektori.

Napomena 2.2.3 Često ćemo, a i uobičajeno je, ispuštati uglaste zagrade u oznaci za vektore, tj. umjesto $[\overrightarrow{AB}]$ često ćemo pisati samo $\overrightarrow{AB}$, što je oznaka za pripadnu usmjerenu dužinu. Obratno, ponekad ćemo umjesto

oznake $\overrightarrow{AB}$ za usmjerenu dužinu ili radijus-vektor rabiti vektorsku oznaku $\boldsymbol{a}$. Pritom ćemo, dakako, pomno paziti da ne dođe da pojmovne zabune.

Neka je $\boldsymbol{r} = [\overrightarrow{OT}]$ vektor kolinearan ravnini ρ, s predstavnikom $\overrightarrow{OT}$ u ρ, i neka je $T = (x_T, y_T)$ u nekom prvokutnom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ u toj ravnini. U skladu s Napomenom 2.2.3 smijemo pisati $\overrightarrow{OT} = x_T\boldsymbol{i} + y_T\boldsymbol{j}$ kao i $\boldsymbol{r} = x_T\overrightarrow{OE_x} + y_T\overrightarrow{OE_y}$ $(\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OE_x}, \boldsymbol{j} = \overrightarrow{OE_y})$. Ako je $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, onda je $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_A\boldsymbol{i} + y_A\boldsymbol{j}) - (x_B\boldsymbol{i} + y_B\boldsymbol{j}) = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} = \overrightarrow{OT}$, gdje je $T = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ (v. crtež).

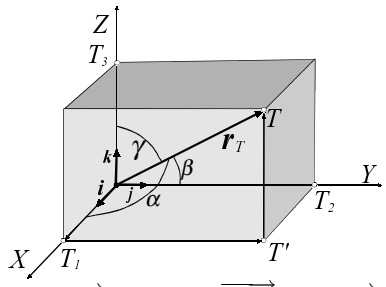


U prostoru $\mathbb{E}$ definiramo (desni) pravokutni koordinatni sustav slično onomu u ravnini: Neka su X, Y, Z tri međusobno okomita brojevna pravca u prostoru i istim ishodištem O tako da je pritom $d(O, E_x) = d(O, E_y) = d(O, E_z) = 1$ i da vrijedi tzv. "pravilo desne ruke", tj. određuje li palac *desne* ruke smjer od $\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OE_x}$ i kažiprst - smjer od $\boldsymbol{j} = \overrightarrow{OE_y}$ onda srednjak određuje smjer od $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{OE_z}$. Tada kažemo da je točkom O i vektorima $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$ u prostoru $\mathbb{E}$ zadan (desni) **pravokutni koordinatni sustav**, kojega označujemo s $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Napomena 2.2.4 Za svaku uređenu trojku $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ nekoplanarnih vektora sa svojstvom da se palac desne ruke može položiti u smjeru od $\boldsymbol{a}$, kažiprst - u smjeru od $\boldsymbol{b}$ i srednjak u smjeru od $\boldsymbol{c}$, kažemo da određuju desni sustav u prostoru $\mathbb{E}$. Analogno se, po "pravilu lijeve ruke" može definirati lijevi sustav u prostoru.

Kao i prije, brojevne pravce X, Y i Z, što su poslužili za definiranje koordinatnoga sustava, nazivamo **koordinatnim osima**. Tri ravnine određene koordinatnim osima nazivamo **koordinatnim ravninama**. Koordinatne ravnine dijele prostor $\mathbb{E}$ na osam dijelova - **oktanata**. **Koordinate** x_T, y_T, $z_T \in \mathbb{R}$ bilo koje točke T u prostoru $\mathbb{E}$, u danomu koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, određujemo polaganjem točkom T triju ravnina usporednih s koordinatnim ravninama. Svaka od njih, naime, tada siječe točno jednu od koordinatnih osi X, Y, Z redom u točkama T_x, T_y, T_z, pa definiramo **apscisu** x_T (**ordinatu** y_T, **aplikatu** z_T) kao koordinatu točke T_x (T_y, T_z) u sustavu $(O; \boldsymbol{i})$ ($(O; \boldsymbol{j})$, $(O; \boldsymbol{k})$).

Neka je dana T točka u prostoru $\mathbb{E}$ pa s T' označimo njezinu okomitu projekciju na koordinatnu ravninu XY (određenu osima X i Y). Pripadni radijus-vektor $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OT}$ možemo prikazati kao vektorski zbroj od $\overrightarrow{OT_1}$, $\overrightarrow{T_1T'}$ i $\overrightarrow{T'T}$ (v. crtež).



Budući da je $\overrightarrow{OT_1} = x_T\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{T_1T'} = \overrightarrow{OT_2} = y_T\boldsymbol{j}$ i $\overrightarrow{T'T} = \overrightarrow{OT_3} = z_T\boldsymbol{k}$, to je $\boldsymbol{r} = x_T\boldsymbol{i} + y_T\boldsymbol{j} + z_T\boldsymbol{k}$. Vidimo, dakle, da svaki koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ u prostoru $\mathbb{E}$ pridružuje svakoj točki T neku uređenu trojku realnih brojeva (x_T, y_T, z_T) - njezine koordinate u tomu sustavu. Vrijedi i obratno, svakoj uređenoj trojci $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ može se pridružiti jedinstvena točka T u prostoru $\mathbb{E}$ tako da, u danom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, brojevi x, y, z budu koordinate te točke. Prema tomu, skup $\mathbb{R}^3$ je ekvipotentan prostoru $\mathbb{E}$, tretiranom točkovnim skupom, pa često govorimo i o točkama prostora $\mathbb{R}^3$ pišući $T = (x, y, z)$.

Primijetimo da je i radijus-vektor $\boldsymbol{r}$ točke $T = (x, y, z)$ posve određen brojevima x, y, i z, koje sada nazivamo **skalarnim komponentama** od $\boldsymbol{r}$. Množeći te skalarne komponenete odgovarajućim jediničnim vektorima, dobivamo **vektorske komponenete** $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ i $z\boldsymbol{k}$ od $\boldsymbol{r}$. Prema tomu, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Često se služimo i matričnim zapisima, tj.

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Po svojstvu skalarnoga množenja sada slijedi

$$\lambda\boldsymbol{r} = \lambda x\boldsymbol{i} + \lambda y\boldsymbol{j} + \lambda z\boldsymbol{k}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, vektorsko zbrajanje sada povlači

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k},$$

gdje je $\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$, $i = 1, 2$. Sasvim analogno je

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = (x_1 - x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 - y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{k}.$$

Primijetimo da je duljina radijus-vektora $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OT}$, $T = (x, y, z)$, dana izrazom

$$r \equiv \|\boldsymbol{r}\| = \left\|\overrightarrow{OT}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(dužina $\overline{OT}$ je dijagonala pripadnoga kvadra). Kutove α, β, i γ što ih $\boldsymbol{r}$ zatvara redom s jediničnim vektorima $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$ nazivamo **priklonim kutovima**. Očito je

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Budući da je $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, to je eksplicite određen pripadni jedinični vektor

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma \equiv \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

Ponekad kažemo i da su brojevi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ **smjerovni kosinusi** od $\boldsymbol{r}$.

Svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AB}$ možemo, kao što smo vidjeli, prikazati razlikom radijus-vektora $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, pa je, dakle,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k}.$$

Primjer 2.2.1 Odredimo vektor $\boldsymbol{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i pripadni jedinični vektor $\boldsymbol{a}_0$, ako je $A = (3, -4, 5)$ i $B = (3, -1, 0)$.

$\boldsymbol{a} = (3-3)\boldsymbol{i} + (-1-(-4))\boldsymbol{j} + (0-5)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} = [\ 0 \quad 3 \quad -5\ ]$.
Budući da je $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$, to su smjerovni kosinusi od $\boldsymbol{a}$ brojevi $\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{34}} = 0$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$ i $\cos\gamma = -\frac{5}{\sqrt{34}}$, pa je $\boldsymbol{a}_0 = \frac{3}{\sqrt{34}}\boldsymbol{j} - \frac{5}{\sqrt{34}}\boldsymbol{k} \equiv [\ 0 \quad \frac{3}{\sqrt{34}} \quad \frac{-5}{\sqrt{34}}\ ]$.

U Definiciji 2.1.5 smo definirali linearnu (ne)zavisnost matrica. Na isti način te pojmove definiramo za vektore.

Definicija 2.2.6 *Za vektor* $\boldsymbol{a} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mu_n\boldsymbol{a}_n$, $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *kažemo da je* ***linearna kombinacija*** *danih vektora* $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$. *Reći ćemo da su vektori* $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ ***linearno zavisni*** *ako postoje realni brojevi* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *takvi da je* $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ *i* $|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| > 0$ (*tj. barem jedan* $\lambda_i \neq 0$, $i \in \{1, \cdots, n\}$). *U protivnom, ako je* $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ *samo u slučaju* $|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = 0$ (*tj.* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$), *kažemo da su vektori* $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ ***linearno nezavisni.***

Primijetimo da su linearno zavisna svaka dva kolinearna vektora, svaka tri koplanarna vektora, te svaka četiri vektora (iz $\mathbb{V}^3$), a da su linearno nezavisna svaka dva nekolinearna vektora i svaka tri nekoplanarna i nekolinearna vektora. (Ova činjenica se je očitovala u vektorskom prikazu - zapisu pomoću vektorskih komponenata.)

Budući da su jedinični vektori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ u svakom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ linearno nezavisni, zaključujemo:

(a) Vektor je nulvektor ako i samo ako su sve njegove komponente jednake nuli;

(b) dva vektora su jednaka ako i samo ako su im istoimene komponente jednake.

2.2.3 Vektorska množenja

U skupu $\mathbb{V}^3$ svih vektora definiramo dvije vrste množenja. Ishod jednoga je realan broj (skalar) pa govorimo o skalarnom množenju, a drugoga - vektor pa ga nazivamo vektorskim množenjem. Skalarno množeći vektorski umnožak vektorom dobivamo i tzv. mješoviti umnožak. Dakako, samo je vektorsko množenje (binarna) operacija na $\mathbb{V}^3$.

Definicija 2.2.7 ***Skalarnim množenjem*** (*ili* ***skalarnim produktom***) *nazivamo funkciju*

$$|: \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}, \quad |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Jednostavnosti radi, označimo $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \equiv \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{a}\| \equiv a$, $\|\boldsymbol{b}\| \equiv b$ i kut između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ slovom φ, pa definicija skalarnoga množenja dobiva zapis

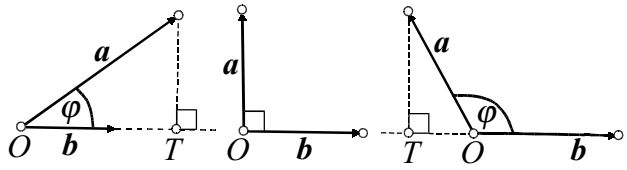
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi.$$

Izračunajmo skalarne umnoške svih parova jediničnih vektora $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$ što pripadaju bilo kojemu pravokutnom koordinatnom sustavu $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ u prostoru $\mathbb{E}$:

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1\cdot 1\cdot\cos 0 = 1 = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}$.

Očito je $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2$ i $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ čim su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ međusobno okomiti ili je barem jedan od njih nulvektor. Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dva ne-nulvektora svedena na zajednički početak O i neka je na pravcu od $\boldsymbol{b}$ dan koordinatni sustav $(O;\boldsymbol{b}_0)$. Okomitim projiciranjem vektora $\boldsymbol{a}$ na taj pravac dobivamo dužinu $\overline{OT}$, gdje točki T pripada koordinata $a_b = a\cos\varphi$ (v. crtež). Primijetimo da je $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_b b$, pa smijemo zaključiti da je $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} < 0$ $(= 0;\ > 0)$ onda i samo onda kad je $a_b < 0$ $(= 0;\ > 0)$.



Broj a_b nazivamo **skalarnom komponentom**, a vektor $a_b\boldsymbol{b}_0$ **vektorskom komponentom** vektora $\boldsymbol{a}$ **na pravcu vektora** $\boldsymbol{b}$, što je u skladu s nazivljem u pododjeljku 2.2.2. Osnovna svojstva skalarnoga množenja donosi ovaj teorem:

Teorem 2.2.5 *Neka su* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tada je*

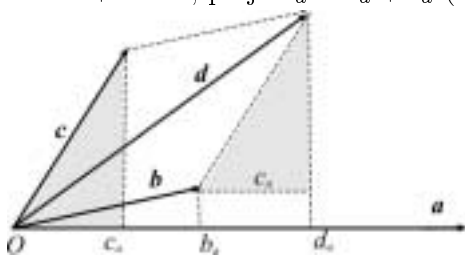
(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (komutativnost);

(ii) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ (distributivnost);

(iii) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$ (homogenost);

Dokaz. (i). $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi = ba\cos(-\varphi) = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(ii). Označimo $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{d}$, pa je $d_a = b_a + c_a$ (v. crtež) i $d_a\boldsymbol{a} = b_a\boldsymbol{a} + c_a\boldsymbol{a}$.



Sada po definiciji skalarne komponente slijedi $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \equiv \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(iii). Ako je $\lambda = 0$ tvrdnja je očigledno istinita. Ako je $\lambda > 0$ onda je $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = \lambda a$ i $\|\lambda\boldsymbol{b}\| = \lambda b$, a vektori $\lambda\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, odnosno $\boldsymbol{a}$ i $\lambda\boldsymbol{b}$, zatvaraju isti kut φ kao i vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Stoga je $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \lambda(ab\cos\varphi) = (\lambda a)b\cos\varphi =$

$\|\lambda\boldsymbol{a}\|\, b\cos\varphi = (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$, odnosno, $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \lambda(ab\cos\varphi) = a(\lambda b)\cos\varphi = a\,\|\lambda\boldsymbol{b}\|\cos\varphi = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

Ako je pak $\lambda < 0$ onda je $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = -\lambda a$ i $\|\lambda\boldsymbol{b}\| = -\lambda b$, a vektori $\lambda\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, odnosno $\boldsymbol{a}$ i $\lambda\boldsymbol{b}$, zatvaraju kut $\pi-\varphi$. Budući da je $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$, to je $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \lambda(ab\cos\varphi) = (-\lambda a)b(-\cos\varphi) = \|\lambda\boldsymbol{a}\|\, b\cos(\pi-\varphi) = (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$, odnosno, $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \lambda(ab\cos\varphi) = a(-\lambda b)(-\cos\varphi) = a\,\|\lambda\boldsymbol{b}\|\cos(\pi-\varphi) = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$. ■

Teorem 2.2.6 *Ako je u pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ *i* $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, *onda je*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Dokaz. Teorem 2.2.5 je izravna posljedica Teorema 2.2.4 i poznatih skalarnih umnožaka svih parova jediničnih vektora $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$. ■

Primjer 2.2.2 Odredimo kut što ga zatvaraju vektori $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ i $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.
Po Teoremu 2.2.5, iz $a\cdot b = ab\cos\varphi$ slijedi

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Dakle, $\cos\varphi = \frac{2\cdot1+(-3)\cdot1+1\cdot0}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+0}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$, pa je $\varphi = \arccos(-\frac{1}{2\sqrt{7}}) \approx 100^o53'24''$, tj. $\varphi \approx 1,76087$ radijana (v. sljedeću Napomenu 2.2.5).

Napomena 2.2.5 Po dogovoru smatramo da uređeni vektorski parovi $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ i $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ zatvaraju isti kut φ i da je $0 \le \varphi \le \pi$.

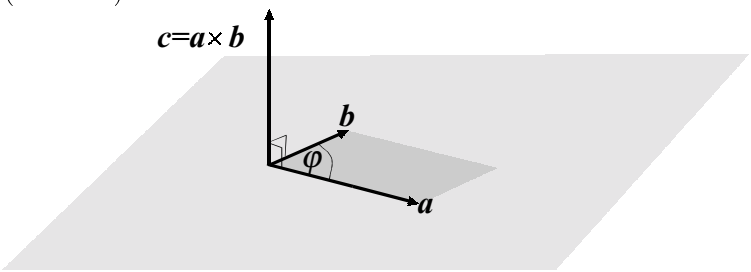
Definicija 2.2.8 ***Vektorskim množenjem*** (*ili* ***vektorskim produktom***) *nazivamo binarnu operaciju* $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$, $\times(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \equiv \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, *definiranu kako slijedi:*

vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *je okomit na vektore* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$;

uređena trojka $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ *određuje desni koordinatni sustav u prostoru;*

$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \equiv ab\sin\varphi$.

Uočimo da je vektorski umnožak $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektor kojemu je duljina jednaka površini paralelograma što ga određuju vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ svedeni na zajednički početak, te da mu je pravac okomit na ravninu određenu (kolinearnu) tim vektorima (v. crtež).



Teorem 2.2.7 *Neka su* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tada je*

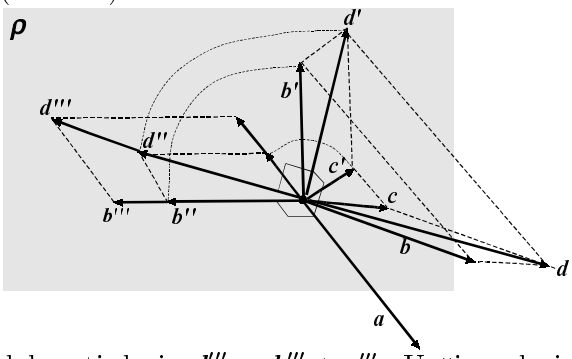
(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (antikomutativnost);

(ii) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ (distributivnost);

(iii) $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$ (homogenost).

Dokaz. (i). Budući da, po definiciji, uređena trojka $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ tvori desni sustav, to uređena trojka $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ tvori lijevi sustav (v. Napomenu 2.2.4). Ta činjenica i Definicija 2.2.8 povlače (i).

(ii). Neka je ρ ravnina okomita na vektor $\boldsymbol{a}$ kroz njegov početak, te neka je $\boldsymbol{b}'$ okomita projekcija vektora $\boldsymbol{b}$ na ρ. Neka je φ kut između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, a φ' kut između $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{b}'$. Tada je $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$ i $b' = b \cos \varphi' = b \sin \varphi$. Zarotirajmo $\boldsymbol{b}'$ u ρ oko zajedničkoga početka za $\frac{\pi}{2}$ i dobiveni vektor označimo s $\boldsymbol{b}''$, tako da $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'')$ tvore desni sustav. Primijetimo da je vektor $\boldsymbol{b}''$ okomit na vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}'$, dakle, i na vektor $\boldsymbol{b}$. Označimo $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b}'''$. Sličnim postupkom dobivamo vektore $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{c}''$ i $\boldsymbol{c}''' \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, te $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{d}''$ i $\boldsymbol{d}''' \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}$, gdje je $\boldsymbol{d} \equiv \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ (v. crtež).



Preostaje dokazati da je $\boldsymbol{d}''' = \boldsymbol{b}''' + \boldsymbol{c}'''$. Uočimo da je okomita projekcija (na ρ) paralelograma određenoga vektorima $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{b}$ paralelogram određen vektorima $\boldsymbol{c}'$ i $\boldsymbol{b}'$, a okomita projekcija $\boldsymbol{d}'$ dijagonale $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ prvoga paralelograma je dijagonala drugoga paralelograma, tj. $\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{c}'$. Rotacija u ravnini ρ oko zajedničkoga početka za $\frac{\pi}{2}$ prevodi paralelogram određen vektorima $\boldsymbol{b}'$ i $\boldsymbol{c}'$ u sukladni paralelogram određen vektorima $\boldsymbol{b}''$ i $\boldsymbol{c}''$ s dijagonalom $\boldsymbol{d}''$, pa je $\boldsymbol{d}'' = \boldsymbol{b}'' + \boldsymbol{c}''$. Množenjem te jednakosti s $||\boldsymbol{a}|| \equiv a$ dobivamo $\boldsymbol{d}''' = \boldsymbol{b}''' + \boldsymbol{c}'''$.

(iii). Ova se tvrdnja dokazuje kao (iii) u Teoremu 2.2.4. ■

Teorem 2.2.8 *Ako je u pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$ *i* $\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$, *onda je*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

Dokaz. Teorem 2.2.8 je izravna posljedica Teorema 2.2.7 i sljedećih jednostavnih činjenica (v. Definiciju 2.2.8):

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$;

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$. ■

Primijetimo da Teorem 2.2.8 dopušta i formalni determinantni zapis (v. §2.1.2):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Iz toga je zapisa očigledno da je $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ onda i samo onda, ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ kolinearni (što uključuje mogućnost da je neki od njih nulvektor). Primijetimo, također, da vektorsko množenje *nije* asocijativno. Štoviše, nije teško dokazati valjanost sljedećga teorema:

Teorem 2.2.9 *Ako su* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}^3$ *onda je*

(i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$;

(ii) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Primjer 2.2.3 Izračunajmo površinu paralelograma što ga određuju vektori $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ i $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

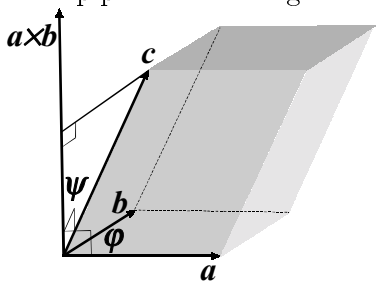
$$P = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \left\| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \|-2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

Definicija 2.2.9 ***Mješovitim množenjem*** (*ili* ***vektorsko-skalarnim produktom***) *nazivamo funkciju iz* $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3$ *u* $\mathbb{R}$ *definiranu pravilom* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \mapsto (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

Označimo li kut između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ slovom φ, a kut između $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ slovom ψ, pravilo mješovitoga množenja dobiva zapis

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\| \cdot \cos\psi =$$
$$\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \sin\varphi \cdot \|\boldsymbol{c}\| \cdot \cos\psi \equiv abc \sin\varphi \cos\psi.$$

To dopušta mješoviti umnožak $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ interpretirati, do na predznak, kao obujam paralelopipeda određenoga vektorima $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$



Predznak mješovitoga umnoška je pozitivan čim $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ određuje desni sustav, a negativan u slučaju lijevoga sustava.

Teorem 2.2.10 *Ako je u pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$ *i* $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$, *onda je*

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Teorem 2.2.10 je posljedica Teorema 2.2.5 i Teorema 2.2.7. ■

Pomoću Teorema 2.2.10 se lako dokazuju (rabeći determinantina svojstva) ove jednakosti:

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$;

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$;

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

2.2.4 Vježbe

1. Dokazati da je relacija $\approx$ (v. Definiciju 2.2.1) na skupu svih usmjerenih dužina iz prostora $\mathbb{E}$ razredbena relacija.

Dokaz. Za svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AB}$, dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ imaju isto polovište. Dakle, $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{AB}$, tj. relacija $\approx$ je refleksivna. Nadalje, neka je $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$, tj. neka dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište. Tada i dužine $\overline{CB}$ i $\overline{DA}$ imaju zajedničko polovište (radi se o istim dužinama i istom polovištu), pa je $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{AB}$. Dakle, relacija $\approx$ je i simetrična. Napokon, za tranzitivnost, neka su $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ takve usmjerene dužine da je $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{EF}$. Dokažimo da je tada $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{EF}$!

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (\overline{AB} \parallel \overline{CD} \wedge \overline{AC} \parallel \overline{BD} \wedge d(A,C) = d(B,D)) \\ \overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow (\overline{CD} \parallel \overline{EF} \wedge \overline{CE} \parallel \overline{DF} \wedge d(C,E) = d(D,F)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\overline{AB} \parallel \overline{EF} \wedge \overline{AE} \parallel \overline{BF} \wedge d(A,E) = d(B,F)) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{EF}.$$

2. Neka su dane bilo koje dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Dakazati:

(a) $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{BD}$;

(b) $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \approx \overrightarrow{DC}$.

3. Dokazati tvrdnju (iii) iz Teorema 2.2.2, tj. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

Dokaz. Ako je bar jedan od vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nulvektor ili je $\lambda = 0$, dokaz je trivijalan. Neka $\boldsymbol{a}$ ni $\boldsymbol{b}$ nisu nulvektori i neka je $\lambda \neq 0$. Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ kolinearni, postoji broj μ za koji je $\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{b}$. Sada se tvrdnju (iii) lako dakaže pomoću tvrdnja (i) i (ii) istoga teorema:

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda(\mu\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) = \lambda((\mu+1)\boldsymbol{b}) = (\lambda(\mu+1))\boldsymbol{b} =$

$(\lambda\mu+\lambda)\boldsymbol{b} = (\lambda\mu)\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\mu\boldsymbol{b}) + \lambda\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

Neka $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nisu kolinearni. Prikažimo vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ redom usmjerenim dužinama $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O, pa neka je C ona točka za koju je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Tada točke O, A, C, B određuju paralelogram, pa dužine $\overline{AB}$ i $\overline{OC}$ imaju zajedničko polovište. Neka su A', B' i C' redom one točke za koje je $\lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $\lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ i $\lambda\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC'}$. Primijetimo da je i četverokut $OA'C'B'$ paralelogram (po homotetiji sa središtem O i koeficijentom $\lambda \neq 0$), pa je $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Napokon,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \lambda\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC'} =$

$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

4. Dokazati da su dva ne-nulvektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ okomita onda i samo onda kad njihov skalarni umnožak iščezava.

5. Dokazati Teorem 2.2.9 tj.
(i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$;
(ii) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

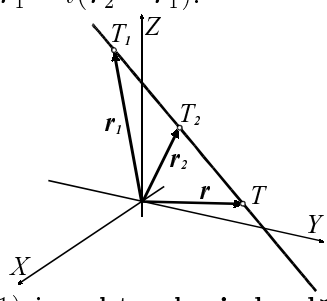
2.3 ANALITIČKA GEOMETRIJA

Neka je u prostoru $\mathbb{E}$ zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Promatrat ćemo neke važne točkovne ($\mathbb{E} \approx \mathbb{R}^3$, v. §2.2.2) podskupove prostora $\mathbb{E}$ (pravce, neke krivulje, ravnine i neke plohe) i razmatrati uvjete pod kojima neka točka $T = (x, y, z)$ pripada takvomu podskupu. Algebraizacija tih uvjeta vodi do analitičkih izraza - jednadžaba promatranih podskupova. To onda omogućuje algebarsko opisivanje i nekih odnosa među tim podskupovima.

2.3.1 Pravac u prostoru i u ravnini

Temeljno svojstvo svakog pravca jest da je posve određen bilo kojim dvjema svojim točkama. Neka je pravac p u prostoru $\mathbb{E}$ određen točkama T_1 i T_2 kojima, s obzirom na odabranu točku O, pripadaju redom radijus-vektori $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$, te neka je T bilo koja točka na p s radijus-vektorom $\boldsymbol{r}$. Tada su usmjerene dužine $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T}$ kolinearne (leže na p), pa postoji broj $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{T_1T} = t\overrightarrow{T_1T_2}$, odnosno, (v. crtež)

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \tag{1}$$



Relacija (1) je **vektorska jednadžba pravca** p. Označimo li konstantni vektor $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ sa $\boldsymbol{s}$ (smjerovni vektor od p), jednadžba (1) poprima oblik

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{s},\ t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Jasno je da se svaki vektor kolinearan vektoru $\boldsymbol{s}$ smije uzeti za smjerovni vektor pravca p.

Neka je u prostoru $\mathbb{E}$ s ishodištem O zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, pa neka je u njemu $\boldsymbol{s} = [a\ b\ c]$, $\boldsymbol{r}_1 = [x_1\ y_1\ z_1]$ i $\boldsymbol{r} = [x\ y\ z]$. Tada iz relacije (2) dobivamo tri jednadžbe:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

koje predstavljaju **parametarski zapis pravca** p. Ako su sve komponente od $\boldsymbol{s}$ različite od nule, parametar t se može eliminirati pa iz (3) dobivamo

tzv. **kanonski** (ili **simetrični**) **zapis pravca** p:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}. \tag{4}$$

(Ponekad se zapisom (4) služimo i u slučajevima kad su neke komponente od $\boldsymbol{s}$ jednake nuli, *formalno* pišući pripadne ništice u odgovarajućim nazivnicima.)

Uočimo da kanonski zapis (4) sadrži tri jednadžbe koje su međusobno linearno zavisne:

$$\begin{cases} b(x-x_1)=a(y-y_1) \\ c(y-y_1)=b(z-z_1) \\ a(z-z_1)=c(x-x_1) \end{cases}. \tag{5}$$

Dovoljne su, dakle, dvije od tih jednadžba da bi pravac bio posve određen. To vrijedi i sasvim općenito. Pravac se, naime, može zadati dvjema linearno nezavisnim (realnim) linearnim jednadžbama:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z=0 \end{cases}, \tag{5'}$$

iz kojih se lako mogu, eliminacijom pojedinih varijabla, dobiti zapisi (5) i (4). (U narednoj točki 2.3.3 ćemo vidjeti da svaka od jednadžba u (5′) i (5) predstavlja neku ravninu u prostoru.)

Primjer 2.3.1 Odredimo jednadžbu (kanonski zapis) pravca p kojemu pripadaju točke $A=(2,2,4)$ i $B=(8,\frac{13}{2},\frac{5}{2})$.
Jedan smjerovni vektor toga pravca jest $\overrightarrow{AB}=[6\ \frac{9}{2}\ -\frac{3}{2}]$. Da bi traženi zapis bio "ljepši", uzmimo $\boldsymbol{s}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=[4\ 3\ -1]$. Uvrštavanjem točkovnih koordinata od A i skalarnih komponenata od $\boldsymbol{s}$ u relaciju (4) dobivamo kanonski zapis $p\cdots\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-1}$.

Primjer 2.3.2 Kanonski zapis koordinatne X-osi jest $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ (linearnim jednadžbama: $y=0$, $z=0$), jer je pripadni vektor $\boldsymbol{i}=[1\ 0\ 0]$ i jer prolazi ishodištem $O=(0,0,0)$. Slični su zapisi za Y-os i Z-os.

Često se za smjerovni vektor promatranog pravca uzima pripadni jedinični vektor $\boldsymbol{s}_0=\frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|}$. Tada zapis (4) poprima oblik

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}, \tag{6}$$

gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ komponenete od $\boldsymbol{s}_0$ (smjerovni koeficijenti od $\boldsymbol{s}$), pa mora biti $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Neka pravac p leži u koordinatnoj XY-ravnini (v. crtež dolje), pa promatrajmo samo točke i podskupove te ravnine. Tada nasljeđeni koordinatni sustav $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$ svakoj točki pridružuje samo dvije koordinate, odnosno, svakom vektoru samo dvije komponente (treća, od Z-osi, u sustavu $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ iščezava). Jednadžbe u (3) sada poprimaju oblik

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}, \tag{3'}$$

a umjesto (4) dobivamo

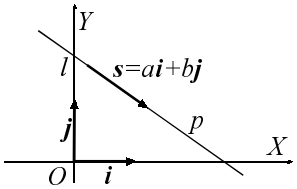
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}. \tag{4'}$$

Napišemo li jednadžbu (4′) u obliku

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1), \tag{7}$$

dobivamo poznatu "srednjoškolsku" pravčevu jednadžbu jednom točkom. Količnik $\frac{b}{a}$ nazivamo **smjerovnim koeficijentom** od p i obično ga označujemo slovom k. Odaberemo li za točku T_1 sjecište pravca p s koordinatnom Y-osi, $T=(0,l)$, dobivamo dobro poznatu pravčevu "eksplicitnu jednadžbu"

$$y=kx+l. \tag{8}$$



Želimo li da relacije (3′), (4′), (7) ili (8) određuju isti pravac p i u prostornom koordinatnom sustavu $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$, trebamo svakoj od njih dopisati jednadžbu $z=0$.

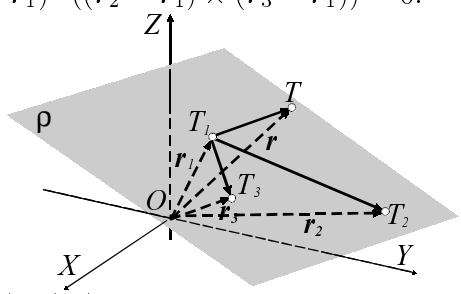
2.3.2 Ravnina u prostoru

Neka su T_1, T_2 i T_3 bilo koje tri nekolinearne točke u prostoru $\mathbb{E}$ s pripadnim radijus-vektorima $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ i $\boldsymbol{r}_3$ redom (s obzirom na dano ishodište O). Tim točkama je određena jedna i samo jedna ravnina ρ koji ih sadrži. Neka je T bilo koja točka te ravnine i neka joj pripada radijus-vektor $\boldsymbol{r}$. Tada su usmjerene dužine $\overrightarrow{T_1T_2}$, $\overrightarrow{T_1T_3}$ i $\overrightarrow{T_1T}$ koplanarne (leže u ρ), pa njihov mješoviti umnožak iščežva, tj.

$$\overrightarrow{T_1T}\cdot(\overrightarrow{T_1T_2}\times\overrightarrow{T_1T_3})=0. \tag{9}$$

Ili, ekvivalentno, pomoću radijus-vektora

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot((\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1))=0. \tag{10}$$



Relacije (9) i (10) jesu **vektorske jednadžbe ravnine** ρ.

Neka je u prostoru $\mathbb{E}$ s ishodištem O dan pravokutni koordinatni sustav $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$, pa neka je u njemu $T=(x,y,z)$ i $T_i=(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3$. Mješoviti umnožak (9) se tada može zapisati u determinantnom obliku

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{11}$$

ili

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Relacije (11) i (12) nazivamo **jednadžbama ravnine kroz tri točke**. Neka ravnina ρ ne prolazi ishodištem O, i neka ona siječe koordinatne osi X, Y, i Z redom u točkama $T_1 = (a, 0, 0)$, $T_2 = (0, b, 0)$ i $T_3 = (0, 0, c)$, $a, b, c \neq 0$. Tada iz (11) dobivamo tzv. **segmentni oblik jednadžbe ravnine** ρ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{13}$$

Neka je $\boldsymbol{n}$ bilo koji vektor okomit na ravninu ρ (okomit, dakle, i na svaki pravac u ρ). Učvrstimo bilo koju točku T_1 u ρ, pa neka je T varijabilna točka u ρ. Pripadni radijus-vektori neka su redom $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}$. Tada su vektori $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ međusobno okomiti, što povlači iščezavanje njihova skalarnog umnoška:

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0. \tag{14}$$

To je još jedan oblik **vektorske jednadžbe za ravninu** ρ. Svaki vektor okomit na ravninu ρ nazivamo **normalnim vektorom** (ili **normalom**) te ravnine i najčešće ga označujemo slovom $\boldsymbol{n}$. (Takav je, primjerice, vektor $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)$ iz relacije (10).) Ako je, u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{n} = [A\ B\ C]$, a $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $T = (x, y, z)$, tj. $\boldsymbol{r}_1 = [x_1\ y_1\ z_1]$ i $\boldsymbol{r} = [x\ y\ z]$, onda (14) poprima oblik

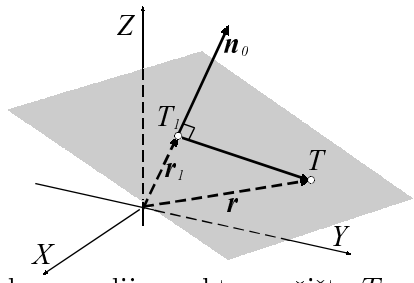
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \tag{15}$$

što je tzv. **jednadžba ravnine** ρ **jednom točkom** $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Označimo li u (15) konstantu $-(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$ slovom D, dobivamo tzv. **opći oblik jednadžbe ravnine** ρ:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{16}$$

ili (vektorski)

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} + D = 0. \tag{16'}$$



Neka je sada $\boldsymbol{r}_1$ radijus-vektor nožišta T_1 okomice iz ishodišta O na ravninu ρ. Tada je njegova duljina $\|\boldsymbol{r}_1\| \equiv p$ jednaka udaljenosti od O do ρ. Odaberimo jedinični normalni vektor $\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{r}_1}{\|\boldsymbol{r}_1\|}$ na ρ (v. crtež). Zbog $\boldsymbol{n}_0 \boldsymbol{r}_1 = p$, iz (14) dobivamo

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r} - p = 0 \tag{17}$$

ili (skalarno)

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0, \tag{17'}$$

gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ komponente jedinične normale $\boldsymbol{n}_0$ na ravninu ρ. Relacije (17) i (17′) nazivamo **Hesseovim** (ili **normalnim**) **oblicima jednadžbe ravnine** ρ. Primijetimo da se opći oblik svodi na Hesseov dijeljenjem brojem $\frac{-D}{|D|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ kad je $D \neq 0$, odnosno, dijeljenjem s $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ kad je $D = 0$.

Primjer 2.3.3 Koordinatna ZX-ravnina prolazi ishodištem $O = (0,0,0)$ i okomita je na vektor $\boldsymbol{j} = [0\ 1\ 0]$. Po (15), njezina jednadžba je $0(x-0) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0$, tj $y = 0$. Slično dobivamo da je $z = 0$ jednadžba koordinatne XY-ravnine, a $x = 0$ jednadžba koordinatne YZ-ravnine.

2.3.3 Međuodnosi točaka, pravaca i ravnina

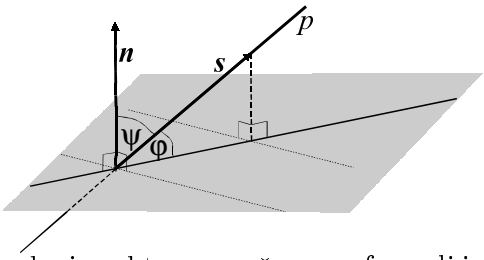
Dvije točke u prostoru $\mathbb{E}$ su ili različite ili se podudaraju. U prvomu slučaju se postavlja pitanje međusobne udaljenosti. Bilo koja promatrana točka ili leži na danom pravcu (u danoj ravnini) ili je izvan njega (nje). U prvomu slučaju njezine koordinate moraju udovoljavati jednadžbi toga pravca (te ravnine). U drugomu pak slučaju, zanimljivo pitanje jest ono o udaljenosti točke od pravca (ravnine).

Dva pravca, općenito, mogu biti usporedna (uključujući podudaranje), mogu biti mimosmjerna, a mogu se i presijecati. U prva dva slučaja se postavlja pitanje o njihovoj međusobnoj udaljenosti, a u trećemu - o kutu što ga zatvaraju. (Pitanje o kutu ima smisla i za mimosmjerne pravce, ako se radi o kutu pripadnih smjerovnih vektora!)

Slično razmišljamo i o odnosu dviju ravnina: ako su usporedne - kolika im je međusobna udaljenost(?), a ako se sijeku - koliki kut zatvaraju(?).

Promatramo li odnos pravca i ravnine, ima smisla istražiti leži li dani pravac u danoj ravnini ili ne, pa, ako ne leži u njoj, je li joj usporedan - kolika je udaljenost(?) - ili ju probada - koja točka jest probodište i koliki je prikloni kut(?).

Da bismo odgovorili na postavljena pitanja, najprije istaknimo nekoliko temeljnih činjenica: Dvije ravnine su međusobno usporedne točno onda kad su im normalni vektori kolinearni; dva pravca su međusobno usporedna točno onda kad su im smjerovni vektori kolinearni; ravnina i pravac su međusobno usporedni točno onda kad su pripadni normalni vektor i pripadni smjerovni vektor međusobno okomiti. I općenito: Kut između dviju ravnina je jednak kutu između njihovih normalnih vektora; kut između dvaju pravaca je jednak kutu između njihovih smjerovnih vektora; kut između ravnine i pravca jest suplement (do $\frac{\pi}{2}$) kuta između pripadnoga normalnog vektora i pripadnoga smjerovnog vektora (v. crtež).



Kut između dvaju vektora se računa po formuli iz Primjera 2.2.2. Udaljenost dviju točaka $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$ računamo po poznatoj formuli:

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Udaljenost $d(p_1, p_2)$ usporednih pravaca p_1 i p_2 jednaka je udaljenosti njihovih sjecišta s bilo kojim na njih okomitim pravcom.

Neka su usporedne ravnine α_1 i α_2 zadane Hesseovim jednadžbama

$$\alpha_1 \cdots \boldsymbol{n}_{01} \cdot \boldsymbol{r} - p_1 = 0, \quad \alpha_2 \cdots \boldsymbol{n}_{02} \cdot \boldsymbol{r} - p_2 = 0, \quad \boldsymbol{n}_{01} = \pm \boldsymbol{n}_{02}.$$

Tada je udaljenost $d(\alpha_1, \alpha_2)$ jednaka $|p_1 - p_2|$ čim je $\boldsymbol{n}_{01} = \boldsymbol{n}_{02}$, odnosno, $p_1 + p_2$ čim je $\boldsymbol{n}_{01} = -\boldsymbol{n}_{02}$. Udaljenost $d(T_1, \alpha)$ točke $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ od ravnine α se određuje tako da se točkom T_1 položi ravnina α' usporedna s α i izračuna udaljenost $d(\alpha', \alpha) = d(T_1, \alpha)$. Da bi se odredila udaljenost usporednih pravaca, može ih se presjeći na njih okomitom ravninom i izračunati udaljenost dobivenih probodišta. Udaljenost od pravca do njemu usporedne ravnine određuje se izračunavanjem udaljenosti od bilo koje točke toga pravca do ravnine. Napokon, udaljenost između dvaju mimosmjernih pravaca određuje se izračunavanjem udaljenosti između dviju usporednih ravnina od kojih svaka sadrži po jedan promatrani pravac.

Primjer 2.3.4 Dani su pravci

$$q_1 \cdots \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{2} \quad \text{i} \quad q_2 \cdots \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

Istražimo njihov međusobni položaj.

Pravci q_1 i q_2 nisu međusobno usporedni, jer im smjerovni vektori $\boldsymbol{s}_1 = [-2\ 1\ 2]$ i $\boldsymbol{s}_2 = [0\ 1\ 1]$ nisu kolinearni. Neka je α_1 ravnina što sadrži pravac q_1 i usporedna je s pravcem q_2. Za normalni vektor $\boldsymbol{n}_1$ od α_1 smijemo uzeti $\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = [-1\ 2\ -2]$ (v. Teorem 2.2.7), a za njezinu posve određenu točku smijemo uzeti $T_1 = (1, 0, 4)$ na pravcu q_1. Tako dobivamo

$$\alpha_1 \cdots -(x-1) + 2(y-0) - 2(z-4) = 0, \quad \text{tj.} \quad x - 2y + 2z - 9 = 0.$$

Za ravninu α_2, što sadrži pravac q_2 i usporedna je s pravcem q_1, na sličan način ($\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{s}_1$, $T_2 = (3, 1, -2)$) dobivamo

$$\alpha_2 \cdots x - 2y + 2z + 3 = 0.$$

Ravnine α_1 i α_2 su usporedne (i različite), pa su pravci q_1 i q_2 mimosmjerni. Njihovu međusobnu udaljenost ćemo dobiti pomoću jednadžaba za α_1 i α_2 u normalnomu obliku:

$$\alpha_1 \cdots \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z - 3 = 0, \qquad \alpha_2 \cdots -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Dakle, $d(q_1, q_2) = d(\alpha_1, \alpha_2) = p_1 + p_2 = 3 + 1 = 4$. Kut φ između smjerovnih vektora $\boldsymbol{s}_1$ i $\boldsymbol{s}_2$ od q_1 i q_2 redom, dobivamo iz njihova skalarnog umnoška:

$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{\|\boldsymbol{s}_1\|\cdot\|\boldsymbol{s}_2\|} = \frac{-2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dakle $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2.3.4 Neke krivulje i plohe

Pozabavimo se najprije tzv. krivuljama drugoga reda. Neka je u ravnini ρ dan pravokutni koordinatni sustav $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$. Pod **krivuljom drugoga reda** podrazmijevamo skup svih točaka $T=(x,y)$ u ravnini ρ koordinate kojih zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

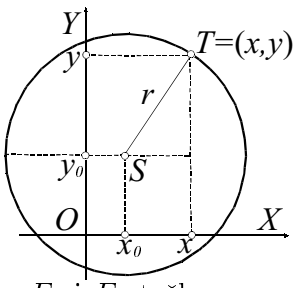
$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \tag{18}$$

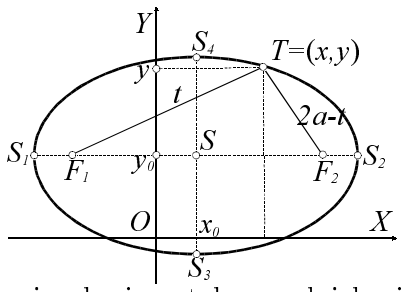
s danim realnim koeficijentima $A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$, takvima da je barem jedan od A, B ili C različit od nule. Sve krivulje s općom jednadžbom (18) mogu se dobiti kao presjeci ravnina i stožnih plaštova - stoga ih nazivamo i **čunjosječnicama**. Sada ćemo malo bolje upoznati kružnicu, elipsu, hiperbolu i parabolu, tj. njihove jednadžbe u nekim posebnim položajima s obzirom na odabrani koordinatni sustav.

Definicija 2.3.1 *Neka je S točka u ravnini ρ i r pozitivan realni broj. Skup $\mathcal{K}(S;r)\equiv\{T\mid d(S,T)=r\}$ svih točaka T u ravnini ρ udaljenih r od točke S nazivamo **kružnicom**. Pritom kažemo da je točka S njeno **središte** (ili **centar**), a broj r da joj je **polumjer** (ili **radijus**).*

Neka je, u sustavu $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$, $S=(x_0,y_0)$ i $T=(x,y)$. Iz definicijske jednakosti $d(S,T)=r$ (v. crtež) dobivamo pripadnu jednadžbu

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{19}$$





Neka su F_1 i F_2 točke u ravnini ρ i neka je a takav realni broj da je $2a>d(F_1,F_2)$. Tada točkovni podskup $\mathcal{E}(F_1,F_2;a)=\{T\mid d(F_1,T)+d(F_2,T)=2a\}$ od ρ nazivamo **elipsom**. Točke F_1, F_2 zovemo **žarištima** (ili **fokusima**), a broj $e\equiv\frac{1}{2}d(F_1,F_2)$ **geometrijskim ekscentricitetom** promatrane elipse. (U slučaju $e=0$, tj. $F_1=F_2\equiv F$, elipsa $\mathcal{E}$ postaje kružnicom $\mathcal{K}$; $S=F$ i $r=a$.) Dužinu $\overline{S_1S_2}$, gdje su S_1 i S_2 presječne točke od $\mathcal{E}$ pravcem F_1F_2, nazivamo **velikom osi**; primijetimo da je duljina $d(S_1,S_2)$ velike osi $2a$ i da je $e<a$. Neka je, u sustavu $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$, $F_1=(x_0-e,y_0)$, $F_2=(x_0+e,y_0)$ i $T=(x,y)$. Tada definicijska jednakost $d(F_1,T)+d(F_2,T)=2a$ povlači
$\sqrt{(x-x_0+e)^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(x-x_0-e)^2+(y-y_0)^2}=2a$, što daje

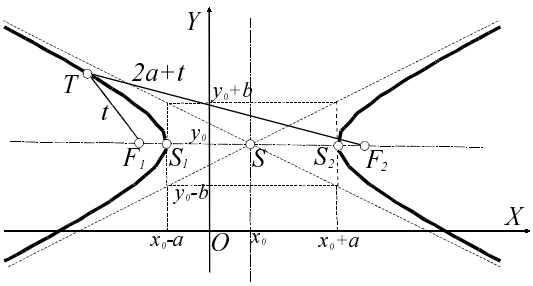
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\quad b^2\equiv a^2-e^2,\quad (b\le a). \tag{20}$$

Relacija (20) je elipsina jednadžba u slučaju - posebno odabranom položaju - kad joj je velika os usporedna s X-osi. Točku $S = (x_0, y_0)$ nazivamo **središtem**, a dužinu $\overline{S_3S_4}$ **malom osi** od $\mathcal{E}$; duljina $d(S_3, S_4)$ male osi jest $2b$. Nalaze li se elipsina žarišta na pravcu usporednom s Y-osi, pripadna jednadžba će biti oblika (20) u kojoj su $x - x_0$ i $y - y_0$ izmijenili mjesta.

Definicija 2.3.2 *Neka su F_1 i F_2 točke u ravnini ρ i neka je a takav realni broj da je $0 < 2a < d(F_1, F_2)$. Točkovni podskup $\mathcal{H}(F_1, F_2; a) = \{T \mid |d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a\}$ od ρ nazivamo **hiperbolom**. Točke F_1, F_2 zovemo **žarištima** (ili **fokusima**), a broj $e \equiv \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$ **geometrijskim ekscentricitetom** promatrane hiperbole. (Slučaj $e = 0$, tj. $F_1 = F_2$, nije moguć.) Dužinu $\overline{S_1S_2}$, gdje su S_1 i S_2 presječne točke od $\mathcal{H}$ pravcem F_1F_2, nazivamo **glavnom osi**; primijetimo da je duljina $d(S_1, S_2)$ glavne osi $2a$ i da je $e > a$.*

Neka je, u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, $F_1 = (x_0 - e, y_0)$, $F_2 = (x_0 + e, y_0)$ i $T = (x, y)$. Tada definicijska jednakost $|d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a$ povlači
$|\sqrt{(x - x_0 + e)^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{(x - x_0 - e)^2 + (y - y_0)^2}| = 2a$, što daje

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad b^2 \equiv e^2 - a^2. \tag{21}$$

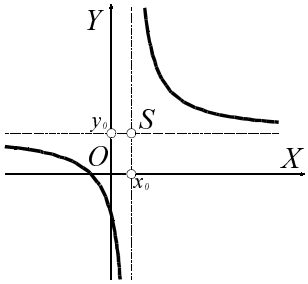


Relacija (21) je hiperbolina jednadžba u slučaju kad joj je velika os usporedna s X-osi. Točku $S = (x_0, y_0)$ nazivamo **središtem**, a dužinu $\overline{S_3S_4}$ **sporednom osi** od $\mathcal{H}$; duljina $d(S_3, S_4)$ sporedne osi jest $2b$. Pravce $y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ nazivamo hiperbolinim **asimptotama**. Nalaze li se hiperbolina žarišta na pravcu $x = x_0$ usporednom s Y-osi, u pripadnoj jednadžbi oblika (21) će $x - x_0$ i $y - y_0$ izmijeniti mjesta tj.

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \tag{22}$$

Neka se hiperbolina žarišta F_1 i F_2 nalaze na pravcu $y - y_0 = x - x_0$ (simetrično s obzirom na njezino središte $S = (x_0, y_0)$) i neka je $b = a$. Tada je $F_1 = (x_0 - a, y_0 - a)$, $F_2 = (x_0 + a, y_0 + a)$ i asimptote su usporedne s koordinatnim osimam (v. crtež), a hiperbolina jednadžba poprima oblik

$$(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a^2}{2}. \tag{23}$$

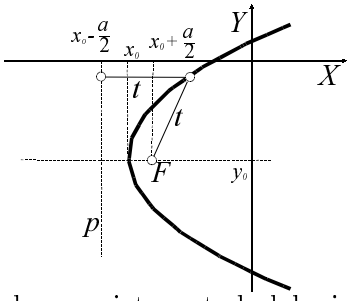


Slično se, kad je $b = a$ i žarišta na pravcu $y - y_0 = -(x - x_0)$, za hiperbolinu jednadžbu dobiva

$$(x - x_0)(y - y_0) = -\frac{a^2}{2}. \tag{24}$$

Definicija 2.3.3 *Neka je p pravac u ravnini ρ i neka je F točka u ρ izvan p. Skup $\mathcal{P}(F;p) = \{T \mid d(F,T) = d(F,p)\}$ svih točaka T u ravnini ρ jednako udaljenih od točke F i od pravca p nazivamo* ***parabolom*** *(ili* ***hitnicom****). Za F kažemo da je* ***žarište*** *(ili* ***fokus****), a za p da je* ***ravnalica*** *(ili* ***direktrisa****) dotične parabole.*

Označimo $d(F,p) \equiv a$, pa neka je u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ pravac p usporedan s Y-osi i zadan jednadžbom $x = x_0 - \frac{a}{2}$, a $F = (x_0 + \frac{a}{2}, y_0)$ (v. crtež).



Iz definicijskoga uvjeta se tada lako izvede pripadna parabolina jednadžba

$$(y - y_0)^2 = 2a(x - x_0). \tag{25}$$

Ako je ravnalica p zadana jednadžbom $x = x_0 + \frac{a}{2}$, a žarište $F = (x_0 - \frac{a}{2}, y_0)$, jednadžba poprima oblik

$$(y - y_0)^2 = -2a(x - x_0). \tag{25'}$$

Kad je ravnalica p usporedna s X-osi i zadana jednadžbom $y = y_0 - \frac{a}{2}$, odnosno $y = y_0 + \frac{a}{2}$, a žarište $F = (x_0, y_0 + \frac{a}{2})$, odnosno $F = (x_0, y_0 - \frac{a}{2})$, dobivamo simetrične jednadžbe

$$(x - x_0)^2 = 2a(y - y_0), \tag{26}$$

odnosno,

$$(x - x_0)^2 = -2a(y - y_0). \tag{26'}$$

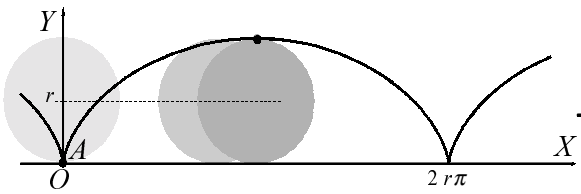
Kao što smo pravac u ravnini mogli zadati dvjema jednadžbama sa zajedničkim parametrom (v. (3′)), a pravac u prostoru trima jednadžbama sa zajedničkim parametrom (v. (3)), tako - **parametarski** - možemo zadati i krivulju u ravnini ili prostoru. Primjerice, parametarske jednadžbe za kružnicu $\mathcal{K}(O;r)$ (tj. $x^2 + y^2 = r^2$) u ravnini ρ s pravokutnim koordinatnim

sustavom $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ jesu: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi\rangle$. Promtramo li istu kružnicu u prostoru $\mathbb{E}$ s pravokutnim koordinatnim sustavom$(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ (ravnina ρ se podudara s koordinatnom XY-ravninom), parametarski zapis poprima oblik $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = 0$, $[0, 2\pi\rangle$. Dakako da krivulja, općenito, može imati više različitih parametarskih zapisa - jednadžaba.

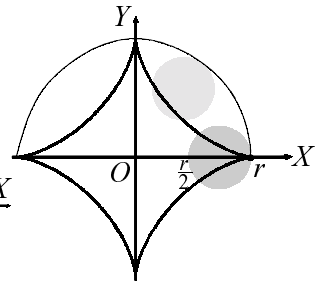
Primjer 2.3.5 Parametarske jednadžbe

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

određuju ravninsku krivulju koju nazivamo **cikloidom** (v. crtež dolje). Cikloida opisuje "putanju" kojom se giba točka $A = (0, 0, 0)$ na kružnici $\mathcal{K}$ $\cdots$ $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, $z = 0$, dok se $\mathcal{K}$ "kotrlja" po X-osi.



Cikloida.



Astroida.

Primjer 2.3.6 Jednadžbe

$$x = r\cos^3 t,\ y = r\sin^3 t,\ z = 0, \quad t \in [0, 2\pi\rangle\,, \tag{28}$$

predstavljaju parametarski zapis ravninske krivulje **astroide**, što ju opisuje točka $A = (r, 0, 0)$ na kružnici $\mathcal{K}'$ $\cdots$ $(x - \frac{3r}{4})^2 + y^2 = (\frac{r}{4})^2$, $z = 0$, dok se $\mathcal{K}'$ "kotrlja" iznutra po kružnici $\mathcal{K}$ $\cdots$ $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, ne izlazeći iz ravnine $z = 0$.

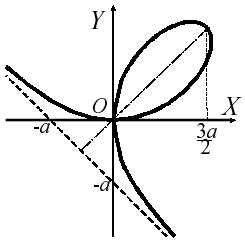
Eliminiranjem parametra t dobivamo jednadžbu $(z = 0)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}. \tag{28'}$$

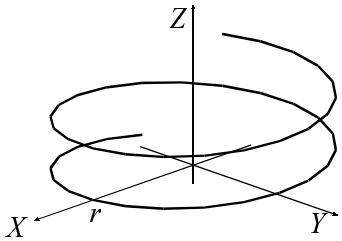
Primjer 2.3.7 Za danu konstantu $a > 0$, parametarske jednadžbe

$$x = \frac{3at}{1 + t^3},\ y = \frac{3at^2}{1 + t^3},\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

određuju tzv. **Descartesov list**



Descartesov list.



Kru žna uzvojnica.

Eliminiranjem parametra t dobivamo jednadžbu $(z = 0)$

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \tag{29'}$$

Primjer 2.3.8 Za dane konstante a i $r > 0$, parametarske jednadžbe

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = at, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

predstavljaju **kružnu uzvojnicu** (ili **cilindričnu spiralu**) - prostornu krivulju koju opisuje točka što se na udaljenosti r vrti oko pravca $p \cdots x = 0$, $y = 0$, i istodobno se stalnom brzinom a giba usporedno s tim pravcem.

Promotrimo sada, po sličnosti s krivuljama drugoga reda, tzv. plohe drugoga reda. Neka je u prostoru $\mathbb{E}$ zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Pod **plohom drugoga reda** (ili **kvadrikom**) podrazumijevamo skup svih točaka $T = (x, y, z)$ u prostoru $\mathbb{E}$ koordinate kojih zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

s realnim koeficijentima A, B, C, D, E, F, G, H, J i K, pod uvjetom da je barem jedan od A, B, C, D, E ili F različit od nule. Posebno će nas zanimati samo neke kvadrike.

Jednadžba

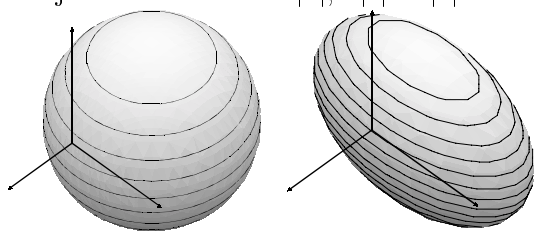
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{31}$$

predstavlja **kuglinu plohu** (ili **sferu**) sa **središtem** $S = (x_0, y_0, z_0)$ i **polumjerom** (ili **radijusom**) $r > 0$. Neprazni presjek ove plohe ravninom jest ili kružnica ili točka, što povlači da se kružnica u prostoru može zadati i kao presjek sfere i ravnine (v. crtež).

Za dane realne konstante a, b i c, jednadžba

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{32}$$

određuje plohu koju nazivamo **elipsoidom**. U ovomu posebnom položaju njegove su osi $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ i $\overline{C_1C_2}$ (v. crtež) usporedne s koordinatnim osima, a duljine su im redom $2|a|$, $2|b|$ i $2|c|$.



Sfera i elipsoid.

Neprazni elipsoidovi presjeci ravninama usporednim s koordinatnim osima jesu ili elipse ili točke. Primijetimo da u slučaju $a = b = c$ elipsoid postaje sferom.

Nadalje, jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{33}$$

opisuje **jednokrilni eliptični hiperboloid**. Njegovi neprazni presjeci ravninama usporednima sa Z-osi jesu ili hiperbole ili točke, dok su mu presjeci ravninama usporednim s XY-ravninom elipse. Cikličkim zamjenama $x \rightsquigarrow y$, $y \rightsquigarrow z$, $z \rightsquigarrow x$ i $a \rightsquigarrow b$, $b \rightsquigarrow c$, $c \rightsquigarrow a$ dobivamo jednadžbu "iste" plohe u drugom položaju (Y-os je "povlaštena"):

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{33'}$$

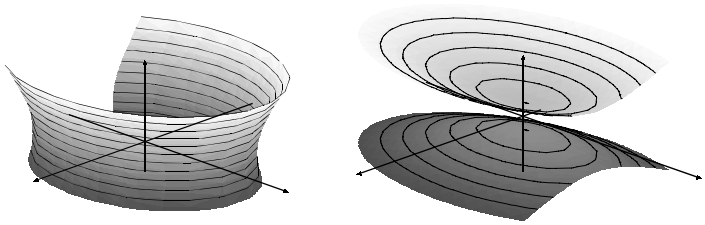
a još jednom takvom zamjenom dobivamo jednadžbu ("povlaštena" je X-os):

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{33''}$$

Jednadžba

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{34}$$

opisuje **dvokrilni eliptični hiperboloid.**



Jednokrilni i dvokrilni eliptični hiperboloid.

Njegov neprazni presjek ravninom usporednom sa Z-osi jest hiperbola, dok mu je neprazni presjek ravninom usporednom s XY-ravninom ili elipsa ili točka. Ciklički izmijenjujući koordinate (varijable) x, y, z, kao i pripadne konstante a, b, c, dobivamo jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima:

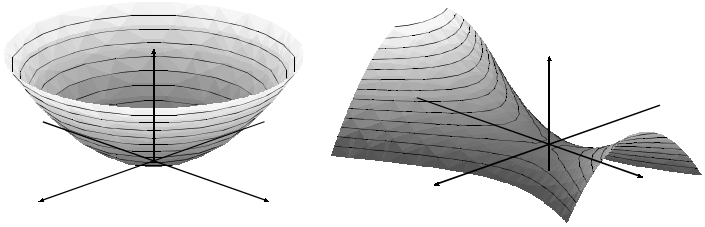
$$-\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{i} \tag{34'}$$

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{34''}$$

Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{35}$$

opisuje plohu koju nazivamo **eliptičnim paraboloidom**, a prikazana je dolje na crtežu.



Elipti čni i hiperboločni paraboloid.

Faktor 2 u monomu $2z$ nije bitan, ali je tehnički (algebarski) pogodan. Karakteristični presjeci ove plohe prikladnim ravninama jesu elipse ili parabole. Odgovarajućim cikličkim izmjenama dobivamo još dvije jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima.

Jednadžba

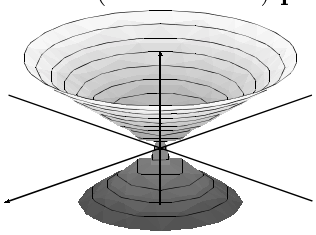
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z \tag{36}$$

određuje plohu koju nazivamo **hiperboličnim paraboloidom** (v. crtež gore).

Komentari sasvim analogni onima o (35) vrijede i za (36).
Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{37}$$

opisuje **stožastu** (ili **konusnu**) **plohu** prikazanu ovim crtežom:



Stožasta ploha.

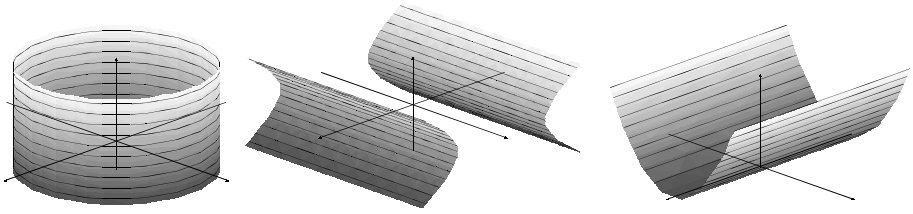
Opet su moguće još dvije (cikličke) varijante. Nadalje, jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{38}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{39}$$

$$y = 2az^2 \tag{40}$$

opisuju redom **eliptične**, **hiperbolične** i **parabolične valjčaste** (ili **cilindrične**) **plohe** (v. pripadne crteže). Dakako da su i u ovim jednadžbama moguće prije spominjane cikličke izmjene. Ove valjčaste plohe su samo vrlo posebni primjeri (opće) valjčaste plohe



Valjčaste plohe.

Definicija 2.3.4 *Neka je u ravnini ρ dana krivulja $\mathcal{K}$* (v. Definiciju 4.3.2) *te neka je p pravac koji probada ρ. Promatrajmo skup svih pravaca u prostoru koji sijeku krivulju $\mathcal{K}$ i usporedni su s pravcem p. Tretirajući svaki pravac točkovnim skupom, pripadnu* (*točkovnu*) *uniju nazivamo* ***valjčastom*** (*ili* ***cilindričnom***) ***plohom***. *Pritom govorimo da je pravac p* ***izvodnica*** (*ili* ***generatrisa***), *a krivlja $\mathcal{K}$* ***ravnalica*** (*ili* ***direktrisa***) *te valjčaste plohe.*

Primjerice, eliptičnoj valjčastoj plohi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jedna izvodnica jest Z-os, a ravnalica joj je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$. Primijetimo da je svaka ravnina (trivijalna) valjčasta ploha (za krivulju $\mathcal{K}$ treba uzeti odgovarajući pravac k).

Mi ćemo, najčešće, promatrati one valjčaste plohe izvodnice kojih su koordinatne osi, a ravnalice su im neke od poznatih krivulja. (Ravnalica, naravno, ne će nužno ležati u nekoj od koordinatnih ravnina.)

Napomenimo i to da se prostorna krivulja često zadaju presjekom dviju ploha. U takvom se slučaju linearnim kombinacijama pripadnih jednadžaba dobivaju jednadžbe i drugih ploha što sadrže tu krivulju.

Primjer 2.3.9 Kružnicu (zadanu presjekom sfere i ravnine)

$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x + y - 2 = 0$

možemo zadati i presjekom dviju valjčastih ploha. Eliminiramo li, naime, varijablu y iz prve jednadžbe uvrštenjem (iz one druge) $y = -x+2$, dobivamo jednadžbu valjčaste plohe

$(x-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1,$

koja zajedno s ravninom $x + y - 2 = 0$ određuje tu kružnicu. Slično, eliminiranjem varijable x dobivamo jednadžbu valjčaste plohe

$(y-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1,$

koja zajedno s ravninom $x + y - 2 = 0$ određuje tu istu kružnicu. Primijetimo da ta kružnica nije posve određena dvjema dobivenim (netrivijalnim) valjčastim plohama, jer njihov presjek sadrži i kružnicu koja se dobije njegovim presijecanjem ravninom $x - y = 0$.

2.3.5 Polarni, cilindrični i sferni koordinatni sustavi

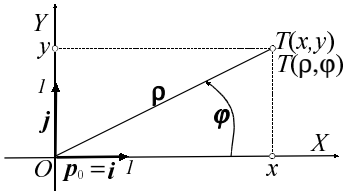
Pored pravokutnoga koordinatnog sustava u ravnini, u mnogim se slučajevima tehnički korisnim pokazuje i tzv. **polarni koordinatni sustav** što ćemo ga sada definirati.

Neka je p bilo koji pravac u ravnini σ i neka je na njemu zadan koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{p}_0)$, $\|\boldsymbol{p}_0\| = 1$. Za bilo koju točku T u ravnini σ, $T \neq O$, neka je φ kut između vektora $\boldsymbol{p}_0$ i $\overrightarrow{OT}$. (Ovdje je važno da je $\boldsymbol{p}_0$ prvi a $\overrightarrow{OT}$ drugi krak promatranoga kuta; u suprotnom je taj kut $-\varphi$.) Ako je $T = O$ stavljamo, po dogovoru, da je pripadni kut $\varphi = 0$. Neka je $\rho = d(O, T)$ udaljenost od O do T. Primijetimo da je točka T posve određena brojevima - **polarnim koordinatama** - ρ i φ, $\rho \in [0, \cdot\rangle$ i $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, pa pišemo $T = (\rho, \varphi)$. Točku $O = (0,0)$ nazivamo **ishodištem** (ili **polom**), a zraku određenu s O i $\boldsymbol{p}_0$ - **polarnom osi** polarnoga koordinatnog sustava pod oznakom $(O; \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{\phi})$ ili $(O; \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$ (Ovdje $\boldsymbol{\rho}_0$ i $\boldsymbol{\varphi}_0$ označavaju "opće" jedinične vektore s početkom u (bilo kojoj) točki $T = (\rho, \varphi)$: $\boldsymbol{\rho}_0$ je određen usmjerenom dužinom $\overrightarrow{OT}$, a $\boldsymbol{\varphi}_0$ je tangencijalni vektor na središnju kružnicu u točki T. Primijetimo da se, lokalno gledajući, radi desnom pravokutnom sustavu s ishodištem u točki T.)

Zadamo li u ravnini σ i pravokutni koordinatni sustav $(O'; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ tako da bude $O' = O$ i $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{p}_0$, lako ćemo ustanoviti koje su veze između Kartezijevih (x, y) i polarnih koordinata (ρ, φ) bilo koje točke T u σ (v. crtež):

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi; \tag{41}$$

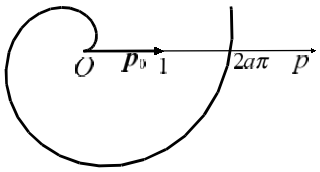
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \arctan \frac{y}{x}. \tag{41'}$$



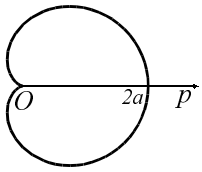
Pri određivanju kuta φ iz koordinata x i y treba voditi računa o predznaku tih koordinata. (O ciklometrijskim funkcijama vidi u §3.1.3)

Mnogo je važnih ravninskih krivulja kojih su jednadžbe u polarnomu sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\phi})$ jednostavnije od odgovarajućih u Kartezijevu sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Primjerice, središnja kružnica u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ ima jednadžbu $x^2+y^2 = r^2$, a u polarnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\phi})$ - $\rho = r$.

Primjer 2.3.10 Ravninsku krivulju što ju u polarnomu sustavu opisuje jednadžba $\rho = a\varphi$, $a > 0$ (konstanta), nazivamo **Arhimedovom spiralom**. (Ovdje dopuštamo $\varphi \in [0, \cdot\rangle$; v. crtež dolje.)



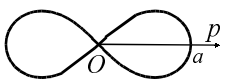
Arhimedova spirala.



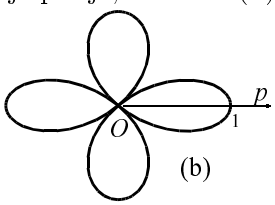
Kardioida.

Lako se provjeri da je u Kartezijevu sustavu njezina jednadžba $x^2 + y^2 = a^2 \arctan^2 \frac{y}{x}$.

Krivulja s polarnom jednadžbom $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ je tzv. ***kardioida*** (ili ***srcolika krivulja***). Nadalje, $\rho = \cos\varphi$ je polarna jednadžba kružnice s Kartezijevom jednadžbom $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Polarna jednadžba $\rho = \cos 2\varphi$ opisuje "***četverolistnu djetelinu***" (krivulju s četiri petlje; v. crtež (a) dolje), dok polarna jednadžba $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ opisuje tzv. ***lemniskatu*** (ili "osmicu", odnosno, krivulju s dvije petlje; v. crtež (b)*:*



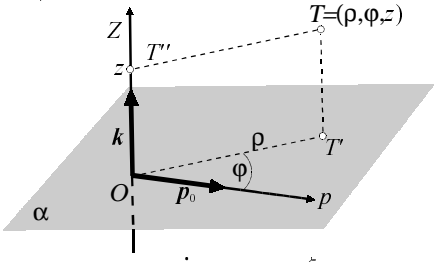
(a)



(b)

U prostoru $\mathbb{E}$, pored pravokutnoga (Kartezijeva) koordinatnog sustava, često radi praktičnih razloga zadajemo i tzv. cilindrični i sferni koordinatni sustav. Neka je σ bilo koja ravnina u prostoru $\mathbb{E}$. Neka je u σ dan polarni sustav $(O; \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{\phi}) \equiv (O; \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$. Neka je q pravac točkom O okomit na ravninu σ. Napokon, neka je na q dan koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{k})$, pa ga nazovimo Z-osi. Time je u prostoru $\mathbb{E}$ definiran **cilindrični koordinatni sustav** $(O; \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{k}) \equiv (O; \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{k})$ u kojemu se svakoj točki T može pridijeliti uređena trojka (ρ, φ, ζ), gdje su ρ i φ polarne koordinate, u sustavu

$(O; \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{\phi})$, okomite projekcije T' točke T na ravninu σ, a ζ je koordinata, u sustavu $(O, \boldsymbol{k})$, okomite projekcije T'' točke T na pravac q (v. crtež).



$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = \zeta; \tag{42}$$

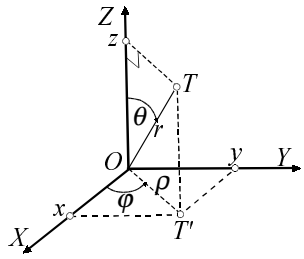
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x}, \zeta = z. \tag{42'}$$

Sferni koordinatni sustav u prostoru $\mathbb{E}$ definiramo na sljedeći način: Neka je σ bilo koja ravnina u prostoru i neka je u σ zadan polarni koordinatni sustav $(O; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}) \equiv (O; \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$. Neka je q pravac točkom O okomit na ravninu σ i neka q nosi koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{k})$, tj. Z-os. Označimo s T' okomitu projekciju na ravninu σ po volji odabrane točke T, $T \neq O$, u prostoru. Uočimo da su tada posve određeni brojevi $r = d(O,T) > 0$, $\vartheta \in [0,\pi]$ - kut između radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$ i $\boldsymbol{k}$ i $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ - kut između $\mathbf{p}_0$ i radijus-vektora $\overrightarrow{OT'}$, koje nazivamo **sfernim koordinatama** točke T. Budući da je točka T posve određena uređenom trojkom (r, θ, φ), smijemo pisati $T = (r, \theta, \varphi)$. Pritom, ako je T na pozitivnoj zraci Z-osi neka su joj sferne koordinate $(r, 0, 0)$, a na negativnoj - $(r, 0, \pi)$. Ishodištu O se pridijeljuju sferne koordinate $(0, 0, 0)$. Dobiveni sustav označujemo s $(O; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ ili $(O; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$. (U drugoj oznaci su φ i θ izmijenili mjesta pa se, lokalno gledajući, opet radi o desnom pravokutnom sustavu s ishodištem u točki T.)

Zadamo li u prostoru $\mathbb{E}$ pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ i sferni sustav $(O; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$, odnosno $(O'; \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$, tako da bude $O' = O$, $\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{i}$ i da im se Z-osi podudaraju, možemo odrediti (v. crtež) veze između pravokutnih (x, y, z) i sfernih $(\rho, \vartheta, \varphi)$ koordinata bilo koje točke T:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta; \tag{43}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x}. \tag{43'}$$



Primjer 2.3.11 Sferina jednadžba (u pravokutnim koordinatama) $x^2+y^2+z^2 = a^2$ poprima u sfernim koordinatama (uvrštavanjem po (43)) trivijalni oblik $r = a$. Kružničin zapis (u pravokutnim koordinatama) $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z = 0$, u sfernim koordinatama postaje $r = a$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

2.3.6 Vježbe

1. Skup $\mathcal{P}$ svih ravnina u prostoru što prolaze danim pravcem p nazivamo **pramenom** ravnina. Neka su $\rho_i \cdots A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$, dvije (različite) ravnine danoga pramena $\mathcal{P}$. Dokazati da se jednadžba svake ravnine σ toga pramena može dobiti nekom linearnom kombinacijom dviju danih jednadžaba, tj. za svaki $\sigma \in \mathcal{P}$ postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tako da bude

$$\sigma \cdots \lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0. \quad (44)$$

Dokaz. Ako je $\sigma = \rho_1$, tvrdnja je očito istinita (uzme se bilo koji $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$). Sasvim slično vrijedi u slučaju $\sigma = \rho_2$. Neka je sada $\sigma \in \mathcal{P}$, tj. neka σ sadrži p, i neka je $\rho_1 \neq \sigma \neq \rho_2$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bilo koja točka u ravnini σ i izvan pravca p. Tada T_0 ne leži u ρ_1, pa je $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 \neq 0$. Odaberimo bilo koja dva realna broja λ_1, λ_2 za koja vrijedi

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1}. \quad (45)$$

Očito je da ovi λ_1 i λ_2 zajedno s $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ zadovaljavaju relaciju (44). Napokon, jednadžba (44) tada opisuje jedinstvenu ravninu, i to upravo σ, jer ju zadovoljavaju koordinate svake točke na danomu pravcu p i koordinate odabrane točke T_0.

2. Dokazati da (svaka) ravnina što sadrži Z-os ima jednadžbu $Ax + By = 0$.

3. Neka je pravac p zadan jednadžbama $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ (presjekom dviju ravnina). Napisati njegovu kanonsku jednadžbu.

U tu svrhu potražimo one ravnine u pramenu $\mathcal{P}$ pravca p koje su usporedne s dvjema koordinatnim osima, npr. s X-osi i Y-osi. Njihove su jednadžbe redom $F_1 y + G_1 z + H_1 = 0$ i $E_2 x + G_2 z + H_2 = 0$ (usp. Zadatak 2.), gdje smijemo uzeti $F_1 = A_2 B_1 - A_1 B_2$ i $E_2 = A_1 B_2 - A_2 B_1$. Iz tih jednadžaba redom dobivamo $z = -\frac{H_1 + F_1 y}{G_1}$, $z = -\frac{H_2 + E_2 x}{G_2}$, što daje traženu kanonsku jednadžbu

$$\frac{x + \frac{H_2}{E_2}}{-\frac{G_2}{E_2}} = \frac{y + \frac{H_1}{F_1}}{-\frac{G_1}{F_1}} = \frac{z}{1}.$$

Odabirući, umjesto $[-\frac{G_2}{E_2} \ -\frac{G_1}{F_1} \ 1]$, za smjerovni vektor $[F_1 G_2 \ E_2 G_1 \ -E_2 F_1]$, dobivamo ekvivalentnu kanonsku jednadžbu polaznoga pravca p

$$\frac{x + \frac{H_2}{E_2}}{F_1 G_2} = \frac{y + \frac{H_1}{F_1}}{E_2 G_1} = \frac{z}{-E_2 F_1}.$$

4. Neka su dani ravnina $\rho \cdots Ax + By + Cz + D = 0$ i pravac $p \cdots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Dokazati da za kut φ između ρ i p vrijedi ova relacija:

$$\sin\varphi = \frac{Aa + Bb + Cc}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Poglavlje 3

KONVERGENCIJA I NEPREKIDNOST

3.1 ELEMENTARNE FUNKCIJE

U ovomu odjeljku ćemo se baviti najvažnijim funkcijama (v. §1.3.1) iz $\mathbb{R}$ (v. §1.4.1-2) u $\mathbb{R}$, tj. najvažnijim realnim funkcijama jedne realne varijable. Posebnu pozornost ćemo posvetiti onim funkcijama što imaju veliku važnost u tehničkoj primjeni i praksi.

3.1.1 Zadavanje funkcija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$

Uobičajeno je da se (realnom) funkcijom naziva i bilo koji analitički (algebarski) izraz što sadrži varijablu (parametar, neovisnu promijenjivu veličinu) x i opisuje pravilo, tj. konačni redoslijed algebarskih ili inih operacija, po kojimu se određuje pridružena joj (i o njoj ovisna) veličina y. Tako se, primjerice, zapisi

$$y = x^2, \quad y = \tfrac{2x-3}{x+5}, \quad y = \sqrt[3]{\tfrac{2}{1-x}},$$

nazivaju funkcijama iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Da bismo se s tim sasvim složili, tj. da bi sve bilo u skladu s Definicijom 1.3.1, držat ćemo se ovoga dogovora:

Neka je $y = f(x)$ zapis u kojemu analitički izraz $f(x)$ sadrži (samo jednu) varijablu x. Tada taj zapis definira funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, pri čemu je $X \subseteq \mathbb{R}$ podskup koji tvore svi oni elementi $x \in \mathbb{R}$ za koje izraz $f(x)$ određuje jedinstveni realni broj, a f je pravilo što ga propisuje izraz $f(x)$. U tomu slučaju govorimo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ **zadana analitički** zapisom $y = f(x)$.

Primjer 3.1.1 Odredimo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ iz analitičkoga zapisa

$$y = \tfrac{2x-3}{x+5}.$$

U izrazu $\frac{2x-3}{x+5}$ se primijenjuju sve četiri osnovne računske operacije. Znamo da su $+$, $-$, i $\cdot$ definirane za svaki uređen par realnih brojeva, dok je dijeljenje

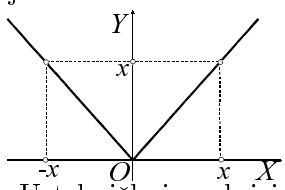
definirano za svaki uređen par (a, b), $b \neq 0$. Slijedi da je definicijsko područje X tražene funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ skup $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 \neq 0\}$, tj. $X = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$, a f je pravilo $x \mapsto f(x) = y$ propisano izrazom $\frac{2x-3}{x+5}$.

Primjer 3.1.2 Određuju li analitički izrazi $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}}$ i $\frac{x-x^2}{1+x}$ istu realnu funkciju? Ne vodeći računa o vrijednostima što ih smije poprimiti varijabla x, formalno dobivamo

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x+2x}{x(1-x)}} = \frac{x-x^2}{1+x},$$

pa oba izraza određuju isto pravilo f. Međutim, domene su im različite, jer prvi izraz ima smisla na $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$, a drugi na $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Dani analitički izrazi, dakle, ne određuju istu realnu funkciju.

Funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ se može zadati i **grafički**, tj. njezinim grafom $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Primjerice, skup $\{(x, -x) \mid x < 0\} \bigcup \{(x, x) \mid x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (v. crtež) jest graf funkcije $|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $||(x) = |x|$, tzv. apsolutne vrijednosti ili norme na $\mathbb{R}$ (v. §1.4.3).



U tehničkoj praksi je grafičko zadavanje realnih funkcija vrlo učestalo. Svakom se elementu (x, y) danoga skupa $G \subset X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$ pridijeljuje, u odabranom koordinatnom sustavu, jedinstvena točka $T = (x, y)$ i time definira funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$. (Jasno, *ne* može svaki podskup $G \subseteq \mathbb{R}^2$ poslužiti za ovu svrhu! U novije vrijeme te skupove-grafove crtaju automatske naprave, odnosno, elektronička računala.)

Ako je definicijsko područje realne funkcije konačni skup $X \subseteq \mathbb{R}$ (ne "prevelikoga" kardinalnog broja), moguće je eksplicite popisati sve vrijednosti varijable x i pripadne vrijednosti y (ovisne o x). Tada se popuni odgovarajuća tablica, primjerice,

x	0	1	2	3	4	5
y	-1	1	3	5	7	9

.

Polazeći od takve tablice, kažemo da je **tablično zadana** funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = y$.

Ponekad se tablično "zadaju" i neke funkcije domene kojih su beskonačni skupovi, s uputama (pravilima) za izračunavanje (najčešće, tek *približnih*) vrijednosti kojih nema u tablicama. Te približne vrijednosti su samo, za stanovite potrebe zadovoljavajuće, aproksimacije točnih vrijednosti promatrane funkcije, koje ne možemo ili ne znamo ili ih se "ne isplati" posvema točno odrediti. Najčešća i najjednostavnija uputa je tzv. **linearna interpolacija** (**ekstrpolacija**) koja se može sažeto opisati kako slijedi.

Neka su funkciji $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, poznate samo vrijednosti u točkama $x_1, \cdots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, (koje smo poredali po veličini, tj $x_1 < \cdots <$

x_n) i neka je $x_0 \in X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$. Tada "nepoznatu" vrijednost $f(x_0)$ aproksimiramo vrijednošću y_0, $y_0 \approx f(x_0)$, na ovaj način:

$y_0 = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x_0 - x_i)$, čim je $x_i < x_0 < x_{i+1}$, $i \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$;

$y_0 = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_0 - x_1)$, čim je $x_0 < x_1$;

$y_0 = f(x_n) + \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}(x_0 - x_n)$, čim je $x_0 > x_n$.

Dobro poznate srednjoškolske "Logaritamske tablice" sadrže nekoliko važnih primjera tablično "zadanih" funkcija.

Primjer 3.1.3 Neka je funkcija $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ "zadana" tablicom

x	0	1	2	3	4	5
y	-1	1	3	5	7	9

.

Odredimo, rabeći linearnu interpolaciju i linearnu ekstrapolaciju, približne vrijednosti za $f(2,5)$ i $f(5,8)$.

Budući da je $x_3 = 2 < 2,5 < 3 = x_4$, to prva formula (interpolacija) daje

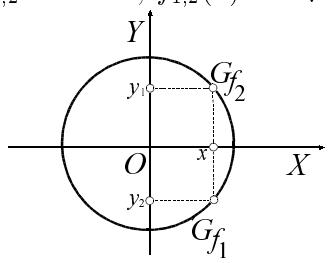
$f(2,5) \approx 3 + \frac{5-3}{3-2}(2,5 - 2) = 4.$

Za drugu vrijednost trebamo (desnu) ekstrapolaciju ($5,8 > 5 = x_6$):

$f(5,8) \approx 9 + \frac{9-7}{5-4}(5,8 - 5) = 10,6.$

Promatrajmo sada jednadžbu $F(x, y) = 0$ u kojoj dano pravilo F povezuje realne nepoznanice x i y. Ako se na nekom podskupu $X \subseteq \mathbb{R}$ svakom elementu $x \in X$ može pridružiti točno jedan element $y \in \mathbb{R}$ tako da uređeni par (x, y) zadovaljava polaznu jednadžbu, onda kažemo da je jednadžbom $F(x, y) = 0$ **implicitno zadana** funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$. U tomu je slučaju, dakle, $F(x, f(x)) = 0$ za svaki $x \in X$. U praksi se često pojavljuje slučaj da jednadžba $F(x, y) = 0$ dopušta, za svaki x iz nekog podskupa $X \subseteq \mathbb{R}$, više (od jedne) vrijednosti za y, pa se tada kaže da ta jednadžba određuje više implicitno zadanih funkcija. (Pitanje o obstojnost implicitne funkcije je vrlo važno i mi ćemo ga sasvim općenito riješiti u Matematičkoj analizi, III.)

Primjer 3.1.4 Neka je $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $x, y \in \mathbb{R}$. Tada jednadžba $F(x, y) = 0$ određuje na segmentu $X = [-1, 1]$ dvije implicitno zadane funkcije $f_{1,2} : X \to \mathbb{R}$, $f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ (v. crtež).



Promatrajmo dvije funkcije $\phi, \psi : T \to \mathbb{R}$ definirane na istomu skupu $T \subseteq \mathbb{R}$. Za svaki $t \in T$ označimo pripadne funkcijske vrijednosti s $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$. Ako je funkcija ϕ injektivna, njezino suženje $\phi : T \to \phi[T] \equiv X$

je bijekcija, pa postoji njoj inverzna funkcija $\phi^{-1} : X \to T$, $\phi^{-1}(x) = t$ čim je $x = \phi(t)$. Tada je dobro definirana kompozicija $\psi\phi^{-1} \equiv f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\psi\phi^{-1})(x)$. Pritom kažemo da je dobivena funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ **parametarski zadana** jednadžbama $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ (ili funkcijama ϕ i ψ). Prijelaz s jednadžaba $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ na eksplicitni oblik $y = f(x)$ nazivamo **eliminacijom parametra** t.

Primjer 3.1.5 Neka su funkcije $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane pravilima $\phi(t) = t-1$, $\psi(t) = t^2 + 1$. Budući da je ϕ bijekcija, postoji $\phi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i očito je $\phi^{-1}(x) = x + 1$. Prema tomu, jednadžbama $x = t - 1$, $y = t^2 + 1$ je parametarski zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\psi\phi^{-1})(x) = \psi(\phi^{-1}(x)) = \psi(x + 1) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$.

Napomenimo da je u praksi ponekad vrlo teško ili čak nemoguće eliminirati parametar t. Zbog toga je razrađena tehnika za analiziranje parametarski zadane funkcije preko pripadnog parametra.

3.1.2 Globalna svojstva realnih funkcija

Ovdje ćemo razvrstati funkcije iz X u $\mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, prema nekim njihovim (globalnim) svojstvima.

Definicija 3.1.1 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,* ***omeđena****, ako*

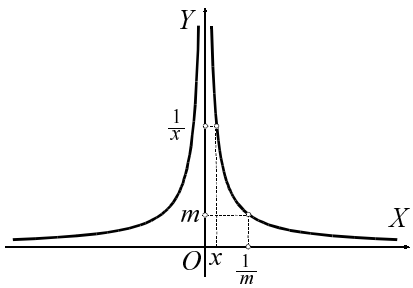
$$(\exists M \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in X)\ |f(x)| \leq M.$$

Ako funkcija nije omeđena, kažemo da je ***neomeđena****. Reći ćemo da je funkcija f* ***omeđena odozgor*** *(****omeđena odozdol****), ako*

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X)\ f(x) \leq M \quad ((\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in X)\ f(x) \geq m).$$

Geometrijski interpretirano, graf G_f omeđene funkcije f leži "nad" X u pruzi između $\mathbb{R} \times \{-M\}$ i $\mathbb{R} \times \{M\}$, odnosno, slika $f[X]$ je sadržana u segmentu $[-M, M]$. Očito je funkcija f omeđena onda i samo onda, ako je omeđena odozgor i odozdol.

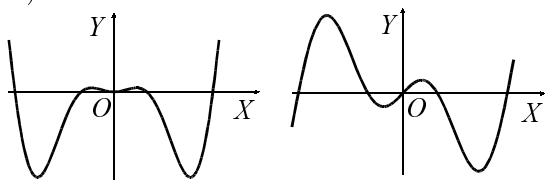
Primjer 3.1.6 Pokažimo da je funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|}$ neomeđena (v. graf G_f). U tu je svrhu dovoljno za svaki $r \in \mathbb{R}^+$ pronaći neki $x \neq 0$ tako da bude $f(x) = |f(x)| > r$. Taj uvjet povlači da, za dani r, mora biti $|x| < \frac{1}{r}$. Uzmemo li, dakle, bilo koji $x \in \left\langle -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right\rangle \setminus \{0\}$, dobivamo $f(x) = \frac{1}{|x|} > r$.



Definicija 3.1.2 *Neka je domena $X \subseteq \mathbb{R}$ funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ simetrična s obzirom na ishodište O $(0 \in \mathbb{R})$ realnoga brojevnog pravca. Reći ćemo da je funkcija f* ***parna*** *(****neparna****), ako je*

$$(\forall x \in X)\ f(-x) = f(x) \quad ((\forall x \in X)\ f(-x) = -f(x)).$$

Iz definicije slijedi da je graf parne funkcije osno simetričan s obzirom na Y-os, a graf neparne funkcije - centralno simetričan s obzirom na ishodište O (v. crteže).



Parna i neparna funkcija.

Primjer 3.1.7 Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (v. §1.4.4), je parna čim je n paran, a neparna čim je n neparan. Naime, $f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f(x)$, pa je tvrdnja očigledno istinita. (To opravdava nazive "parna" i "neparna" funkcija.)

Definicija 3.1.3 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,* ***uzlazna*** *ili* ***rastuća*** *(****silazna*** *ili (****o****)****padajuća****), ako čuva (obrće) uređaj $\leq$ na X nasljeđen od $\mathbb{R}$, tj. ako,*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Ako, posebice,

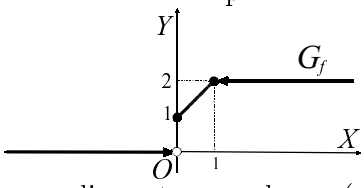
$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

onda kažemo da je funkcija f ***strgo uzlazna*** *(****strogo silazna****). Reći ćemo da je funkcija f* ***monotona*** *(****strogo monotona****), ako je uzlazna ili silazna (strogo uzlazna ili strogo silazna).*

Napokon, reći ćemo da je funkcija f ***po dijelovima monotona*** *na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq X$, ako postoji konačno mnogo točaka $x_0 = a < \cdots < x_i < \cdots < b = x_n$ takvih da je na svakomu podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \cdots, n$, funkcija (suženje) f monotona.* (Ovo se može poopćiti do prebrojivo mnogo podintervala!) *Sasvim slično se po dijelovima monotonost definira na neomeđenom intervalu, odnosno, na $\mathbb{R}$, dopuštajući pritom prebrojivo mnogo podintervala.*

Primjer 3.1.8 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$



Lako se pokaže da je funkcija f uzlazna, ali ne strogo uzlazna (v. graf G_f). S druge strane, apsolutna vrijednost $|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, nije monotona

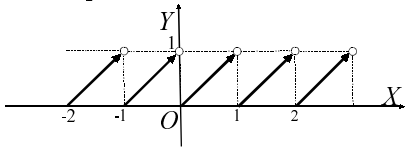
ali jest po dijelovima monotona funkcija. (Ona je na $\langle\cdot, 0]$ strogo silazna, a na $[0, \cdot\rangle$ strogo uzlazna.)

Definicija 3.1.4 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,* ***periodična****, ako*

$$(\exists P > 0)(\forall x \in X)\ x \pm P \in X \Rightarrow f(x \pm P) = f(x).$$

Svaki takav broj P nazivamo funkcijskim ***periodom*** *(od f), a najmanji period označujemo s P_0 i nazivamo* ***osnovnim periodom****.*

Primjer 3.1.9 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$, gdje je $[x]$ tzv. "najveće cijelo" od x, tj. $[x] = k$ čim je $k \leq x < k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Primjerice, $[-2,38] = -3 = [-3]$, $[0] = 0 = [\frac{1}{2}]$, $[2] = 2 = [2,38] = [\sqrt[3]{9}]$. (Primijetimo da je funkcijska slika "najvećega cijelog" $[\mathbb{R}] = \mathbb{Z}$.) Budući da je, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x - [x] < 1$, to je $f[\mathbb{R}] = [0, 1\rangle$ (v. crtež dolje). Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je očito $f(x + n) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Prema tomu, f je periodična funkcija kojoj je period P svaki prirodni broj n. Napokon, jednostavna provjera pokazuje da funkcija f nema perioda manjeg od 1, pa je njezin osnovni period $P_0 = 1$.



3.1.3 Osnovne elementarne funkcije

Ovdje ćemo definirati nekoliko vrsta jednostavnih realnih funkcija koje su temeljne za daljnju nadgradnju, a vrlo su važne u tehničkoj primjeni i praksi. Definicije nekih od njih ne će biti najkorektnije, što je posljedica relativno oskudne teorijske podloge što smo ju dosad pripremili. (Primjerice, trigonometrijske funkcije se mogu sasvim korektno definirati tek kad se dobro prouči konvergencija u normiranim vektorskim prostorima.)

(i) **Konstantna funkcija**. Za svaki $r \in \mathbb{R}$ postoji konstantna funkcija (v. Definiciju 1.3.3) $c_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c_r(x) = r$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(ii) **Opća potencija**. Promatrajmo analitički izraz $y = x^r$ u kojemu je $r \in \mathbb{R}$ (u potenciji x^r) unaprijed odabran i nepromjenjiv eksponent (v. §1.4.4).

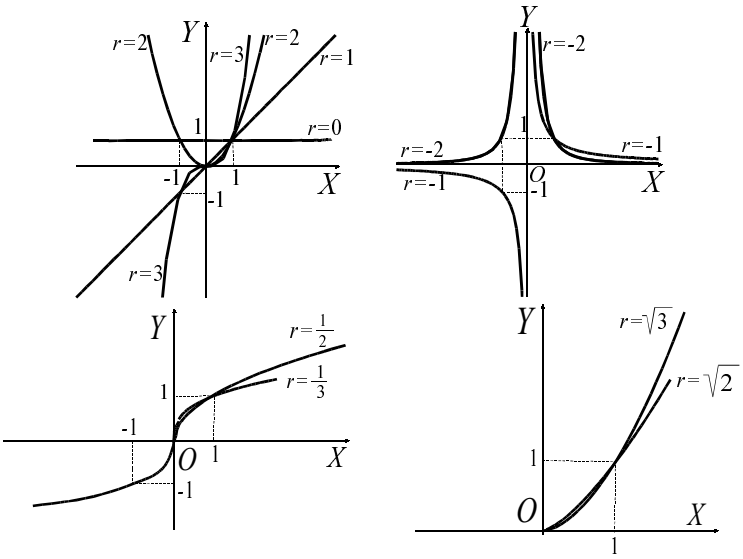
Prisjetimo se:

Ako je $r = n \in \mathbb{N}$ onda je potencija x^n dobro definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$; ako je $r = 0$ onda je $x^0 = 1$ za svaki $x \neq 0$ (0^0 je formalni zapis koji se ne može na dobar način jednoznačno odrediti.); ako je $r = k \in \mathbb{Z}\backslash(\mathbb{N}\bigcup\{0\}) \equiv -\mathbb{N}$ onda je $x^k = \frac{1}{x^{-k}}$ i ima smisla za svaki $x \neq 0$; ako je $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $M(m, n) = 1$, onda je $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ i mogu nastupiti ova četiri slučaja: $x^{\frac{m}{n}}$ je dobro definiran za svaki x čim je n neparan i m prirodan; $x^{\frac{m}{n}}$ je dobro definiran za svaki $x \neq 0$ čim je n neparan i m negativan; $x^{\frac{m}{n}}$ je dobro definiran za svaki $x \geq 0$ čim je n paran i m prirodan; $x^{\frac{m}{n}}$ je dobro definiran

za svaki $x > 0$ čim je n paran i m negativan; napokon, ako je $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ onda je x^r dobro definiran za svaki $x \geq 0$ čim je $r > 0$, odnosno, za svaki $x > 0$ čim je $r < 0$.

Zaključujemo da, za svaki $r \in \mathbb{R}$, postoji funkcija $f : X_r \to \mathbb{R}$, $X_r \subseteq \mathbb{R}$, zadana pravilom $f(x) = x^r$. Ne precizirajući dani eksponent r, tu funkciju f nazivamo **općom potencijom**. (Primijetimo da su konstanta c_1 i opća potencija f s eksponentom $r = 0$ različite funkcije, jer je $X_0 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.)

Na crtežima dolje su grafovi općih potencija $f : X_r \to \mathbb{R}$ za $r \in \{1, 2, 3, 0, -1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}\}$. Pritom je $X_1 = X_2 = X_3 = X_{\frac{1}{3}} = \mathbb{R}$, $X_0 = X_{-1} = X_{-2} = X_{-\frac{1}{3}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $X_{\frac{1}{2}} = X_{\sqrt{2}} = X_{\sqrt{3}} = [0, \cdot\rangle$.



Primijetimo da za svaku opću potenciju $f : X_r \to \mathbb{R}$ postoji podskup $A_r \subseteq X_r$ na kojemu je f injektivna. Tada je suženje $f|_{A_r} : A_r \to f[A_r]$ bijektivno pa postoji pripadna inverzna funkcija.

Teorem 3.1.1 *"Inverzna" funkcija opće potencije je opet opća potencija. Preciznije, ako je $f(x) = x^r$ onda je $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$, kad god ti izrazi maju smisla.*

Dokaz. $(f^{-1}f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^r) = (x^r)^{\frac{1}{r}} = x = 1_{A_r}(x)$, $x \in A_r \subseteq X_r$; $(ff^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(y^{\frac{1}{r}}) = (y^{\frac{1}{r}})^r = y = 1_{f[A_r]}(y)$, $y \in f[A_r] \subseteq \mathbb{R}$. ■

Napomena 3.1.1 Budući da promatramo funkcije iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, smijemo, a i uobičajilo se, označavati varijable x i y od f i f^{-1} (redom) istim slovom x. Dakle, umjesto $f^{-1}(y)$ ubuduće ćemo pisati $f^{-1}(x)$.

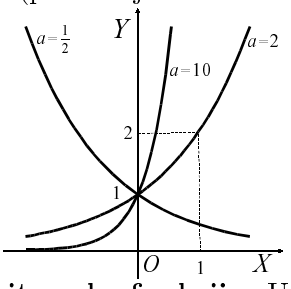
Primjer 3.1.10 (a) Za $r = 1$ je $f(x) = x^1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x) = f^{-1}(x)$, tj. $f = f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$.

(b) Za $r = 2$ je $f(x) = x^2$, a $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{x}$ čim je $x \geq 0$.

(c) Za $r = 3$ je $f(x) = x^3$, a $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} \equiv \sqrt[3]{x}$ za svaki $x \in R$.

Na koncu, primijetimo da je, za svaki $r \neq 0$, pripadna opća potencija neomeđena funcija, te da je parna za svaki $r = \frac{2k}{2n-1}$, a neparna za svaki $r = \frac{2k-1}{2n-1}$, gdje su $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. (U drugomu slučaju, kao i za svaki iracionalni eksponent, pripadna opća potencija je nenegativna, dakle, i omeđena odozdol.) Neka čitatelj za vježbu odredi koje su opće potencije strogo uzlazne, a koje strogo silazne funkcije.

(iii) **Eksponencijalna funkcija**. Sjetimo se da je potencija a^x, u kojoj je baza $a \in \mathbb{R}^+$ unaprijed odabrana i nepromjenjiva, dobro definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$. (v. §1.4.4). Pritom je $1^x = 1$ za svaki x. Odabravši, dakle, bilo koji $a > 0$ i $a \neq 1$, tako dobivamo **eksponencijalnu funkciju** (s bazom a) $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$. Primijetimo da je $\exp_a[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}^+$ i $\exp_a(0) = a^0 = 1$. Najvažnija svojstva ove funkcije su dana Teoremom 1.4.13 (Tamo navedena svojstva za $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vrijede i za sve $x \in \mathbb{R}$.) Posebice, eksponencijalna funkcija je strogo uzlazna čim je $a > 1$, a strogo silazna čim je $0 < a < 1$. To povlači da je (svaka) eksponencijalna funkcija injektivna, odnosno, da je njezino suženje $f : \mathbb{R} \to \exp_a[\mathbb{R}]$, $f(x) = \exp_a(x)$, bijekcija. Posobno su u primjeni važne eksponencijalne funkcije s bazama 10 - **dekadska** i e ($\approx 2,718281828\cdots$ - transcendentan broj, v. Primjer 3.2.7) - **prirodna**. Na sljedećemu crtežu su grafovi eksponencijalnih funkcija s bazama 2, 10, i $\frac{1}{2}$. Budući da je $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$, to su grafovi eksponencijalnih funkcija $\exp_{\frac{1}{a}}$ i $\exp_a$ simetrični s obzirom na Y-os. Uočimo i to da je eksponencijalna funkcija neomeđena (premda je omeđena odozdol).



(iv) **Logaritamska funkcija**. U (iii) smo zaključili da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \exp_a[\mathbb{R}]$, $f(x) = \exp_a(x)$, bijektivna. Postoji, dakle, njoj inverzna funkcija $f^{-1} : \exp_a[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$, koju nazivamo **logaritamskom funkcijom** (po bazi a) i označujemo s $f^{-1} \equiv \log_a$, odnosno, $f^{-1}(x) \equiv \log_a x$. Prema tomu, za svaku bazu a je $\log_a 1 = 0$ i vrijedi:

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\log_a \circ \exp_a)(x) = \log_a(a^x) = x;$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad (\exp_a \circ \log_a)(x) = a^{\log_a x} = x.$

Odatle dobivamo

(1) $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x$, odnosno (za $x = a$),

(2) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

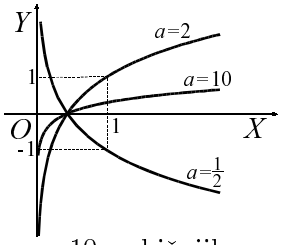
Navedimo još nekoliko svojstava logaritamske funkcije:

(3) $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

(4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)$ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$;

(3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R})$ $\log_a(x^y) = y \log_a x$.

Na sljedećem crtežu su grafovi logaritamskih funkcija po bazama 2, 10 i $\frac{1}{2}$.

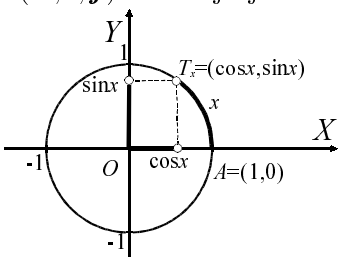


U slučaju $a = 10$ uobičajilo se zapis pripadne logaritamske funkcije $x \mapsto \log_{10} x$ (inverzne funkcije od $x \mapsto \exp_{10} x = 10^x$) skratiti na $\lg x$ (ponegdje $\log x$). To je tzv. **Briggsov** ili **dekadski logaritam**. Radi česte praktične uporabe ova se funkcija "zadaje" i tablično (v. npr. srednjoškolski priručnik "Logaritamske tablice"). Veliku važnost imaju i tzv. **prirodni logaritmi**, tj. vrijednosti $\log_e x$ logaritamske funkcije po bazi e (inverzne funkcije od $x \mapsto \exp_e x = e^x$). Njezin standardni (kraći) zapis jest $x \mapsto \ln x$ ("logaritam naturalis"). Po formuli (1) dobivamo

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}, \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \text{ i } \ln 10 = (\lg e)^{-1} (\approx 2,302585).$$

Očigledno je $\lg x > \ln x$ čim je $0 < x < 1$, a $\lg x < \ln x$ čim je $x > 1$. Napokon, primijetimo da se opća potencija $x \mapsto x^r$ može dobiti komponiranjem logaritamske i eksponencijalne funkcije i množidbe konstantom, tj. $x^r = a^{r \log_a x}$. Posebice, $x^r = 10^{r \lg x} = e^{r \ln x}$.

(v) **Trigonometrijske funkcije**. Promatrajmo u pravokutnoj koordinatnoj ravnini $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ središnju jediničnu kržnicu $\mathcal{K} \cdots x^2 + y^2 = 1$.



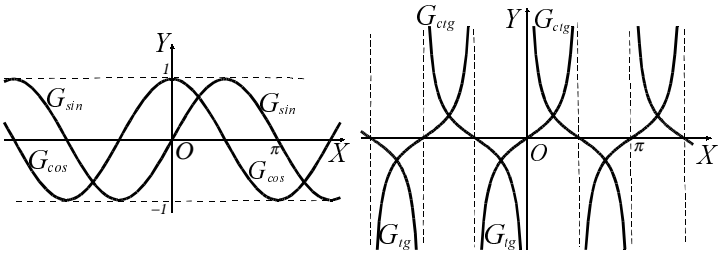
Označimo točku $(1, 0)$ na $\mathcal{K}$ slovom A. Za svaku točku T na $\mathcal{K}$ neka $\overset{\frown}{AT}$ označuje pripadni kružni luk (od A do T na $\mathcal{K}$ u geometrijski pozitivnom smjeru). Jasno je da se svakom realnom broju $x \in [0, 2\pi\rangle$ može pridijeliti točno jedna točka T_x na toj kružnici tako da lučna duljina $l(\overset{\frown}{AT_x})$ bude jednaka x. Dakle, T_x označuje kraj "namotanoga" od A na kružnicu $\mathcal{K}$ segmenta $[0, x]$. Ako je $x \in [2\pi, \cdot\rangle$, onda mu na isti način pridijelimo točku T_x na $\mathcal{K}$ "namatajući" segment segment $[0, x]$ ("više puta") na tu kružnicu. Napokon, ako je $x \in \langle \cdot, 0\rangle$ postupimo na isti način "namatajući" od točke

A na $\mathcal{K}$ segment $[0, -x]$ u geometrijski negativnom smjeru. Očito je da će biti $T_{x'} = T_x$ onda i samo onda kad je $x' = x + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Označujući koordinate točke T_x s $(\cos x, \sin x)$, dobivamo dvije periodične funkcije ($P_0 = 2\pi$):

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (**sinus**), $x \mapsto \sin x$;

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (**kosinus**), $x \mapsto \cos x$.

Grafovi su im na crtežu dolje. Primijetimo da je $\sin[\mathbb{R}] = [-1, 1] = \cos[\mathbb{R}]$.



Funkcije sin i cos su, dakle, omeđene i po dijelovima monotone. Primijetimo još da je sin neparna, a cos parna funkcija.

Pomoću sin i cos ćemo definirati još dvije trigonometrijske funkcije:

$\tan : X_{\tan} \to \mathbb{R}$ (**tangens**), $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

$\cot : X_{\cot} \to \mathbb{R}$ (**kotangens**), $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

gdje je $X_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{x \mid \cos x = 0\} = \mathbb{R} \backslash \{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, a $X_{\cot} = \mathbb{R} \backslash \{x \mid \sin x = 0\} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (Ponegdje se u knjigama funkcija tan zapisuje kao tg, a funkcija cot kao ctg.) Lako se provjeri da su funkcije tan i cot neomeđene i periodične s osnovnim periodom $P_0 = \pi$. Nadalje, obje te funkcije su neparne, a nije teško dokazati da je tan po dijelovima strogo uzlazna, a cot po dijelovima strogo silazna funkcija. Pripadni grafovi su na crtežu gore. Primijetimo da je $\cot x = (\tan x)^{-1}$, $x \in X_{\tan} \bigcap X_{\cot}$. (Pomoću $(\cos x)^{-1}$ i $(\sin x)^{-1}$ se mogu definirati još dvije trigonometrijske funkcije - sekans i kosekans - u što ovdje ne ćemo ulaziti.) Trigonometrijske funkcije su međusobno povezane mnogim algebarskim relacijama (čitatelju poznatima iz srednje škole), primjerice, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ i dr. (Pritom $\sin^2$, $\cos^2$, $\cdots$ *ne* označuju odgovarajuće funkcijske *kompozicije* $\sin \circ \sin$, $\cos \circ \cos$, $\cdots$ nego potencije, tj. $\sin^2 x \equiv (\sin x)^2$, $\cos^2 x \equiv (\cos x)^2, \cdots$.)

(vi) **Ciklometrijske funkcije**. Trigonometrijske funkcije nisu bijektivne pa, strogo sudeći, nemaju inverznih funkcija. Ipak, odgovarajućim suženjima njihovih domena i kodomena moguće je postići bijektivnost pripadnih restrikcija, koje onda dopuštaju invertiranje, pa u tomu smislu govorimo o inverznim funkcijama trigonometrijskih funkcija, tj. o tzv. ciklometrijskim ili arkus-funkcijama (ciclus = kružnica, arcus = luk).

Najprije promatrajmo suženje $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ koje je, po definiciji, injektivna funkcija sa slikom $\sin[[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]] = [-1, 1]$. Stoga je funkcija $S : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $S(x) = \sin x$, bijektivna, pa postoji inverzna joj funkcija $S^{-1} \equiv \mathrm{ArcS} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Napokon, proširenjem inkluzijom

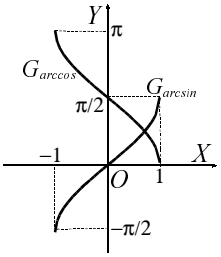
kodomene na cijeli $\mathbb{R}$, "inverznom" funkcijom polazne funkcije sin smatramo funkciju **arkus-sinus**,

$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad \arcsin x = \mathrm{ArcS}(x).$

Sasvim slično, polazeći od funkcije cos, dolazimo da bijekcije $C : [0,\pi] \to [-1,1]$, $C(x) = \cos x$. Njezina inverzna funkcija jest $C^{-1} \equiv \mathrm{ArcC} : [-1,1] \to [0,\pi]$. Sada "inverznom" funkcijom od cos smatramo funkciju **arkus-kosinus**,

$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad \arccos x = \mathrm{ArcC}(x).$

Pripadni grafovi su na sljedećemu crtežu.



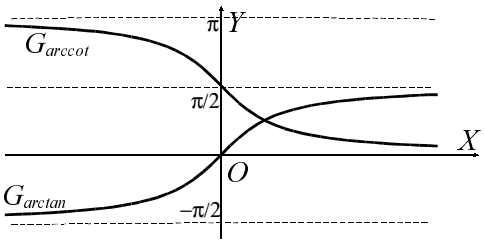
Primijetimo da je suženje tangensa na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \subseteq X_{\tan}$ bijekcija. Slijedi da funkcija $T \equiv \tan|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle} : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \mathbb{R}$, $T(x) = \tan x$, ima inverznu funkciju $T^{-1} \equiv \mathrm{ArcT} : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Proširujući inkluzijom kodomenu na $\mathbb{R}$, "inverznom" funkcijom od tan smatramo funkciju **arkus-tangens**,

$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \arctan x = \mathrm{ArcT}(x).$

Na sličan način, polazeći od funkcije cot, dolazimo do bijekcije $C_t \equiv \cot|_{\langle 0,\pi \rangle} : \langle 0,\pi \rangle \to \mathbb{R}$, $C_t(x) = \cot x$. Njezina je inverzna funkcija $C_t^{-1} \equiv \mathrm{ArcCt} : \mathbb{R} \to \langle 0,\pi \rangle$. Sada "inverznom" funkcijom polazne funkcije cot smatramo funkciju **arkus-kotangens**,

$\mathrm{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{arccot}\, x = \mathrm{ArcCt}(x).$

Pripadni grafovi su na ovomu crtežu.



Uočimo da su sve ciklometrijske funkcije omeđene. Osim toga, arcsin i arctan su strogo uzlazne, a arccos i arccot strogo silazne funkcije. Slično trigonometrijskima i ciklometrijske funkcije su međuovisne (vodeći računa o pripadnim domenama). Tako dobivamo

$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arccot}\, \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

i dr.

Definicija 3.1.5 ***Osnovnim elementarnim funkcijama*** *smatramo sve funkcije što smo ih definirali pod* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *i* (vi).

3.1.4 Razredba elementarnih funkcija

Definicija 3.1.6 ***Elementarnom funkcijom*** *smatramo svaku funkciju koja se može konstruirati od osnovnih elementarnih funkcija i njihovih suženja primijenjujući (konačno puta) zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i funkcijsko komponiranje.*
Pritom se osnovne računske operacije na realnim funkcijama $f, g : X \to \mathbb{R}$ definiraju na prirodni način:

(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
(2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;
(3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
(4) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *čim je* $g(x) \neq 0$.

Primjer 3.1.11 Funkcija $f : [0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^2-2} \cdot \sin \sqrt[4]{x} + 1$, jest elementarna, jer je $f = (f_1 \circ (f_2 - f_3)) \cdot (f_4 - f_5) + f_6$, gdje su $f_1 = \exp_3$, $f_2 =$ kvadriranje (opća potencija $x \mapsto x^2$), $f_3 = c_2$ (konstanta u 2), $f_4 = \sin$, $f_5 =$ četvrto korjenovanje (opća potencija $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$), $f_6 = c_1$ (konstanta u 1).

Skup svih elementarnih funkcija se obično dijeli na ove podskupove:
(i) **Polinomi**. Polinom (n-toga stupnja, $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$) smo definirali u §1.4.4 kao funkciju $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, pri čemu su $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$ čim je $n \in \mathbb{N}$. (Primijetimo da je $p = c_{a_0}$ konstantna funkcija u a_0 čim je $n = 0$.)
(ii) **Racionalne funkcije**. Reći ćemo da je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, **racionalna funkcija** ako je

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

pri čemu su p i q polinomi. Pritom je, dakako, $X = \mathbb{R} \backslash \{x \mid q(x) = 0\}$, što je komplement nekoga konačnog podskupa od $\mathbb{R}$. Često se točke u kojima racionalna funkcija f nije definirana, tj. nultočke od q, nazivaju **polovima** od f. Ako oba polinoma p i q imaju racionalne koeficijente, onda kažemo da je $f = \frac{p}{q}$ racinalna funkcija **s racionalnim koeficijentima**. Ako je polinom p stupnja n, polinom q stupnja m i $n \geq m$, onda polinomskim dijeljenjem $p : q$ dobivamo da je pripadna racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ zbroj nekoga polinoma s (stupnja $n - m$) i **prave** racionalne funkcije $\frac{r}{q}$ u smislu da je stupanj k polinoma r manji od m, $k < m$. Očigledna je činjenica da svaki polinom jest racionalna funkcija.
(iii) **Algebarske funkcije**. Elementarne funkcije koje se mogu dobiti komponiranjem općih potencija s racionalnim eksponentima i racionalnih funkcija s racionalnim koeficijentima nazivamo **algebarskim funkcijama**.

Primjerice, $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{\left(\frac{x^2+1}{2x^3-5x}\right)^5}$, jest algebarska funkcije, dok $g_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = (x^4+7)^{\sqrt{2}}$, $g_2(x) = \sqrt{3}x + 2$, to nisu.

Očito je da su racionalne funkcije s racionalnim koeficijentima ujedno algebarske funkcije. Algebarske funkcije koje nisu racionalne nazivamo **iracionalnim funkcijama**.

(iv) **Transcendentne funkcije**. Elementarne funkcije koje nisu algebarske nazivamo **transcendentnima**. Prema tomu, među ove se ubrajaju sve eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i ciklometrijske, kao i većina racionalnih funkcija (sve one kojima je neki koeficijent iracionalan).

Važne transcendentne funkcije jesu i tzv. **hiperbolne funkcije**, koje se dobiju pomoću prirodne eksponencijalne funkcije kako slijedi:

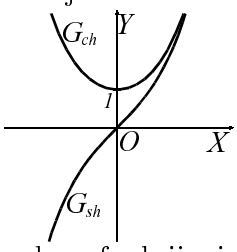
$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, (**sinus hiperbolni**);

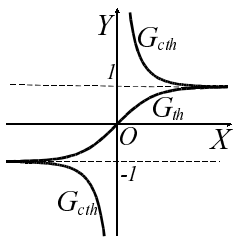
$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, (**kosinus hiperbolni**);

$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, (**tangens hiperbolni**);

$\coth : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, (**kotangens hiperbolni**).

(Ponegdje su njihove oznake sh, ch, th i cth redom.) Nazivi ukazuju na neku svezu s trigonometrijskim funkcijama. Ona se očituje u relacijama što međusobno povezuju hiperbolne funkcije (koje su vrlo slične - "dualne" onima što međusobno povezuju trigonometrijske funkcije). Primjerice, $\coth x = (\tanh x)^{-1}$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$, $\tanh \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$ i dr. (I ovdje $\cosh^2$, $\sinh^2$, $\cdots$ označuju potenciranje, a *ne* funkcijsko komponiranje!) Grafovi hiperbolnih funkcija su na crtežima dolje.





Primijetimo da su funkcije sinh, cosh i coth neomeđene, dok je tanh omeđena funkcija. (cosh jest omeđena odozdol, jer je veća ili jednaka od c_1.) Nadalje, cosh je parna, a sinh, tanh i coth su neparne funkcije.

Pogledajmo sada što se može reći o invertiranju hiperbolnih funkcija, koje daje tzv. **area-funkcije**. Lako se provjeri da je funkcija $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekcija pa postoji inverzna joj funkcija

$(\sinh)^{-1} \equiv \operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (**area-sinus hiperbolni**).

Funkcija cosh nije injektivna, ali jest injektivno njezino suženje $\cosh|_{[0,\cdot\rangle} : [0,\cdot\rangle \to \mathbb{R}$ i pritom je $\cosh[[0,\cdot\rangle] = \cosh \mathbb{R} = [1,\cdot\rangle$. Tada je funkcija $C_h : [0,\cdot\rangle \to [1,\cdot\rangle$, $C_h(x) = \cosh x$, bijekcija s inverznom funkcijom $C_h^{-1} : [1,\cdot\rangle \to [0,\cdot\rangle$. Sada "inverznom" funkcijom od cosh smatramo proširenje inkluzijom od C_h^{-1} na kodomenu $\mathbb{R}$, tj.

$\operatorname{arch} : [1,\cdot\rangle \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{arch}(x) = C_h^{-1}(x)$ (**area-kosinus hiperbolni**).

Funkcije tanh i coth su injektivne sa slikama $\tanh[\mathbb{R}] = \langle -1, 1\rangle$ i $\coth[\mathbb{R}\backslash\{0\}] = \mathbb{R}\backslash[-1,1] = \langle\cdot,-1\rangle \bigcup \langle 1,\cdot\rangle$. Prema tomu, funkcije $T_h : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$, $T_h(x) =$

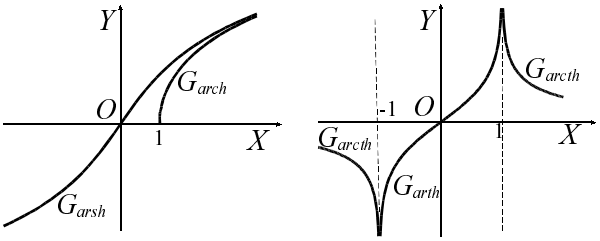
$\tanh x$, i $C_{th} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \langle\cdot,-1\rangle \bigcup \langle 1,\cdot\rangle$, $C_{th}(x) = \coth x$, jesu bijekcije. Inveznu funkciju T_h^{-1} smatramo "inverznom" funkcijom od tanh i pišemo:

$\operatorname{arth} : \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arth}(x) = T_h^{-1}(x)$, (**area-tangens hiperbolni**).

Inverznu funkciju $C_{th}^{-1} : \langle\cdot,-1\rangle \bigcup \langle 1,\cdot\rangle \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ proširujemo inkluzijom kodomene do "inverzne" funkcije od coth stavljajući

$\operatorname{arcth} : \langle\cdot,-1\rangle \bigcup \langle 1,\cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcth}(x) = C_{th}^{-1}(x)$, (**area-kotangens hiperbolni**).

Pripadni grafovi su na crtežima:



Primijetimo da area-funkcije nisu omeđene (premda je arch nenegativna, pa je omeđena odozdol). Nadalje, arsh, arth i arcth su neparne funkcije.

I area-funkcije su međusobno povezane odgovarajućim relacijama:

$\operatorname{arsh}(x) = \pm \operatorname{arch}\sqrt{x^2+1} = \operatorname{arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

($+$ za $x > 0$, a $-$ za $x < 0$) i dr. Budući da su hiperbolne funkcije definirane pomoću prirodne eksponencijalne funkcije, treba očekivati da area-funkcije dopuštaju analitičke zapise pomoću prirodne logaritamske funkcije. Zaista, lako je izvesti sljedeće sveze:

$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{arch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $x \in [1,\cdot\rangle$;

$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in \langle -1,1\rangle$; $\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

3.1.5 Vježbe

1. Odrediti funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, implicitno zadanu jednadžbom $\lg(x-1) + \lg(y+1) - 1 = 0$.

2. Odrediti funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = y$, parametarski zadanu jednadžbama $x = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y = t + e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Odrediti definicijsko područje $X \subseteq \mathbb{R}$ funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ zadane izrazom:

(a) $f(x) = \frac{x^2-4+\lg(-x)}{1+\sqrt{x^2-4}}$; (b) $f(x) = \ln\arcsin\frac{x+1}{5-x}$.

4. Provjeriti bijektivnost i odrediti inverznu funkciju od

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$.

5. Odrediti definicijsko područje $X \subseteq \mathbb{R}$ i dokazati da je realna funkcija

(a) $x \longmapsto \sqrt[5]{(x-1)^2} + \sqrt[5]{(x+1)^2}$ parna; (b) $x \longmapsto \log_a \frac{1+x}{1-x}$ neparna.

Nadalje, dokazati da je funkcija $x \mapsto g_1(x) = f(x) + f(-x)$ parna, a funkcija $x \mapsto g_2(x) = f(x) - f(-x)$ neparna, za svaku funkciju f definiranu na simetričnom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$. Na temelju toga dokazati da je svaka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ simetričan, zbroj neke parne i neke neparne funkcije.

6. (a) Dokazati da je funkcija $x \longmapsto \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ periodična i odrediti joj osnovni period.

(b) Ako za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) = \frac{1+f(x-a)}{1-f(x-a)}$, $x \in X$ (a je bilo koja konstanta), dokazati da je f periodična funkcija.

7. Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uzlazna funkcija.

(a) Dokazati da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^{2n})$, $n \in \mathbb{N}$, silazna na $\mathbb{R}^-$ i uzlazna na $\mathbb{R}^+$;

(b) Može li se što zaključiti o monotonosti funkcije $x \longmapsto h(x) = f(x^{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}$?

8. Točnom raščlambom na osnovne elementarne funkcije, dokazati da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \arctan 5^{(3x+1)^2}$, elementarna.

3.2 KONVERGENCIJA REALNIH NIZOVA I REDOVA

Konvergencija je jedan od temeljnih pojmova u matematičkoj analizi. Primjerice, neke od osnovnih elementarnih funkcija (trigonometrijske) moguće je sasvim korektno definirati tek kad se strogo zasnuje konvergencija realnih redova. Osim toga, na dobro zasnovanoj konvergenciji je mnogo lakše definirati i eksponencijalnu funkciju i, posebice, istražiti njezina važna svojstva. Logički bi, dakle, ovaj odjeljak trebao biti prvi u ovomu poglavlju. Nu, to bi onda zahtijevalo drugačiji temeljni teorijski pristup, koji bi bio preopćenit za našu konačnu svrhu.

3.2.1 Niz realnih brojeva

Definicija 3.2.1 *Svaku funkciju definiranu na skupu prirodnih brojeva, $a : \mathbb{N} \to Y$, nazivamo* ***nizom*** *(u skupu Y). Vrijednost $a(n) \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, označujemo s a_n i nazivamo n-**tim članom** toga niza. Uobičajilo se i sam niz označiti s (a_n) ili, ponekad, s $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. U slučaju $Y = \mathbb{R}$ govorimo o **nizu realnih brojeva** (ili o **realnom nizu**) (a_n).*

Važno je imati na umu bitnu razliku između niza (a_n) u skupu Y, tj. funkcije $a : \mathbb{N} \to Y$, od skupa svih njegovih vrijednosti $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tj. slike $a[\mathbb{N}] \subseteq Y$!

Primjer 3.2.1 Ispišimo "nekoliko prvih" članova realnoga niza (a_n), pri čemu je:

(a) $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$; (b) $a_n = \begin{cases} \frac{1-n}{n}, & n \text{neparan} \\ \frac{1}{n}, & n \text{paran} \end{cases}$; (c) $a_n = \begin{cases} 2n, & n \leq 3 \\ \sqrt{11}, & n \geq 4 \end{cases}$.

(a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{4}{5}$, $a_3 = \frac{9}{7}$ itd. ili $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, \cdots$;

(b) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$ itd. ili $0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$;

(c) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = \sqrt{11} = a_5 = \cdots$ itd. ili $2, 4, 6, \sqrt{11}, \sqrt{11}, \cdots$.

Pod (c) je dan primjer tzv. **stacionarnog** niza, tj. niza (a_n) za koji vrijedi:

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n = r.$$

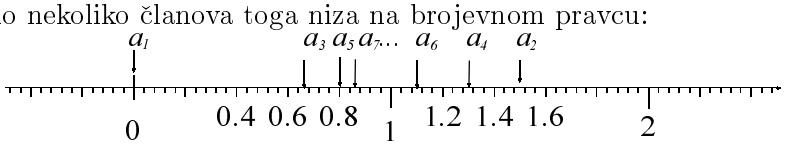
Definicija 3.2.2 *Reći ćemo da je niz realnih brojeva (a_n)* ***uzlazan*** *ili* ***rastući*** *(****silazan*** *ili (****o****)****padajući****,* ***monoton****,* ***strogo uzlazan****,* ***strogo silazan****,* ***strogo monoton****) čim je takva pripadna funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Sljedeći teorem je izravna posljedica prethodne definicije.

Teorem 3.2.1 *Da bi realni niz (a_n) bio uzlazan (silazan, strogo uzlazan, strogo silazan) nužno je i dovoljno da je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$, $a_n < a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$).*

Primjer 3.2.2 Niz (a_n), $a_n = -\frac{n}{10}$, je strogo silazan, jer je $a_n = -\frac{n}{10} > -\frac{n+1}{10} = a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.2.3 Niz (a_n), $a_n = \frac{(-1)^n+n}{n}$, nije monoton, jer je, primjerice, $a_1 = 0 < \frac{3}{2} = a_2 > \frac{2}{3} = a_3$. Zadržavajući se još malo na ovomu primjeru, prikažimo nekoliko članova toga niza na brojevnom pravcu:



Primijećujemo da se oni "**sve više približavaju**" broju 1 kako se n povećava. Odaberemo li, naime, bilo koju (kako god malu) ϵ-okolinu od 1 u $\mathbb{R}$, tj. simetrični interval $\langle 1-\epsilon, 1+\epsilon\rangle$, $\epsilon > 0$, u njoj će se naći skoro svi (tj. svi osim konačno mnogo njih) članovi promatranoga niza (a_n). Ako je npr. $\epsilon = 0,2$, radi se o okolini $\langle 0,8; 1,2\rangle$ izvan koje su $a_1, \cdots, a_5$, a u njoj su svi članovi a_n za koje je $n \geq 6$. Zaista, u tomu slučaju mora biti $\left|1 - \frac{(-1)^n+n}{n}\right| < 0,2$, tj. $\frac{1}{n} < 0,2$, dakle $n > 5$. Smanjujući broj $\epsilon > 0$, tj. okolinu, povećava se broj onih čanova a_n što su izvan te okoline, ali, ma kako malen bio taj ϵ, izvan nje ih je uvijek samo konačno mnogo. Ovaj primjer motivira sljedeću definiciju:

Definicija 3.2.3 *Reći ćemo da je točka $a_0 \in \mathbb{R}$* ***granična vrijednost*** *(ili* ***limes****) realnog niza (a_n), ako je ispunjen ovaj uvjet:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_0| < \epsilon.$$

Ovo ćemo skraćeno zapisivati kao $(a_n) \to a_0$.

Primjer 3.2.4 (a) Svaki stacionarni niz (a_n), $a_n = a_0$ čim je $n \geq n_0$, ima graničnu vrijednost a_0.

(b) Pokažimo da niz $(\frac{c}{n})$, za ma koji $c \in \mathbb{R}$, ima za graničnu vrijednost $0 \in \mathbb{R}$, tj. $(\frac{c}{n}) \to 0$! Uzmimo bilo koji $\epsilon > 0$. Treba odrediti broj $n_0 \in \mathbb{N}$ (ovisan o ϵ) koji će udovoljiti uvjetu iz Definicije 3.2.3. Promatrajmo nejednakost $|a_n - a_0| < \epsilon$, koja bi u ovomu primjeru trebala biti $|\frac{c}{n} - 0| < \epsilon$, tj.

$\frac{|c|}{n} < \epsilon$. To povlači da treba biti $n > \frac{|c|}{\epsilon}$, što je, po Arhimedovu aksiomu (v. Teorem 1.4.8), moguće. Odaberemo li, dakle, $n_0 = [\frac{|c|}{\epsilon}] + 1$ (v. Primjer 3.1.9)), definicijskom uvjetu će biti udovoljeno.

Teorem 3.2.2 *Svaki realni niz (a_n) dopušta najviše jednu graničnu vrijednost.*

Dokaz. Pretpostavimo protivno, tj. da vrijedi $(a_n) \to a_0'$, $(a_n) \to a_0''$ i $a_0' \neq a_0''$. Tada je broj $\epsilon = \frac{|a_0''-a_0'|}{2} > 0$, pa su $U' = \langle a_0' - \epsilon, a_0' + \epsilon\rangle$ i $U'' = \langle a_0'' - \epsilon, a_0'' + \epsilon\rangle$ disjunktne ϵ-okoline od a_0' i a_0'' redom. Po definiciji bi svaka od okolina U' i U'' trebala sadržavati skoro sve članove promatranoga niza (a_n), što je protuslovlje. ■

Definicija 3.2.4 *Za niz koji ima graničnu vrijednost kažemo da* ***konvergira*** *(ili* ***teži****) prema toj vrijednosti, odnosno, da je* ***konvergentan****. U protivnom, kažemo da niz* ***divergira*** *ili da je* ***divergentan****.*

Čim niz (a_n) konvergira prema broju a_0, tj. $(a_n) \to a_0$, Teorem 3.2.2 (limesova jedinstvenost) dopušta to zapisati kao (operativnu) jednakost $\lim(a_n) = a_0$. Uvedimo nazive i zapise i za dva posebna slučaja divergentnih nizova. Prvo, ako za realni niz (a_n) vrijedi

$$(\forall r \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n > r,$$

reći ćemo da (a_n) **divergira prema plus beskonačnom** i pisati $(a_n) \to +\infty$ ili $\lim(a_n) = +\infty$. Drugo, ako za realni niz (a_n) vrijedi

$$(\forall r \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n < r,$$

reći ćemo da (a_n) **divergira prema minus beskonačnom** i pisati $(a_n) \to -\infty$ ili $\lim(a_n) = -\infty$. Primjerice, nizovi (n), $(3n-5)$ i (n^2-1) divergiraju prema $+\infty$, dok nizovi $(-n)$, $(-3n+5)$, i $(-n^2+1)$ divergiraju prema $-\infty$. (Pozor! $+\infty$ i $-\infty$ su samo oznake. To *nisu* realni brojevi. Moguće je, međutim, proširiti $\mathbb{R}$ do skupa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ stavljajući $-\infty < x < +\infty$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, i proširujući odgovarajuću algebarsku strukturu sa $\mathbb{R}$ na $\overline{\mathbb{R}}$ ovako: $x + (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) + x$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$; $x\cdot(\pm\infty) = \mp\infty = (\pm\infty)\cdot x$ za $x < 0$, $x\cdot(\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty)\cdot x$ za $x > 0$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty = (+\infty)\cdot(+\infty)$, $(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty = (+\infty)\cdot(-\infty)$; zbrojevi $(-\infty)+(+\infty)$ i $(+\infty)+(-\infty)$, kao i umnošci $0\cdot(\pm\infty)$ i $(\pm\infty)\cdot 0$ se ne mogu jednoznačno definirati. Za upravo promatrane nizove bi se sada moglo reći da konvergiraju proširenomu skupu realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$.)

Definicija 3.2.5 *Neka je (a_n) realni niz. Reći ćemo da je točka $r \in \mathbb{R}$* ***gomilište*** *od (a_n), ako svaka okolina od r sadrži beskonačno mnogo članova toga niza. Simbolički se taj uvjet zapisuje ovako:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n' \in \mathbb{N}) \quad n' \geq n \wedge |a_{n'} - r| < \epsilon.$$

Primijetimo da je, za svaki konvergentni niz, njegova granična vrijednost ujedno njegovo jedino gomilište, dok obratno ne vrijedi.

Primjer 3.2.5 Promatrajmo niz (a_n), $a_n = n(1-(-1)^n)$. Uočimo da je $a_n = 2n$ čim je n neparan, a $a_n = 0$ čim je n paran, tj. $(a_n) = 2, 0, 6, 0, 10, 0, \cdots$. Očigledno je da niz (a_n) divergira premda ima točno jedno gomilište $r = 0$.

Definicija 3.2.6 ***Podnizom*** *realnog niza (a_n), tj. funkcije $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, smatramo svaku kompoziciju $a \circ n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pri čemu je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo uzlazna funkcija (niz u $\mathbb{N}$). Primijetimo da je podniz realnog niza opet realni niz. Općenito, k-ti član promatranoga podniza je realni broj $(a \circ n)(k) = a(n(k)) \equiv a_{n(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Uobičajilo se $a_{n(k)}$ zapisivati kao a_{n_k}, a sam podniz kao (a_{n_k}).

U Primjeru 3.2.5 je npr. jedan podniz $(a_{n_k}) = 2, 6, 10, 14, \cdots$, koji divergira prema $+\infty$ (strogo uzlazna funkcija je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n(k) \equiv n_k = 2k-1$). Uočimo da taj niz ima i konstantni, dakle konvergentni, podniz $(a_{m_k}) = 0, 0, 0, \cdots$ (strogo uzlazna funkcija je $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $m(k) = 2k$).

Primjer 3.2.6 Promatrajmo realni niz (a_n), $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$. Tada je $a_n = -\frac{n}{n+1}$ čim je $n = 2k-1$ (neparan), a $a_n = \frac{n}{n+1}$ čim je $n = 2k$ (paran). Prema tomu, ovaj niz ima barem dva (po članovima komplementarna) konvergentna podniza: $(a_{2k-1}) = (-\frac{2k-1}{2k}) \to -1$ i $(a_{2k}) = (\frac{2k}{2k+1}) \to 1$. Primijetimo da su točke -1 i 1 gomilišta od (a_n) koji divergira.

3.2.2 Svojstva konvergentnih (pod)nizova

Teorem 3.2.3 *Ako realni niz (a_n) konvergira onda je omeđen.*

Dokaz. Neka je $\lim(a_n) = a_0$. Tada postoji postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\{a_n \mid n \geq n_0\} \subseteq \langle a_0 - 1, a_0 + 1\rangle$. Neka je $b = \max\{|a_n - a_0| \mid n \in \{1, \cdots, n_0 - 1\}\}$ i $c = \max\{1, b\}$. Tada je $a[\mathbb{N}] = \{a_1, \cdots, a_{n_0-1}\} \bigcup \{a_n \mid n \geq n_0\} \subseteq [a_0 - c, a_0 + c]$, pa je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tj. jest (a_n) omeđen. ■

Teorem 3.2.4 *Realni niz (a_n) ima gomilište r onda i samo onda, ako postoji podniz (a_{n_k}) koji konvergira prema r.*

Dokaz. Neka je r gomilište od (a_n). Traženi podniz ćemo konstruirati indukcijom. Za $k = 1$ neka je član $a_{n_1} \in \langle r-1, r+1\rangle$. (U Definiciji 3.2.5 uzmimo $\epsilon = 1$ i $n = 1$, pa takav $n_1 \equiv n' \geq 1$ postoji.) Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi $n_1 < \cdots < n_k$ za koje je $a_{n_i} \in \left\langle r - \frac{1}{i}, r + \frac{1}{i}\right\rangle$ za svaki $i \in [1, k]_{\mathbb{N}}$. Po Definiciji 3.2.5, za $\epsilon = \frac{1}{k+1}$ i $n = n_k + 1$, postoji $n' \equiv n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ takav da je $a_{n_{k+1}} \in \left\langle r - \frac{1}{k+1}, r + \frac{1}{k+1}\right\rangle$. Time smo konstruirali podniz (a_{n_k}) za koji je očito $\lim(a_{n_k}) = r$. Obratno, neka

je (a_n) realni niz s konvergentnim podnizom $(a_{n_k}) \to r$. Uzmimo bilo koje $\epsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Budući da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n_k} \in \langle r-\epsilon, r+\epsilon\rangle$ čim je $k \geq k_0$, to birajući $n' = n_k \geq n$ (vrijednosti n_k strogo rastu čim indeksi k rastu) dobivamo $a_{n'} \in \langle r-\epsilon, r+\epsilon\rangle$. Dakle, niz (a_n) ima za gomilište točku r. ■

Korolar 3.2.1 *Neka su (a_n) niz u $\mathbb{R}$ i $a_0 \in \mathbb{R}$. Tada je $\lim(a_n) = a_0$ točno onda kad je, za svaki podniz (a_{n_k}), $\lim(a_{n_k}) = a_0$. Posebice, ako dva komplementarna podniza (a_{n_k}) i $(a_n, n \neq n_k)$ od (a_n) konvergiraju prema istoj graničnoj vrijednosti a_0, onda i niz (a_n) konvergira prema a_0.*

Dokaz. Dovoljnost je očigledna (uzmimo $n_k = k$), a nužnost vrijedi po Teoremu 3.2.2 i Teoremu 3.2.4. Dodatna tvrdnja je očita posljedica Definicija 3.2.3 i 3.2.4 i Teorema 3.2.2. ■

Teorem 3.2.5 *Svaki realni niz (a_n) ima monotoni podniz.*

Dokaz. Neka je $N = \{n \mid n \leq n' \Rightarrow a_n \leq a_{n'}\} \subseteq \mathbb{N}$. Skup N je ili beskonačan ili konačan. Ako je N beskonačan, moguće je odabrati strogo uzlazni niz (n_k) u N, tj. $n_k < n_{k+1}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada je, po definiciji od N, $a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa je pripadni podniz (a_{n_k}) uzlazan. Ako je skup N konačan, onda postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, $\{n_1\} > N$. Odaberimo neki $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_2 > n_1$ i $a_{n_2} < a_{n_1}$. (Takav n_2 postoji; u protivnom bi slijedilo $n_1 \in N$ -što nije!) Jasno je da $n_2 \notin N$. Nastavljajući induktivno, dobivamo $n_k < n_{k+1} \notin N$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tj. strogo uzlazni niz (n_k) u $\mathbb{N}\backslash N$. Njemu tada odgovara $a_{n_k} > a_{n_{k+1}}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tj. strogo silazni podniz (a_{n_k}). ■

Teorem 3.2.6 *Ako je realni niz monoton i omeđen onda konvergira. Potpunije, ako je (a_n) silazan i omeđen odozdol onda je $\lim(a_n) = \inf a[\mathbb{N}]$, a ako je (b_n) uzlazan i omeđen odozgor onda je $\lim(b_n) = \sup b[\mathbb{N}]$.*

Dokaz. Promatrajmo prvi slučaj, tj. niz $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq c$ u $\mathbb{R}$. Tada postoji $a_0 \equiv \inf a[\mathbb{N}] \in \mathbb{R}$ (v. Teorem 1.4.7), pa je $a_0 \leq a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_0 + \epsilon > a_{n_0}$, tj. $a_0 > a_{n_0} - \epsilon$. Budući da je niz (a_n) silazan, to je $a_0 \leq a_n \leq a_{n_0} < a_{n_0} + \epsilon$ čim je $n \geq n_0$. Prema tomu, $n \geq n_0$ povlači $a_n - \epsilon < a_0 < a_n + \epsilon$, tj. $|a_n - a_0| < \epsilon$, pa je $\lim(a_n) = a_0 \equiv \inf a[\mathbb{N}]$. Posve slično se dokazuje drugi slučaj. ■

Korolar 3.2.2 (Bolzano-Weierstrassov teorem) *Svaki omeđeni niz realnih brojeva (a_n) ima konvergentni podniz (odnosno, ima gomilište).*

Dokaz. Neka je niz (a_n) u $\mathbb{R}$ omeđen. Po Teoremu 3.2.5, (a_n) ima neki monotoni podniz (a_{n_k}). Budući da se omeđenost čuva, to je podniz (a_{n_k}) omeđen i monoton, pa po Teoremu 3.2.6 i konvergira. ■

Primjer 3.2.7 (*Broj e.*) Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$ zadan pravilom

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

Dokazat ćemo da je ovaj niz strogo uzlazan i omeđen odozgor pa, po Teoremu 3.2.6, konvergira. Vidjet ćemo da je njegova granična vrijednost

$\lim((1+\frac{1}{n})^n) \equiv e, \quad 2,71828 < e < 2,71829.$

(Može se pokazati da je broj e iracionalan; štoviše, e je *transcendentan broj,* no dokazati tu tvrdnju vrlo je netrivijalno.) Broj e ima nezaobilaznu ulogu u matematičkoj analizi (v. npr. §3.1.3, (iii) i (iv)). Pokažimo najprije da je niz $((1+\frac{1}{n})^n)$ omeđen odozgor. Po binomnoj formuli (v. Teorem 1.4.14) je, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (\tfrac{1}{n})^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n}) \cdots (1-\tfrac{k-1}{n}) \leq$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2(1-\tfrac{1}{2^n}) < 3,$$

pri čemu smo iskoristili nejednakost $2^{k-1} \leq k!$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Da je ovaj niz strogo uzlazan proizlazi iz sljedećega:

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \cdot \tfrac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n+1}{k} \cdot \tfrac{1}{(n+1)^k} < \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{k} \cdot \tfrac{1}{(n+1)^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{k} \cdot \tfrac{1}{(n+1)^{n+1-k}} = (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1},$$

gdje smo iskoristili nejednakost $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \cdot \frac{1}{(n+1)^k}$ za svaki par $k \leq n$ iz $\mathbb{N}$. Primijetimo da je $a_4 = (\frac{5}{4})^4 = \frac{625}{256} \gtrapprox 2,4414$, pa je $2,4414 < e < 3$. Određenjem dovoljno male gornje međe $b < 3$ i dovoljno "dalekog" člana a_n, dobiva se po volji dobra racionalna približna vrijednost za broj e.

Po Korolaru 3.2.2 ima smisla govoriti o najmanjemu, odnosno, najvećemu gomilištu realnog niza (a_n). Najmanje gomilište nazivamo **limesom inferiorom** i označujemo s $\liminf(a_n)$, a najveće - **limesom superiorom**, $\limsup(a_n)$. Očito je $\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n)$, a lako se dokaže da omeđeni niz (a_n) konvergira onda i samo onda kad je $\liminf(a_n) = \lim(a_n) = \limsup(a_n)$. Ako niz (a_n) nije omeđen odozdol (odozgor), po dogovoru stavljamo $\liminf(a_n) = -\infty$ ($\limsup(a_n) = +\infty$). Nadalje, ako (a_n) nije omeđen odozdol i nema gomilište, a omeđen je odozgor, stavljamo $\liminf(a_n) = \limsup(a_n) = -\infty$. Slično, ako (a_n) nije omeđen odozgor i nema gomilište, a omeđen je odozdol, stavljamo $\liminf(a_n) = \limsup(a_n) = +\infty$.

Primjer 3.2.8 (a) Za niz (a_n),

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n}{n+1}, & n = 3k-2 \\ \frac{1}{n}, & n = 3k-1 \\ \frac{n+1}{n}, & n = 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N},$$

je $\liminf(a_n) = -1$, a $\limsup(a_n) = 1$.

(b) Za niz (a_n),

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \textit{ neparan} \\ -n, & n \textit{ paran} \end{cases},$$

je $\liminf(a_n) = -\infty$, a $\limsup(a_n) = 0$.

(c) Za niz (a_n), $a_n = 2n$, je $\liminf(a_n) = \limsup(a_n) = +\infty$ ($= \lim(a_n)$ u $\overline{\mathbb{R}}$), tj. niz $(2n)$ divergira prema $+\infty$).

Teorem 3.2.7 *Neka realni nizovi (a_n), (b_n) i (c_n) udovoljavaju ovim dvama uvjetima:*

(i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n$;

(ii) $\lim(a_n) = a_0 = \lim(b_n)$.

Tada je i $\lim(c_n) = a_0$.

Dokaz. Po (ii), za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$ takvi da je $|a_n - a_0| < \epsilon$ čim je $n \geq n_0'$, odnosno, $|b_n - a_0| < \epsilon$ čim je $n \geq n_0''$. Uključujući i uvjet (i), dobivamo da je, za svaki $n \geq \max\{n_0, n_0', n_0''\}$, $a_0 - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a_0 + \epsilon$, dakle, $|c_n - a_0| < \epsilon$. To upravo znači da je $\lim(c_n) = a_0$. ■

Primjer 3.2.9 Istražimo konvergira li ili ne niz $(\frac{\sin n}{n})$.

Budući da je, za svaki $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$, to je i $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin}{n} \leq \frac{1}{n}$. Označimo $a_n = \frac{-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ i $c_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \in N$. Po Primjeru 3.2.4(b) je $\lim(a_n) = 0 = \lim(b_n)$. Sada po Teoremu 3.2.7 zaključujemo da je i $\lim(\frac{\sin n}{n}) \equiv \lim(c_n) = 0$.

Naredni teorem jamči dobro ponašanje graničnih vrijednosti prema osnovnim računskim operacijama.

Teorem 3.2.8 *Ako su (a_n) i (b_n) konvergentni realni nizovi, onda je*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$;

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$;

(iii) $\lim(\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$, *čim su svi* $b_n \neq 0$ *i* $\lim(b_n) \neq 0$.

(U zagradama na lijevoj strani se radi o operacijama funkcijama $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; v. §1.1.4)

Dokaz. Dokazati gornje tvrdnje nije trivijalno. One, zapravo, slijede iz neprekidnosti osnovnih računskih operacija - o čemu će biti riječi u višim analizama (v. i Lemu 1.4.2). Ipak, primjerice, pokažimo dobro ponašanje realnih limesa na zbrajanje! Neka je, dakle, $\lim(a_n) = a_0$ i $\lim(b_n) = b_0$. Trebamo dakazati:

$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a_0 + b_0)| < \epsilon$.

Za ma koji $\epsilon > 0$ uzmimo $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} = \epsilon''$. Tada postoje $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$ takvi da je $|a_n - a_0| < \epsilon'$ čim je $n \geq n_0'$, odnosno, $|b_n - b_0| < \epsilon''$ čim je $n \geq n_0''$. Neka je $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$. Sada je, za svaki $n \geq n_0$ (v. §1.4.3),

$|(a_n + b_n) - (a_0 + b_0)| = |(a_n - a_0) + (b_n - b_0)|$

$\leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0| < \epsilon' + \epsilon'' = \epsilon$. ■

Bez dokaza navodimo i dobro ponašanje konvergentnih nizova prema potenciranju. (Ono slijedi iz neprekidnosti potenciranja, o čemu će biti riječi u višim analizama; v. i Lemu 1.4.3)

Teorem 3.2.9 *Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni realni nizovi i neka je pritom $a_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim(a_n) > 0$. Tada je*

$\lim(a_n^{b_n}) = \lim(a_n)^{\lim(b_n)}$.

Posebice, ako je niz (b_n) konstantan, tj. $(b_n) = (r)$ za neki $r \in \mathbb{R}$, onda je

$\lim(a_n^r) = \lim(a_n)^r$.

Primjer 3.2.10 Istražimo konvergira li ili ne niz (a_n), ako je

(a) $a_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $a, b, c, d \in R$, $cn + d \neq 0$;

(b) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$;

(c) $a_n = aq^{n-1}$, $q \in R$.

(a) U slučaju $a = c = 0$ slijedi $d \neq 0$, pa dobivamo konstantni niz $(\frac{b}{d})$. Neka je $a \neq 0 \neq c$. Tada je

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{an+b}{cn+d}\right) = \lim\left(\frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}}\right) = \frac{\lim(a)+\lim(\frac{b}{n})}{\lim(c)+\lim(\frac{d}{n})} = \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c},$$

pri čemu smo iskoristili Teorem 3.2.8 i Primjer 3.2.4(b). Ako je $a \neq 0 = c$ onda je $\lim(a_n) = \pm\infty$ (ovisno o predznaku konstante a) u $\overline{\mathbb{R}}$, a ako je $a = 0 \neq c$ onda je $\lim(a_n) = 0$. (Neka čitatelj poopći ovaj primjer na $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$, gdje su p i q polinomi!)

(b) Po Zadatku 3.(iii) u §1.4.6 je $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n+)}{6}$. Stoga je

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{(n-1)n(2n+1)}{6n^3}\right) = \lim\left(\tfrac{1}{6}(1-\tfrac{1}{n})(2+\tfrac{1}{n})\right) = \tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \tfrac{1}{3},$$

pri čemu smo opet iskoristili Teorem 3.2.8 i Primjer 3.2.4(b).

(c) $(aq^{n-1}) \equiv a, aq, aq^2, aq^3, \cdots$ je tzv. **geometrijski niz** (s konstantom a i količnikom q). Ako je $a = 0$ radi se o konstantnomu nizu $(0) \to 0$. Ako je $a \neq 0$, jednostavno razmatranje pokazuje sljedeće:

$|q| < 1 \Rightarrow \lim(aq^{n-1}) = 0$;

$|q| > 1 \Rightarrow (aq^{n-1})$ nije omeđen pa divergira;

$q = 1 \Rightarrow \lim(aq^{n-1}) = \lim(a) = a$ (konstantni niz);

$q = -1 \Rightarrow (aq^{n-1}) = ((-1)^n a) \equiv -a, a, -a, a, \cdots$ - omeđen i divergira (dva gomilišta: $-a$, a).

Sada ćemo pokazati da se nizu u $\mathbb{R}$ može ustanoviti konvergentnost i bez određivanja granične vrijednosti. To će biti važan (ne samo tehnički) dobitak, jer je često bitno znati samo to konvergira li dani niz bez obzira na to koja točka mu je limes.

Definicija 3.2.7 *Reći ćemo da je realni niz (a_n)* ***Cauchyjev*** *ako udovoljava ovomu uvjetu:*

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+k} - a_n| < \epsilon.$$

Teorem 3.2.10 *Niz (a_n) u $\mathbb{R}$ konvergira točno onda kad je Cauchyjev. (To je tzv.* ***potpunost*** *euklidskoga prostora realnih brojeva $\mathbb{R}$.)*

Dokaz. Neka realni niz (a_n) konvergira, tj. neka postoji $\lim(a_n) = a_0 \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - a_0| < \frac{\epsilon}{2}$ čim je $n \geq n_0$. Jasno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $n + k > n \geq n_0$ pa je i $|a_{n+k} - a_0| < \frac{\epsilon}{2}$. Prema tomu,

$$|a_{n+k} - a_n| = |(a_{n+k} - a_0) + (a_0 - a_n)| \leq |a_{n+k} - a_0| + |a_0 - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

što dokazuje da je (a_n) Cauchyjev niz.

Obratno, neka je (a_n) u $\mathbb{R}$ Cauchyjev niz. Najprije ćemo dokazati da je tada (a_n) omeđen. Za $\epsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_{n+k} - a_n| < 1$ čim su $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geq n_0$. Slijedi da je skup $\{a_n \mid n \geq n_0\}$ sadržan u intervalu $\langle a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1\rangle$. Po tomu zaključujemo, kao u dokazu Teorem 3.2.3, da postoji $c \in \mathbb{R}^+$ takav da je $a[\mathbb{N}] \subseteq [a_{n_0} - c, a_{n_0} + c]$. Dakle, niz (a_n) jest omeđen. Po Bolzano-Weierstrassovu teoremu (Korolar 3.2.2), (a_n) dopušta neki konvergentni podniz (a_{n_k}). Neka bude $\lim(a_{n_k}) = a_0 \in \mathbb{R}$. Dokažimo da je tada i $\lim(a_n) = a_0$! Odaberimo bilo koji $\epsilon > 0$. Budući da je niz (a_n) Cauchyjev, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da da bude $|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ čim su $m, n \geq n_0$ $(m \equiv n + k)$. Iz $\lim(a_{n_k}) = a_0$ slijedi obstojnost nekoga $k_0 \in \mathbb{N}$ za koji je $|a_{n_k} - a_0| < \frac{\epsilon}{2}$ čim je $k \geq k_0$. Uzmimo $k_0' \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0' \geq k_0$ i $n_{k_0'} \geq n_0$ (obstojnost mu slijedi iz strogo uzlazne funkcije što definira podniz). Sada je $|a_n - a_0| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a_0)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_0|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ čim je $n \geq n_0$, tj. $\lim(a_n) = a_0$. ■

Primjer 3.2.11 Pokažimo da realni niz (a_n), $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$, konvergira.

Po Teoremu 3.2.10, dovoljno je pokazati da je $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}})$ Cauchyjev niz. U tu svrhu najprije primijetimo da je, za svaki $m \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^m} = 1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2^{m+1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{m+1}}) < 2.$$

Sada je lako pokazati da se, birajući dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$, razlika $|a_{n+p} - a_n|$ može učiniti po volji malom (kakav god bio p). Zaista,

$$|a_{n+p} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p-1}}) < \frac{1}{2^n} \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

To potvrđuje da je promatrani niz Cauchyjev.

3.2.3 Red realnih brojeva

Red realnih brojeva predstavlja smisleno poopćenje (konačnog) zbrajanja na "zbrajanje" neizmjerno (ali prebrojivo) mnogo pribrojnika. Pritom se nameću dva pitanja: Pod kojim će uvjetima takav beskonačni "zbroj" postojati kao (jedinstveni) realni broj (?); čuvaju li se pritom dobra svojstva običnoga (konačnoga) zbrajanja (?).

Definicija 3.2.8 *Pod* ***redom realnih brojeva*** *(kraće:* ***realnim redom****) podrazumijevamo svaki uređeni par* $((a_n), (s_k))$ *realnih nizova* (a_n) *i* (s_k)*, pri*

čemu je $s_k = a_1 + \cdots + a_k \equiv \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$. *Broj* a_n *nazivamo* n***-tim članom***, *a broj* s_k k***-tim djelomičnim zbrojem*** (*ili* k***-tom parcijalnom sumom***) *toga reda. Jednostavnosti radi, red* $((a_n),(s_k))$ *ćemo ubuduće zapisivati kao* $\sum a_n$ *ili, ponekad, kao* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (pri čemu $+$ *nije* uobičajeno zbrajanje u $\mathbb{R}$ nego samo sugestivna oznaka; v. Primjer 3.2.12(a)).

Primijetimo da je u redu $\sum a_n \equiv ((a_n),(s_k))$ niz (s_k) je posve određen nizom (a_n), jer je, za svaki $k \in \mathbb{N}$, jednoznačno određen zbroj $a_1 + \cdots + a_k$. Nadalje, očito je $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$.

Definicija 3.2.9 *Reći ćemo da red realnih brojeva* $\sum a_n$ ***konvergira*** (*ili da niz* (a_n) ***dopušta zbrajanje***, *odnosno, da je* (a_n) ***zbrojiv*** *ili* ***sumabilan***), *ako pripadni niz djelomičnih zbrojeva* (s_k) *konvergira. U tomu slučaju graničnu vrijednost* $s \equiv \lim(s_k)$ *nazivamo* ***sumom reda*** $\sum a_n$ *i pišemo* $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Ako red* $\sum a_n$ *ne konvergira, kažemo da* ***divergira***.

Primjer 3.2.12 (a) Promatrajmo realni red $\sum a_n$, $a_n = 1$ kad je n neparan i $a_n = -1$ kad je n paran, tj. $a_n = (-1)^{n-1}$. Rabeći znak $+$, njegov formalni zapis izgleda ovako:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1) + \cdots$.

Kad bi ovdje znak $+$ bio zbrajanje u $\mathbb{R}$, smjeli bismo po asocijativnosti najprije zbrojiti sve parove $a_{2n-1} + a_{2n} = 0$, pa bismo dobili nulred koji, očito, konvergira i suma bi mu bila 0. S druge strane, smjeli bismo najprije zbrojiti sve parove $a_{2n} + a_{2n+1} = 0$ ("preživio" bi $a_1 = 1$), pa bi red konvergirao i suma bi mu bila 1. Prema tomu, $+$ ovdje ne označuje zbrajanje.

(b) Promatrajmo geometrijski niz $(a_n) = (aq^{n-1})$ kad je $a = 1$ i $q = \frac{1}{2}$ (v. Primjer 3.2.10(c)). Pripadni red $\sum a_n$ je tzv. ***geometrijski red*** $\sum aq^{n-1} = \sum \frac{1}{2^{n-1}}$ s nizom djelomičnih zbrojeva (s_k), $s_k = 1 + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2^k-1}{2^{k-1}}$.Budući da je $\lim(a_n) = \lim(\frac{1}{2^{n-1}}) = 0$, to je $\lim(s_k) = \lim(\frac{2^k-1}{2^{k-1}}) = \lim(2 - \frac{1}{2^{k-1}}) = \lim(2) - \lim(\frac{1}{2^{k-1}}) = 2 - 0 = 2$, pa geometrijski red $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ konvergira i suma mu je $s \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$. Nije teško pokazati da, općenito, za geometrijski red $\sum aq^{n-1}$ vrijedi sljedeće:

(1) $\sum aq^{n-1}$ konvergira čim je $|q| < 1$ i suma mu je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$;

(2) $\sum aq^{n-1}$ divergira čim je $|q| \geq 1$ ($\lim(s_k) = \pm\infty$ (ovisno o predznaku konstante $a \neq 0$) kad je $q \geq 1$, dok (s_k) nema granične vrijednosti u $\overline{\mathbb{R}}$ kad je $q \leq -1$).

Promatrajmo sada realni red $\sum a_n$ i, za bilo koji $p \in \mathbb{N}$, red $\sum a_{p+n}$ ($\equiv a_{p+1} + a_{p+2} \cdots + a_{p+n} + \cdots$). Red $\sum a_{p+n}$ nazivamo **ostatkom reda** $\sum a_n$ (nakon p-toga člana). Ako $\sum a_n$ konvergira, tj. ako postoji $\lim(s_k) \equiv s$,

onda očito konvergira, za svaki $p \in \mathbb{N}$, i red $\sum a_{p+n}$, i za pripadne sume lako dobivamo:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n}.$$

U tomu slučaju i broj $R_p \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ nazivamo **ostatkom** (konvergentnog) **reda** $\sum a_n$ (nakon p-toga člana). No, očito je da vrijedi i obratno, tj. ako za neki $p \in \mathbb{N}$ red $\sum a_{p+n}$ konvergira, onda konvergira i red $\sum a_n$. Slijedi zaključak o konvergenciji reda $\sum a_n$:

$$\lim(s_k) \equiv s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow (\exists \text{niz } (R_p) \text{ u } \mathbb{R}) \wedge \lim(R_p) = 0.$$

Primijenimo li tu činjenicu na niz (a_n), dobivamo:

$$\lim(a_n) = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim((s - s_{n-1}) - (s - s_n)) =$$
$$\lim(R_{n-1} - R_n) = \lim(R_{n-1}) - \lim(R_n) = 0 - 0 = 0.$$

Time smo dokazali ovaj važni teorem:

Teorem 3.2.11 (Nužni uvjet za konvergiranje reda) *Ako realni red* $\sum a_n$ *konvergira onda je* $\lim(a_n) = 0$. *Ili, ekvivalentno, ako je* $\lim(a_n) \neq 0$ *onda red* $\sum a_n$ *divergira.*

Primjer 3.2.13 Promatrajmo tzv. **harmonijski** red $\sum a_n$, $a_n = \dfrac{1}{n}$. Iako je nužnomu uvjetu za njegovu konvergentnost udovoljeno, tj. $\lim(\frac{1}{n}) = 0$ (v. Primjer 3.2.4(b)), pokazat ćemo da harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ divergira. Pretpostavimo protivno, tj. da red $\sum \frac{1}{n}$ konvergira. To znači da konvergira pripadni niz parcijalnih suma (s_k), $s_k = 1 + \cdots + \frac{1}{k}$. Postoji, dakle, granična vrijednost $\lim(s_k) \equiv s \in \mathbb{R}$. Po Korolaru 3.2.1 i svaki njegov podniz (s_{k_l}) konvergira prema istoj graničnoj vrijednosti $s = \lim(s_{k_l})$. Promatrajmo podniz (s_{k_l}) određen strogo uzlaznom funkcijom $l \mapsto k_l = 2^l$, tj. podniz $s_2, s_4, \cdots, s_{2^l}, \cdots$ i uočimo da je, za svaki $l \in \mathbb{N}$, $s_{2^l} > \frac{l}{2}$. Zaista (pojašnjenja radi uzmimo dostatno veliki l),

$$s_{2^l} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{2^{l-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^{l-1}+(2^{l-1}-1)} + \tfrac{1}{2^l}) >$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{2^l} + \cdots + \tfrac{1}{2^l}) =$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \cdots + \tfrac{2^{l-1}}{2^l} = 1 + l \cdot \tfrac{1}{2} > \tfrac{l}{2}$$

Po pretpostavci, niz (s_{2^l}) konvergira pa je omeđen odozgor, što onda povlači da je i niz $(\frac{l}{2}) < (s_{2^l})$ omeđen odozgor. Time smo upali u protuslovlje jer je $\lim(\frac{l}{2}) = +\infty$ u $\overline{\mathbb{R}}$.

3.2.4 Nekoliko kriterija za konvergentnost realnog reda

Za red $\sum a_n$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je **red s pozitivnim članovima** kad god je svaki $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ dva reda s pozitivnim članovima. Reći ćemo da $\sum b_n$ **majorira** (ili da je **majoranta** od) $\sum a_n$ ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq b_n$ čim je $n \geq n_0$. (Ekvivalentno je reći da tada $\sum a_n$ **minorira** (ili da je **minoranta** od) $\sum b_n$.)

Teorem 3.2.12 (Poredbeni kriterij) *Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako $\sum a_n$ ima konvergentnu majorantu onda i on konvergira, a ako $\sum a_n$ ima divergentnu minorantu onda i on divergira.*

Dokaz. Neka konvergentni red $\sum b_n$ majorira red $\sum a_n$. Ne smanjujući općenitost, smijemo pretpostaviti da je $n_0 = 1$, tj. $0 \leq a_n \leq b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da su nizovi djelomičnih zbrojeva (s_k), $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, i (t_k), $t_k = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$, uzlazni i da je $s_k \leq t_k$ za svaki k. Budući da postoji $\lim(t_k)$, to je niz (s_k) omeđen odozgor. Po Teoremu 3.2.6 postoji i $\lim(s_k)$, tj. i red $\sum a_n$ konvergira. Drugu tvrdnju se, pretpostavivši protivno, dokazuje sasvim slično, što vodi u protuslovlje. ■

Primjer 3.2.14 Promatrajmo redove s pozitivnim članovima
$\sum a_n$, $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, i $\sum b_n$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
Primijetimo da je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = b_n$, pa $\sum b_n$ majorira $\sum a_n$. Nadalje, red $\sum b_n$ konvergira. Zaista, budući da je $b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, njegovi djelomični zbrojevi tvore niz (t_k), $t_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $t_2 = 1 - \frac{1}{3}$, $\cdots$, $t_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, koji konvergira prema $\lim(t_k) = 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Po Teoremu 3.2.12 konvergira i red $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$. Osim toga, budući da je $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ ostatak R_1 reda $\sum \frac{1}{n^2}$, zaključujumo da konvergira i red $\sum \frac{1}{n^2}$.

Sljedeći teorem donosi malo poboljšanu formulaciju poredbenoga kriterija:

Teorem 3.2.13 *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka je $b_n > 0$ čim je $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Ako postoji $\lim(\frac{a_n}{b_n}) \equiv r \in [0, \cdot\rangle \bigcup \{+\infty\}$,onda vrijedi:*

(i) $r \in \langle 0, \cdot\rangle \Rightarrow$ *oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;*
(ii) $r = 0$ *i* $\sum a_n$ *divergira* $\Rightarrow \sum b_n$ *divergira;*
(iii) $r = +\infty$ *i* $\sum a_n$ *konvergira* $\Rightarrow \sum b_n$ *konvergira.*

Primjer 3.2.15 Istražimo konvergira li red $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Usporedit ćemo ga s harmonijskim redom $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira (v. Primjer 3.2.13). Primijetimo da je $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa po Teoremu 3.2.12 i red $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira. Ili, koristeći Teorem 3.2.13(ii), $\lim(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}) = \lim(\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$ pa $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira.

Navest ćemo još tri kriterija (*dovoljna uvjeta*) za konvergiranje realnog reda s pozitivnim članovima:

Teorem 3.2.14 *Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima i neka je $a_n > 0$ čim je $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

(i) D'Alembertov kriterij

$$\left(\exists \lim(\tfrac{a_{n+1}}{a_n}) \equiv q \left\{ \begin{array}{l} <1 \\ >1 \end{array} \right.\right) \Rightarrow \sum a_n \left\{ \begin{array}{l} \textit{konvergira} \\ \textit{divergira} \end{array} \right. ;$$

(ii) Cauchyjev kriterij

$$\left(\exists \lim(\sqrt[n]{a_n}) \equiv q \left\{ \begin{array}{l} <1 \\ >1 \end{array} \right.\right) \Rightarrow \sum a_n \left\{ \begin{array}{l} \textit{konvergira} \\ \textit{divergira} \end{array} \right. ;$$

(iii) Raabeov kriterij

$$\left(\exists \lim(n(1-\tfrac{a_{n+1}}{a_n})) \equiv q \left\{ \begin{array}{l} <1 \\ >1 \end{array} \right.\right) \Rightarrow \sum a_n \left\{ \begin{array}{l} \textit{konvergira} \\ \textit{divergira} \end{array} \right. .$$

Dokaz. Dokazat ćemo samo tvrdnju o konvergenciji u (i). Pod danim pretpostavkama, postoje neki $n_1 \geq n_0 \geq 2$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da bude $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ čim je $n \geq n_1$. Primijetimo da je tada

$$a_n = \frac{a_{n_1} a_{n_1+1} \cdots a_{n-1} a_n}{a_{n_1} a_{n_1+1} \cdots a_{n-1} a_n} \cdot a_n = a_{n_1} \cdot \frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1}} \cdot \frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_{n_1} q^{n-n_1}.$$

Stavivši $a \equiv \frac{a_{n_1}}{q^{n_1-1}}$ dobivamo $a_n \leq aq^{n-1}$, za svaki $n \geq n_1$, pa je geometrijski red $\sum aq^{n-1}$ konvergentna majoranta promatranoga reda. Po Teoremu 3.2.12, red $\sum a_n$ konvergira. ■

Primjer 3.2.16 Promatrajmo red $\sum \frac{n}{3^{n-1}}$. Po D'Alembertovu kriteriju dobivamo $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1$ pa red konvergira. (Slično, po Cauchyjevu kriteriju dobivamo $\lim(\sqrt[n]{a_n}) = \lim\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{3^{1-\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{3} < 1$ (v. §3.2.7 Vježbe, zadatak 1.(e)), a po Raabeovu kriteriju dobivamo $\lim n((1-\frac{a_{n+1}}{a_n})) = \lim(\frac{2n-1}{3}) = +\infty > 1$, pa slijedi isti zaključak.)

Raabeov kriterij pomogne ponekad kad D'Alembertov kriterij ne donese odluku, tj. u ponekom slučaju $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$.

Primjer 3.2.17 Istražiti konvergira li red $\sum a_n \equiv \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots$. Označimo $1!! = 1$ i $2!! = 2$, te za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ i $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)$. Sada se $\sum a_n$ može zapisati kao $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Primijetimo da je po D'Alembertovu kriteriju

$$\lim(\tfrac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim\left(\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}\right) = \lim(\tfrac{2n+1}{2n+2}) = 1 \quad \text{- ne znamo odgovor.}$$

Međutim, po Raabeovu kriteriju je

$$\lim n((1-\tfrac{a_{n+1}}{a_n})) = \lim(\tfrac{n}{2n+2}) = \tfrac{1}{2} < 1,$$

pa promatrani red divergira.

Definicija 3.2.10 *Reći ćemo da realni red $\sum a_n$* ***apsolutno konvergira*** *ako konvergira red $\sum |a_n|$.*

Za redove s pozitivnim članovima je, očito, apsolutna konvergencija isto što i konvergencija. Apsolutna konvergencija jest nešto novo za redove s beskonačno mnogo negativnih članova.

Teorem 3.2.15 *Ako realni red $\sum a_n$ apsolutno konvergira onda i konvergira.*

Dokaz. Neka je u_k zbroj svih pozitivnih, a $-v_k$ zbroj svih negativnih članova u k-tomu djelomičnom zbroju $s_k = a_1 + \cdots + a_k$. Tada za k-ti djelomični zbroj $t_k = |a_1| + \cdots + |a_k|$ reda $\sum |a_n|$ vrijedi $t_k = u_k + v_k$, dok je $s_k = u_k - v_k$. Nizovi (u_k), (v_k) i (t_k) su uzlazni i $u_k \leq t_k$, $v_k \leq t_k$, $k \in \mathbb{N}$. Budući da red $\sum a_n$ apsolutno konvergira, postoji $\lim(t_k) \equiv t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa su nizovi (u_k) i (v_k) omeđeni. Po Teoremu 3.2.6, nizovi (u_k) i (v_k) konvergiraju. Neka je $\lim(u_k) = u$, a $\lim(v_k) = v$. Po Teoremu 3.2.8(i) slijedi da je $\lim(s_k) = \lim(u_k - v_k) = u - v$. Prema tomu, i niz (s_k) konvergira, tj. red $\sum a_n$ konvergira. ■

Narednim primjerom (Primjer 3.2.18(b)) ćemo pokazati da tvrdnja obratna Teoremu 3.2.15 ne vrijedi, tj. da ima konvergentnih redova koji ne konvergiraju apsolutno. Za takve se redove ponekad kaže da **konvergiraju uvjetno** (ili **relativno**).

Među redovima što imaju beskonačno mnogo negativnih članova posebno je važan tzv. **alternirajući red**. To je svaki realni red $\sum a_n$ s alternirajućim predznacima svojih članova, tj. ili su svi $a_{2n-1} \geq 0$ i svi $a_{2n} \leq 0$ ili su svi $a_{2n-1} \leq 0$ i svi $a_{2n} \geq 0$. Stoga se često takav red formalno zapisuje kao

$$\sum a_n \equiv a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots ,$$

pri čemu su ili svi $a_n > 0$ ili svi $a_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$. To onda vodi k uobičajenomu zapisu $\sum(-1)^{n-1}a_n$ za alternirajući reda . Konvergencija alternirajućeg reda se najčešće ispituje tzv. *Leibnizovim kriterijem*:

Alternirajući red $\sum(-1)^{n-1}a_n$ konvergira čim je udovoljeno ovim dvama uvjetima:

(1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| \leq |a_n|$;

(2) $\lim(a_n) = 0$.

Da bismo se u to uvjerili, dovoljno je potvrditi prvi slučaj, tj. $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$. Tada je, po (1), $a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0$, pa je

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} a_n = s_{2k-2} + a_{2k-1} + a_{2k} \geq s_{2k-2},\ k \in \mathbb{N},$$

dakle, niz (s_{2k}) je uzlazan. Nadalje,

$$s_{2k} = s_{2k-1} + a_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1 = a_1,\ k \in \mathbb{N},$$

što znači da je niz (s_{2k}) omeđen odozgor. Po Teoremu 3.2.6, niz (s_{2k}) konvergira, tj. postoji $\lim(s_{2k}) \equiv s \in \mathbb{R}$. Slično se zaključuje da je niz (s_{2k-1}) silazan i omeđen odozdol pa postoji $\lim(s_{2k-1})$. Budući da je $\lim(a_{2n}) = \lim(a_n) = 0$, mora biti $\lim(s_{2k-1}) = \lim(s_{2k}) = s$, pa oba komplementarna

podniza od (s_k) konvergiraju prema istoj točki s. Po Korolaru 3.2.1 je i $\lim(s_k) = s = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. ■

Primjer 3.2.18 (a) $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$ je alternirajući red koji (i) apsolutno konvergira (v. Primjer 3.2.12(b)).

(b) $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ je tzv. **alternirajući harmonijski red**. Po Primjeru 3.2.13 on ne konvergira apsolutno. Međutim, taj red konvergira jer ispunja oba uvjeta Leibnizova kriterija: $|a_{n+1}| = a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n = |a_n|$, za svaki $n \in N$, i $\lim(a_n) = \lim(\frac{1}{n}) = 0$.

(c) Red $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}-\cdots$ (nije alternirajući red) kovergira apsolutno. (Pripadni red apsolutnih vrijednosti se podudara s odgovarajućim u (a).)

3.2.5 Funkcijski niz

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$, a $\mathbb{R}^X$ skup svih funkcija iz X u $\mathbb{R}$. **Funkcijski niz** definiramo po Definiciji 3.2.1 kao niz u skupu $\mathbb{R}^X$. Dakle, funkcijski niz (f_n) je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^X$, pri čemu je $f_n \equiv f(n) : X \to \mathbb{R}$, tj. $f_n \in \mathbb{R}^X$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.2.11 *Reći ćemo da funkcijski niz (f_n) u $\mathbb{R}^X$* ***konvergira u točki*** *$x_0 \in X$ prema funkciji $f_0 \in \mathbb{R}^X$, ako realni niz $(f_n(x_0))$ konvergira prema točki $f_0(x_0) \in \mathbb{R}$. Ako je $A \subseteq X$ i ako funkcijski niz (f_n) konvergira u svakoj točki $x \in A$ prema prema funkciji f_0, onda kažemo da funkcijski niz (f_n)* ***konvergira po točkama*** *(ili* ***konvergira obično****)* ***na skupu*** *A prema funkciji f_0. Ovo kraće zapisujemo kao $\lim(f_n(x)) = f_0(x)$, $x \in A$. Simbolički se definicijski uvjet može zapisati ovako:*

$$(\forall x \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \epsilon.$$

Napokon, u slučaju $A = X$ govorimo da funkcijski niz (f_n) ***konvergira po točkama*** *(ili* ***obično****) prema funkciji f_0.*

Primjer 3.2.19 (a) Promatrajmo funkcijski niz (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x^2}$. Budući da je $\frac{nx}{1+nx+x^2} = \frac{x}{\frac{1}{n}+1+\frac{x^2}{n}}$, to je $\lim(\frac{nx}{1+nx+x^2}) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema tomu, niz (f_n) konvergira po točkama prema identiteti $f_0 = 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

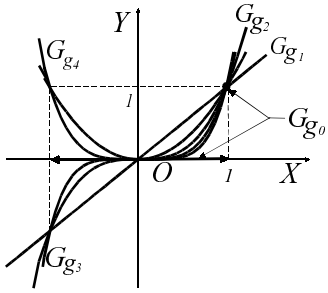
(b) Neka je (g_n) funkcijski niz, $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = x^n$ (v. crtež dolje). Uočimo da je (v. Primjer 3.2.10(c))

$$\lim(x^n) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \\ \text{ne postoji}, & x \leq -1 \end{cases}.$$

Zato smijemo reći da, za bilo koji $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcijski niz $(g_n|_X)$ konvergira po točkama *na* (svakom) *skupu* $A \subseteq X \bigcap \langle -1, 1]$ prema svakoj funkciji $g : X \to \mathbb{R}$ za koju je

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \wedge |x| < 1 \\ 1, & x \in A \wedge x = 1 \end{cases}.$$

U najpovoljnijem slučaju, dakle, na ovaj se primjer može gledati kao na funkcijski niz $(g_n \mid_{\langle -1,1]})$ u $\mathbb{R}^{\langle -1,1]}$ koji konvergira po točkama prema funkciji $g_0 : \langle -1, 1] \to \mathbb{R}$, $g_0(x) = 0$ za svaki $x \neq 1$ i $g_0(1) = 1$.



Konvergencija po točkama se pokazuje preslabom za neke potrebe (v. npr. Teorem 3.3.15). Jedno od pravih pojačanja se uvodi ovako:

Definicija 3.2.12 *Reći ćemo da funkcijski niz (f_n) u $\mathbb{R}^X$* ***konvergira jednoliko*** *(ili* ***uniformno****) prema funkciji f_0, ako je udovoljava ovomu uvjetu:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \epsilon.$$

Reći ćemo da (f_n) ***konvergira jednoliko na skupu*** *$A \subseteq X$ prema f_0, ako niz pripadnih suženja $(f_n|_A)$ konvergira jednoliko prema suženju $f_0|_A$.*

Primjer 3.2.20 Funkcijski niz (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, konvergira jednoliko prema funkciji $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0 = c_0$ (tj. prema nulkonstanti; $f_0(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$). Zaista, kakav god $\epsilon > 0$ odabrali, može se naći takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da bude $|\frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$ za svaki x i svaki $n \geq n_0$. (Dovoljno je uzeti $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$.)

Teorem 3.2.16 *Jednolika konvergencija funkcijskog niza povlači njegovu konvergenciju po točkama, ali ne i obratno.*

Dokaz. Budući da broj n_0 u uvjetu jednolike konvergencije ovisi samo o broju $\varepsilon > 0$, dok u uvjetu konvergencije po točkama ovisi o ε i o točki x, prva tvrdnja je očito istinita. Da, općenito, konvergencija po točkama ne povlači jednoliku konvergenciju vidi se po Primjeru 3.2.19(b). Tamo smo pokazali da funkcijski niz $(g_n \mid_{\langle -1,1]})$, $g_n(x) = x^n$, konvergira po točkama prema funkciji $g_0 : \langle -1, 1] \to \mathbb{R}$, $g_0(x) = 0$ za svaki $x \neq 1$ i $g_0(1) = 1$. Pokažimo sada da ta konvergencija nije jednolika, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ takav da se, koji god $n_0 \in \mathbb{N}$ odabrali, uvjet jednolike konvergencije ne može ispuniti! Uzmimo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ pa neka je n_0 bilo koji prirodni broj. Uočimo da tada postoje neki $x \in \langle -1, 1\rangle$ i $n > n_0$ za koje je

$$|g_n(x) - g_0(x)| = |x^n - 0| = x^n > \tfrac{1}{2}.$$

Zaista, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $x > 0$ je $x^n = (1 + (x - 1))^n > 1 + n(x - 1)$ (v. Zadatak 22 u §1.4.6), pa se za traženi x smije uzeti bilo koji element

od $\left[1-\frac{1}{2n},1\right\rangle$ čim je $n > n_0$. To pokazuje da se ne može udovoljiti uvjetu jednolike konvergencije. ■

3.2.6 Funkcijski red

Funkcijski red se definira slično brojevnom redu (v. Definiciju 3.2.8).

Definicija 3.2.13 *Pod* ***redom realnih funkcija*** (*kraće:* ***funkcijskim redom***) *na* $X \subseteq \mathbb{R}$ *podrazumijevamo svaki uređeni par* $((f_n),(s_k))$ *funkcijskih nizova* (f_n) *i* (s_k) *u* $\mathbb{R}^X$ *pri čemu je*

$$s_k = f_1 + \cdots + f_n \equiv \sum_{n=1}^{k} f_n.$$

Uobičajilo se funkcijski red $((f_n),(s_k))$ *kraće zapisivati kao* $\sum f_n$ *ili, ponekad, kao* $f_1 + \cdots + f_n + \cdots$ (+ ovdje nije funkcijsko zbrajanje nego samo sugestivna oznaka; usp. Primjer 3.2.12(a)). *Funkciju* f_n *nazivamo* n-***tim članom***, *a funkciju* s_k k-***tim djelomičnim zbrojem*** (*ili* k-***tom parcijalnom sumom***) *funkcijskoga reda* $\sum f_n$.

Definicija 3.2.14 *Reći ćemo da funkcijski red* $\sum f_n$ *u* $\mathbb{R}^X$ ***konvergira u točki*** $x_0 \in X$ *prema funkciji* $s : X \to \mathbb{R}$, *ako red realnih brojeva* $\sum f_n(x_0)$ *konvergira prema broju* $s(x_0)$. *Ako je* $A \subseteq X$ *i funkcijski red* $\sum f_n$ *konvergira u svakoj točki* $x \in A$ *prema funkciji* s, *onda kažemo da red* $\sum f_n$ ***konvergira po točkama*** (*ili* ***obično***) ***na skupu*** A *prema funkciji* s *i pišemo* $s|_A = \sum_{n=1}^{\infty} f_n|_A$. *Posebice, ako je* $A = X$, *govorimo da red* $\sum f_n$ ***konvergira po točkama*** (*ili* ***obično***) *prema funkciji* s *i pišemo* $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. *Napokon, reći ćemo da funkcijski red* $\sum f_n$ ***apsolutno konvergira*** (***na skupu*** $A \subseteq X$), *ako red* $\sum |f_n|$ *konvergira po točkama* (*na skupu* A). (Svakom funkcijom $f : X \to \mathbb{R}$ je posve određena funkcija $|f| : X \to \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\} \subset \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$.)

Primijetimo da, po Definicijama 3.2.13, 3.2.9 i 3.2.11, funkcijski red $\sum f_n$ u $\mathbb{R}^X$ konvergira u točki $x_0 \in X$ (konvergira po točkama na skupu $A \subseteq X$) prema funkciji $s \in \mathbb{R}^X$, ako i samo ako pripadni funkcijski niz djelomičnih zbrojeva (s_k) konvergira u točki x_0 (konvergira po točkama na skupu A) prema funkciji s.

Konvergentnost, odnosno, divergentnost funkcijskog reda $\sum f_n$ (u nekoj točki $x \in X$ ili na nekom podskupu $A \subseteq X$) istražujemo na način sličan onomu za brojevne redove. Pritom najčešće rabimo poznate kriterije za redove s pozitivnim članovima primijenjujući ih na $\sum |f_n(x)|$. To onda znači da, zapravo, ispitujemo konvergentnost (divergentnost) funkcijskoga reda $\sum |f_n|$, tj. apsolutnu konvergentnost polaznoga reda $\sum f_n$.

Primjer 3.2.21 Promatrajmo funkcijski red $\sum f_n$, $f_n : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_{n+1}(x) = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$. Cauchyjev kriterij, primjerice, daje $\lim(\sqrt[n]{|f_n(x)|}) = \lim(\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}\right|}) = \left|\frac{x}{1-x}\right|$, što povlači konvergentnost u svakoj točki $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ za koju je $|\frac{x}{1-x}| < 1$. Odatle slijedi da promatrani funkcijski red konvergira (apsolutno) na skupu $A = \langle \cdot, \frac{1}{2} \rangle$. Posebice treba ispitati ponašanje reda $\sum f_n$ "na rubu" od A, tj. u točki $x = \frac{1}{2}$. Pripadni brojevni red jest $\sum f_n(\frac{1}{2})$, tj. $2 + 2 + \cdots + 2 + \cdots$, koji očito divergira.

Kako za funkcijske nizove, tako je i za funkcijske redove od posebne važnosti jednolika konvergencija.

Definicija 3.2.15 *Reći ćemo da funkcijski red $\sum f_n$ u $\mathbb{R}^X$* ***jednoliko*** *(ili* ***uniformno****)* ***konvergira*** *prema funkciji $s : X \to \mathbb{R}$, ako pripadni funkcijski niz djelomičnih zbrojeva (s_k) jednoliko konvergira prema funkciji s. Ako je $A \subseteq X$ i red $\sum f_n|_A$ jednoliko konvergira prema suženju $s|_A$, onda kažemo da funkcijski red $\sum f_n$* ***jednoliko*** *(ili* ***uniformno****)* ***konvergira na skupu*** *A prema funkciji s. Operativni zapis jednolike konvergencije funkcijskog reda izgleda ovako:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(\forall k \in \mathbb{N})\ k \geq k_0 \Rightarrow |\sum_{n=1}^{k} f_n(x) - s(x)| < \epsilon.$$

Kako za funkcijske nizove (v. Teorem 3.2.16) tako i za funkcijske redove, jednolika konvergencija povlači konvergenciju po točkama, ali *ne* i obratno. Sljedeći teorem donosi jedan od najpraktičnijih dostatnih uvjeta za jednoliku konvergenciju.

Teorem 3.2.17 (Weierstrassov kriterij) *Ako funkcijski red $\sum f_n$ u $\mathbb{R}^X$ ima na skupu $A \subseteq X$ konvergentnu majorantu $\sum a_n$ u $\mathbb{R}$ (tj. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in A)$ $|f_n(x)| \leq a_n$ čim je $n \geq n_0$), onda red $\sum f_n$ apsolutno i jednoliko konvergira na A.*

Dokaz. Jasno je da obstojnost takve konvergentne majorante $\sum a_n$ u $\mathbb{R}$ povlači apsolutnu, dakle i po točkama, konvergenciju na skupu A funkcijskoga reda $\sum f_n$ u $\mathbb{R}^X$. Pokažimo još da je ta konvergencija jednolika! Odaberimo bilo koji $\epsilon > 0$. Uvedimo uobičajene oznake:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n|_A,\ s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n|_A,\ \sigma_k = \sum_{n=1}^{k} a_n,\ \sigma \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Tada je, za svaki $x \in A$,

$$|s(x) - s_k(x)| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sigma - \sigma_k \geq 0.$$

Budući da je $\lim(\sigma_k) = \sigma$, to postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (ovisan, dakle, samo o ϵ a ne i o točki x) takav da je $|\sigma - \sigma_k| = \sigma - \sigma_k < \epsilon$ čim je $k \geq k_0$. ■

Među funkcijskim redovima u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ posebno je važan tzv. **potencijski red**

$\sum f_n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$,
a_n realna konstanta (za svaki n). Ponekad se ovdje dopušta i $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ pod uvjetom da f_0 bude konstantna funkcija c_{a_0}. Uobičajeni zapis potencijskog reda jest $\sum a_n x^n$. Istražujući (ne)konvergentnost potencijskog reda, lako se dolazi do zaključka da ona ovisi o brojevnomu nizu (a_n), točnije, o njegovu najvećem gomilištu (v. pododjeljak 3.2.2). Stoga se svakom potencijskom redu $\sum a_n x^n$ pridijeljuje njegov **konvergencijski polumjer** $\rho \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$ kako slijedi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\limsup(\sqrt[n]{|a_n|})}, & \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ +\infty, & \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0 \\ 0, & \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}) = +\infty \end{cases}.$$

Pokazuje se da potencijski red $\sum a_n x^n$ konvergira u svakoj točki $x \in \langle -\rho, \rho \rangle$ i divergira u svakoj točki $x \in \mathbb{R} \setminus [-\rho, \rho]$ čim je $\rho > 0$. U točki $x \in \{-\rho, \rho\}$ moguće je, ovisno o konkretnom redu, konvergiranje ili divergiranje (v. Primjer 3.2.22). Ako je $\rho = +\infty$, potencijski red konvergira u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$, dok u slučaju $\rho = 0$, potencijski red divergira za svaki $x \neq 0$. Štoviše, vrijedi ovaj teorem (ne ćemo ga dokazati):

Teorem 3.2.18 *Potencijski red $\sum a_n x^n$ konvergira apsolutno i jednoliko na svakom segmentu $[-r, r]$ čim je $r < \rho$, a divergira na $\mathbb{R} \setminus [-\rho, \rho]$.*

Primjer 3.2.22 Promatrajmo potencijski red $\sum \frac{1}{n} x^n$.
Uočimo da je $\limsup(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}) = 1$ (v. §3.2.7 Vježbe, Zadatak 1.(e)) pa je i pripadni konvergencijski polumjer $\rho = \frac{1}{1} = 1$. Stoga potencijski red $\sum \frac{1}{n} x^n$ konvergira po točkama na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, apsolutno i jednoliko konvergira na svakom segmentu $[-1 + \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}]$, $m \in \mathbb{N}$, a divergira na $\langle \cdot, -1 \rangle \bigcup \langle 1, \cdot \rangle$. Napokon, za $x = -1$ ovaj red postaje alternirajućim harmonijskim redom $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ koji konvergira (usp. Primjer 3.2.18(b)), a za $x = 1$ dobivamo harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira (v. Primjer 3.2.13). Prema tomu, $\sum \frac{1}{n} x^n$ konvergira po točkama na $[-1, 1\rangle$, a divergira na $\mathbb{R} \setminus [-1, 1\rangle$.

3.2.7 Vježbe

1. Odrediti granične vrijednost sljedećih (konvergentnih) realnih nizova (a_n):

(a) $a_n = \frac{n}{c^n}$, $c > 1$; (b) $a_n = \sqrt[n]{c}$, $c > 0$; (c) $a_n = \frac{n^b}{c^n}$, $b > 0$, $c > 1$;
(d) $a_n = \frac{c^n}{n!}$; (e) $a_n = \sqrt[n]{n}$; (f) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Rješenje. (a) Budući da je $c > 1$, to je $c = 1 + h$ za neki $h > 0$. Za $n \geq 2$ dobivamo $c^n = (1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2} h^2 \cdots + h^n \geq \frac{h^2}{2} n(n-1)$. Sada je $0 \leq \lim(\frac{n}{c^n}) \leq \lim(\frac{n}{\frac{h^2}{2} n(n-1)}) = \lim(\frac{2}{h^2}) \lim(\frac{1}{n-1}) = \frac{2}{h^2} \cdot 0 = 0$, pa je tražena granična vrijednost 0.
(c) Primijetimo da je $\frac{n^b}{c^n} = (\frac{n}{(c^{\frac{1}{b}})^n})^b$, pa je, po (a) i Teoremu 3.2.9, $\lim(\frac{n^b}{c^n}) = 0^b = 0$. (Preostalo: (b) 1; (d) 0; (e) 1; (f) 0.)

2. Neka je (a_n) realni niz i $a_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokazati sljedeće implikacije:

(a) $\lim(a_n) = +\infty \Rightarrow \lim(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$;

(b) $\lim(a_n) = -\infty \Rightarrow \lim(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$;

(c) $\lim(a_n) = 0 \Rightarrow \lim((1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}) = e$;

(d) $\lim(a_n) = 0 \Rightarrow \lim(\frac{\ln(1+a_n)}{a_n})^{a_n} = 1$.

3. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $a_0 = \inf A$ ili $a_0 = \sup A$. Tada postoji niz (a_n) u A takav da je $\lim(a_n) = a_0$. (Naputak: Ako je $a_0 = \inf A$ onda $(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)\ a < a_0 + \epsilon$, pa se može uporabiti niz (ϵ_n), $\epsilon_n = \frac{1}{n}$.)

4. Pokazati da realni red $\sum a_n$, $a_n = \ln(1+\frac{1}{n})$, divergira iako je $\lim(a_n) = 0$.

5. (a) Neka je (a_n) bilo koji **niz decimalnih znamenaka** (tj. $a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$). Dokazati da realni red $\sum b_n$, $b_n = \frac{a_n}{10^n}$, konvergira.

Dokaz. Budući da je $0 \leq a_n \leq 9$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, to je (v. Primjer 3.2.12(b)) $0 \leq \sum \frac{a_n}{10^n} \leq \sum \frac{9}{10^n} = \sum \frac{9}{10}(\frac{1}{10})^{n-1} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$, pa po Teoremu 3.2.12 red $\sum \frac{a_n}{10^n}$ konvergira i to prema nekom $x \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0, 1]$. Primijetimo da je niz (a_n) tada, zapravo, (beskonačni) decimalni zapis broja $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{n+1} \cdots$. (Zato se kaže i da je (a_n) niz decimalnih znamenaka *broja* x. Obratno, može se pokazati da za svaki $x \in [0, 1]$ postoji neki niz decimalnih znamenaka (a_n) s mogućom nejedinstvenošću kako slijedi: Ako je $0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{n+1} \cdots = x = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots b_n b_{n+1} \cdots$ onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n = b_n$ za $n \leq n_0$, $a_{n_0+1} = b_{n_0+1} - 1$ te $a_n = 9$ i $b_n = 0$ za $n \geq n_0 + 2$.)

(b) Konvergira li red $\sum a_n$, $a_{2n-1} = (\frac{n}{2n-1})^{2n-1}$ i $a_{2n} = (\frac{n}{2n+1})^{2n+1}$? (Naputak: Primijeniti Cauchyjev kriterij.) Osim toga, pokazati da je $\lim(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}) > 3$ i raspraviti tu činjenicu.

6. Dokazati da funkcijski niz (f_n), $f_n : [0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$, konvergira po točkama prema funkciji $f_0 : [0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ za $x \leq 1$ i $f_0(x) = x$ za $x > 1$.

7. Dokazati da funkcijski niz (f_n) u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, konvergira po točkama prema funkciji $f_0 = \exp_e \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Je li ta konvergencija jednolika?

8. Dokazati da funkcijski red $\sum f_n$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln(1+n)})$, jednoliko konvergira na svakom segmentu $[-c, c] \subseteq \mathbb{R}$, ali ne i na cijelom $\mathbb{R}$.

9. Odrediti konvergencijski polumjer potencijskoga reda $\sum a_n x^n$:

(a) $a_n = 1$ za svaki n; (b) $a_n = \frac{1}{n^2}$; (c) $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

10. Pokazati da potencijski red $\sum x^n$, $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ (usp. zadatak 9.(a)) jednoliko konvergira na svakom segmentu $[-r, r]$ za $r \in \langle 0, 1\rangle$, ali ne i na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. (Naputak: $|\sum\limits_{n=0}^{k} x^n - \frac{1}{1-x}| = \frac{|x|^{k+1}}{|1-x|} \geq \frac{1}{2^{k+1}|1-x|} \geq 1$ čim je x dovoljno blizu 1.)

3.3 NEPREKIDNE FUNKCIJE

U ovomu odjeljku se bavimo funkcijama iz X u $\mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, koji su *neprekidne* (neprekinute, kontinuirane). Govoreći intuitivno i opisno, radi se o funkcijama kojima se vrijednost $f(x_0)$, u svakoj točki $x_0 \in X$, po volji malo razlikuje od vrijednosti $f(x)$ čim je točka x dovoljno blizu x_0. Prije nego prijeđemo na glavnu temu, poopćit ćemo pojam granične vrijednosti s nizova na sve promatrane realne funkcije, a potom definirati i pojam granične vrijednosti (limesa) u točki x_0.

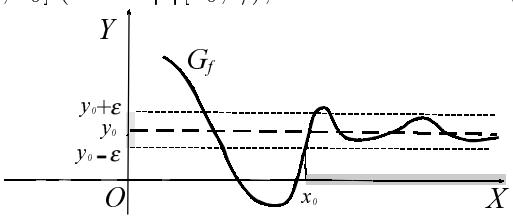
3.3.1 Granična vrijednost u beskonačnosti

Definicija 3.3.1 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $X \subseteq \mathbb{R}$ neomeđen odozdol (odozgor), tj, X siječe svaki interval $\langle \cdot, b\rangle$ ($\langle a, \cdot\rangle$). Reći ćemo da je točka $y_0 \in \mathbb{R}$* ***granična vrijednost*** *(ili* ***limes****) funkcije f* ***kad*** *x* ***teži prema*** *$-\infty$ ($+\infty$), ako je ispunjen ovaj uvjet:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x_0 \in X)(\forall x \in X)\ x \leq x_0\ (x \geq x_0) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon.$$

Ovo ćemo kraće zapisivati kao $\lim\limits_{-\infty} f = y_0$ ($\lim\limits_{+\infty} f = y_0$) ili, ponekad, kao $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$).

Po definiciji, dakle, $\lim\limits_{-\infty} f = y_0$ ($\lim\limits_{+\infty} f = y_0$) znači da se sve vrijednosti $f(x)$, $x \in X \bigcap \langle \cdot, x_0]$ ($x \in X \bigcap [x_0, \cdot\rangle$), nalaze u intervalu $\langle y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon\rangle$ (v. crtež).



Primjer 3.3.1 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+\sin x}{x}$. Budući da je sin omeđena funkcije ($|\sin x| \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$; v. §3.1.3(v))), to je broj $\frac{x+\sin x}{x}$ blizu 1 kad je $|x|$ dostatno velik. Razumno je, stoga, očekivati da bi obje granične vrijednosti od f u beskonačnosti ($x \to -\infty$ i $x \to +\infty$) mogle postojati i biti jednake broju $y_0 = 1$. Zaista, odabravši bilo koji $\epsilon > 0$, dovoljno je uzeti neki $x_0 < -\frac{1}{\epsilon}$ ($x_0 > \frac{1}{\epsilon}$) pa će, za svaki $x \leq x_0$ ($x \geq x_0$) biti $|f(x) - 1| = \left|\frac{x+\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} < \epsilon$. Prema tomu, $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = 1$.

Napomena 3.3.1 Primijetimo da se u slučaju $X = \mathbb{N}$ pojam granične vrijednosti funkcije $f \equiv a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kad $x \equiv n \to +\infty$ podudara s pojmom granične vrijednosti realnoga niza (a_n) (usp. Definiciju 3.2.3). Prema tomu, $\lim(a_n)$ je tek posebani slučaj od $\lim\limits_{+\infty} f$. Kako i za nizove (v. Teorem 3.2.2), tako se i u općem slučaju može lako dokazati jedinstvenost graničnih vrijednosti $\lim\limits_{-\infty} f$ i $\lim\limits_{+\infty} f$ čim postoje.

3.3.2 Granična vrijednost u točki

Definicija 3.3.2 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcija, a $x_0 \in \mathbb{R}$ točka sa svojstvom da svaka njena okolina*[1] *siječe skup $X \setminus \{x_0\}$, tj. za svaki $\delta > 0$ neka je $(X \setminus \setminus\{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \neq \emptyset$. Reći ćemo da je točka $y_0 \in \mathbb{R}$* ***granična vrijednost*** *(ili* ***limes****) funkcije f* ***u točki*** *x_0 ako je ispunjen ovaj uvjet:*

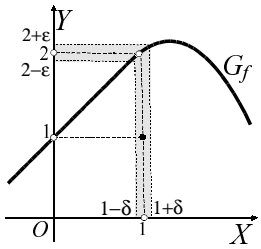
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle) \quad |f(x) - y_0| < \epsilon.$$

Ovo ćemo kraće zapisivati kao $\lim\limits_{x_0} f = y_0$ ili, ponekad, kao $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Primjer 3.3.2 Pokažimo da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in \langle \cdot, 1\rangle \\ 1, & x = 1 \\ -x^2 + 3x, & x \in \langle 1, \cdot\rangle \end{cases},$$

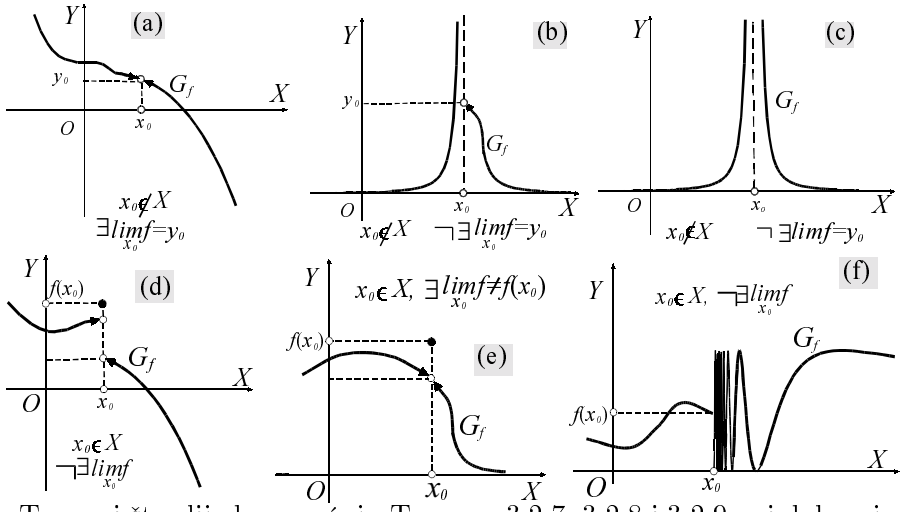
ima graničnu vrijednost u točki $x_0 = 1$ (v. crtež). Uočimo da su vrijednosti $f(x)$ blizu 2 čim je x blizu 1, pa bi mogla postojati tražena granična vrijednost (y_0) i biti $y_0 = 2$. Primijetimo da je, za svaki $x \neq 1$, $|f(x) - 2| = \begin{cases} |x - 1|, & x < 1 \\ |-x^2 + 3x - 2|, & x > 1 \end{cases}$. Odaberimo bilo koji $\epsilon > 0$ pa uzmimo neki $\delta > 0$ za koji vrijedi $\delta \leq \frac{\sqrt{4\epsilon+1}-1}{2}$ $(\Rightarrow \delta < \epsilon)$. Sada se lako provjeri da je $|f(x) - 2| < \epsilon$ za svaki $x \in (R \setminus \{1\}) \bigcap \langle 1 - \delta, 1 + \delta\rangle$. Dakle, uistinu je $\lim\limits_{1} f = 2$.



Napomena 3.3.2 Lako se vidi da je $\lim\limits_{x_0} f$ jedinstven čim postoji. Nadalje, primijetimo da točka x_0, u kojoj se promatra granična vrijednost realne funkcije f, ne mora pripadati njezinu definicijskom području X. Ako je $x_0 \in X$ i postoji $\lim\limits_{x_0} f = y_0$, moguće je, naravno, $f(x_0) \neq y_0$ (v. prethodni Primjer 3.3.2).

Sljedeći crteži opisuju nekoliko zanimljivih slučajeva:

[1] Pod *okolinom* točke x u $\mathbb{R}$ smatramo svaki nadskup svakog intervala što sadrži tu točku. Više o tomu i srodnim pojmovima u 5.1.2.



Teoremi što slijede poopćuju Teoreme 3.2.7, 3.2.8 i 3.2.9, a i dokazuju se na sličan način.

Teorem 3.3.1 *Neka su $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcije s ovim svojstvima:*
(1) $\lim\limits_{x_0} f = y_0 = \lim\limits_{x_0} g$;
(2) $(\exists \delta > 0)(\forall x \in (X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle)\ f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
Tada i funkcija h ima limes u točki x_0 i $h = \lim\limits_{x_0} y_0$.

Teorem 3.3.2 *Neka funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, imaju granične vrijednosti u točki x_0 (kad $x \to -\infty$, $x \to +\infty$). Tada je*

(i) $\lim\limits_{x_0}(f \pm g) = \lim\limits_{x_0} f \pm \lim\limits_{x_0} g \quad (\lim\limits_{\pm\infty}(f \pm g) = \lim\limits_{\pm\infty} f \pm \lim\limits_{\pm\infty} g)$;

(ii) $\lim\limits_{x_0}(f \cdot g) = \lim\limits_{x_0} f \cdot \lim\limits_{x_0} g \quad (\lim\limits_{\pm\infty}(f \cdot g) = \lim\limits_{\pm\infty} f \cdot \lim\limits_{\pm\infty} g)$;

(iii) $\lim\limits_{x_0}(\frac{f}{g}) = \frac{\lim\limits_{x_0} f}{\lim\limits_{x_0} g},\ \lim\limits_{x_0} g \neq 0 \quad (\lim\limits_{\pm\infty}(\frac{f}{g}) = \frac{\lim\limits_{\pm\infty} f}{\lim\limits_{\pm\infty} g},\ \lim\limits_{\pm\infty} g \neq 0)$;

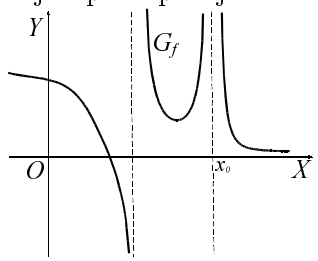
(iv) $\lim\limits_{x_0}(f^g) = (\lim\limits_{x_0} f)^{\lim\limits_{x_0} g},\ f > c_0 \quad \lim\limits_{x_0} f > 0$
$(\lim\limits_{\pm\infty}(f^g) = (\lim\limits_{\pm\infty} f)^{\lim\limits_{\pm\infty} g},\ \lim\limits_{\pm\infty} f > 0)$.

Primjer 3.3.3 Promatrajmo funkcije $f, g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{\sin 2x}{x}$. Kad se varijabla x približuje $x_0 = 0$ obje funkcijske vrijednosti teže k formalnom izrazu "$\frac{0}{0}$". Stoga ima smisla istražiti možebitnu obstojnost pripadnih graničnih vrijednosti. Budući da je f i g parne funkcije, dostatno je promatrati $x > 0$ blizu 0. Za takve x je, po definiciji trigonometrijskih funkcija (v. §3.1.3(v)), $0 < \sin x < x < \tan x$, odnosno, $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, tj. $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Budući da je $\lim\limits_{0} \cos = 1$ $(= \cos 0)$, to po Teoremu 3.3.1 dobivamo $\lim\limits_{0} f \equiv \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Da bismo istražili isto za g, sjetimo se da je $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ pa primijenimo dobiveno i Teorem 3.3.2. Dakle, $\lim\limits_{0} g \equiv \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcija i neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ točka sa svojstvom iz Definicije 3.3.2. Ako vrijedi

$$(\forall y > 0)(\exists \delta > 0)\ f[(X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle] \subseteq \langle y, \cdot\rangle$$
$$((\forall y < 0)(\exists \delta > 0)\ f[(X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle] \subseteq \langle \cdot, y\rangle),$$

onda kažemo da funkcija f **divergira u točki** x_0 **prema** $+\infty$ $(-\infty)$ i pišemo $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ $(\lim\limits_{x_0} f = -\infty)$. (Ovi "limesi" *ne* postoje u $\mathbb{R}$!) Crtež dolje prikazuje tipični primjer.



Primjer 3.3.4 Promatrajmo logaritamsku funkciju $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (v. §3.1.3(iv)) i točku $x_0 = 0$. Funkcija $\log_a$ je inverzna funkcija eksponencijalne funkcijje $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \subset R$ (v. §3.1.3(iii)). Obje su strogo silazne kad je $(0 <)\ a < 1$, a strogo uzlazne kad je $a > 1$. Zato je $\log_a x > y \Leftrightarrow x < a^y$, $a < 1$ $(\log_a x < y \Leftrightarrow x < a^y,\ a > 1)$. Prema tomu, koliko god velik bio $|y|$, može se naći $\delta > 0$, npr. $\delta = a^y$, takav da bude $f[\langle 0, \delta\rangle] \subseteq \langle y, \cdot\rangle$, $a < 1$ $(f[\langle 0, \delta\rangle] \subseteq \langle \cdot, y\rangle, a > 1)$. Dakle, $\lim\limits_0 \log_a = +\infty$ čim je $a < 1$ i $\lim\limits_0 \log_a = -\infty$ čim je $a > 1$.

Za danu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, mogu se pored $\lim\limits_{x_0} f$ promatrati i tzv. limesi slijeva i zdesna u točki x_0. Točna definicija jest kako slijedi: Reći ćemo da je $y_0 \in \mathbb{R}$ **granična vrijednost slijeva** (**zdesna**) funkcije f **u točki** $x_0 \in \mathbb{R}$, ako

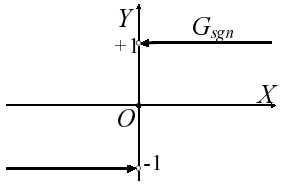
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0\rangle)$$
$$((\forall x \in X \bigcap \langle x_0, x_0 + \delta\rangle))\ |f(x) - y_0| < \epsilon.$$

To kraće zapisujemo kao $\lim\limits_{x_0 - 0} f = y_0$ $(\lim\limits_{x_0 + 0} f = y_0)$. Za ilustraciju je dobro pogledati slučaj na crtežu (f), gdje je $\lim\limits_{x_0 - 0} f = f(x_0)$ dok limes zdesna u x_0 ne postoji ((b), gdje je limes slijeva u x_0 ne postoji (u $\mathbb{R}$) dok je $\lim\limits_{x_0 + 0} f = y_0$).

Po sličnosti s prije definiranim "divergiranjem", mogu se sada formalno definirati i (u $\mathbb{R}$ nepostojeći) "limesi"

$$\lim_{x_0 - 0} f = -\infty \text{ i } \lim_{x_0 - 0} f = +\infty\ (\lim_{x_0 + 0} f = -\infty \text{ i } \lim_{x_0 + 0} f = +\infty).$$

Primjer 3.3.5 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Odredit ćemo joj granične vrijednosti slijeva i zdesna u točki $x_0 = 0$. $\lim\limits_{0-0} f = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{-x} = -1$, $\lim\limits_{0+0} f = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$. (Primijetimo da je, zapravo, $f(x) = -1$ za $x < 0$, a $f(x) = 1$ za $x > 0$, tj. f je tzv. funkcija signum (predznak), $f \equiv \operatorname{sgn}$; v. graf na crtežu.)



Vezu između granične vrijednosti i onih slijeva i zdesna donosi ovaj teorem:

Teorem 3.3.3 *Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ima granične vrijednosti slijeva i zdesna u točki x_0. Ako su one jednake onda postoji i granična vrijednost od f u x_0 i vrijedi $\lim\limits_{x_0-0} f = \lim\limits_{x_0+0} f = \lim\limits_{x_0} f$.*

Dokaz. Tvrdnja je izravna posljedica odgovarajućih definicija. ■

Primijetimo da može postojati $\lim\limits_{x_0} f$ i kad $\lim\limits_{x_0-0} f$ ili $\lim\limits_{x_0+0} f$ ne postoje, tj. nemaju smisla (ovisno o definicijskomu području X).

Da se granična vrijednost realne funkcije može svesti na graničnu vrijednost realnog niza, te time znatno olakšati njezino određivanje, potvrđuje ovaj teorem:

Teorem 3.3.4 *Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, vrijedi*

$\lim\limits_{x_0(x\to\pm\infty)} f = y_0(\pm\infty)$ (svaka od $3^2 = 9$ varijacija je apriori moguća)

onda i samo onda ako, za svaki niz (x_n) u $X \setminus \{x_0\}$ (u X),

$\lim(x_n) = x_0(\pm\infty) \Rightarrow \lim(f(x_n)) = y_0(\pm\infty)$ ($3 \cdot 3 = 9$ mogućnosti).

Dokaz. Dokazt ćemo tvrdnju u slučaju x_0 i y_0. Preostale se dokazuju analogno. Neka je, dakle, $\lim\limits_{x_0} f = y_0$ pa promatrajmo bilo koji niz (x_n) u $X \setminus \{x_0\}$ što konvergira prema x_0. (Primijetimo da, po Definiciji 3.3.2, takav niz postoji!) Trebamo dokazati da niz $(f(x_n))$ konvergira prema y_0, tj. da $(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - y_0| < \epsilon$. Budući da je $\lim\limits_{x_0} f = y_0$, to za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - y_0| < \epsilon$ čim je $|x - x_0| < \delta$, $x \in X \setminus \{x_0\}$. Zbog $\lim(x_n) = x_0$ postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - x_0| < \delta$ čim je $n \geq n_0$. To zajedno povlači da je $|f(x_n) - y_0| < \epsilon$ čim je $n \geq n_0$, tj. $\lim(f(x_n)) = y_0$. Obratno, neka za svaki niz (x_n) u $X \setminus \{x_0\}$ koji konvergira prema x_0, odgovarajući niz $(f(x_n))$ konvergira prema y_0. Trebamo dokazati da je tada y_0 granična vrijednost od f u točki x_0, tj. da $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle)\ |f(x) - y_0| < \epsilon$. Pretpostavimo protivno, tj. da $(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in X \setminus \{x_0\})\ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - y_0| \geq \epsilon$. Uzimajući, za svaki $n \in \mathbb{N}$, broj $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, dobivamo niz (x_n) u $X \setminus \{x_0\}$ za koji vrijedi $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon$. To znači da (x_n) konvergira prema x_0 i da $(f(x_n))$ ne konvergira prema y_0 - protuslovlje. ■

Primjer 3.3.6 Služeći se Teoremom 3.3.4 odredimo sljedeće granične vrijednosti:

(a) $\lim\limits_{-2} \frac{-x^2+4}{x+2}$; (b) $\lim\limits_{\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x})$; (c) $\lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

(a) Odaberimo bilo koji niz (x_n) u $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ koji konvergira prema -2. Tada je $\lim(\frac{-x_n^2+4}{x_n+2}) = \lim(\frac{(2-x_n)(2+x_n)}{x_n+2}) = \lim(2-x_n) = \lim(2) - \lim(x_n) = 2-(-2) = 4$. Dakle, $\lim\limits_{-2} \frac{-x^2+4}{x+2} = 4$.

(b) Odaberimo bilo koji niz (x_n) u $\mathbb{R}\backslash\langle -4, 0\rangle$ koji divergira prema $-\infty$ $(+\infty)$. Tada postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n < 0$ $(x_n > 0)$ čim je $n \geq n_0$. Sjetimo se da je $\sqrt{a} = -\sqrt{at^2}$ čim je $t < 0$ $(t\sqrt{a} = \sqrt{at^2}$ čim je $t > 0)$. Prema tomu, u slučaju $\lim(x_n) = -\infty$ je

$$\lim(\sqrt{x_n^2+1}-\sqrt{x_n^2+4x_n}) = \lim(\frac{1-4x_n}{\sqrt{x_n^2+1}+\sqrt{x_n^2+4x_n}}) =$$

$$\lim(\frac{\frac{1}{x_n}-4}{-\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}}-\sqrt{1+\frac{4}{x_n}}}) = \frac{-4}{-1-1} = 2,$$

dok za $\lim(x_n) = +\infty$ dobivamo

$$\lim(\sqrt{x_n^2+1}-\sqrt{x_n^2+4x_n}) = \lim(\frac{1-4x_n}{\sqrt{x_n^2+1}+\sqrt{x_n^2+4x_n}}) =$$

$$\lim(\frac{\frac{1}{x_n}-4}{\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x_n}}}) = \frac{-4}{1+1} = -2.$$

Dakle, $\lim\limits_{-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x}) = 2$, a $\lim\limits_{+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x}) = -2$.

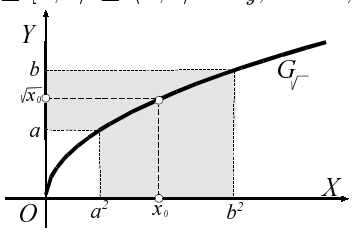
(c) Ovdje ćemo upotrijebiti sljedeću činjenicu (neka ju čitatelj sam dokaže!): Ako u Teoremu 3.3.4 za funkciju f postoji broj a takav da je suženje $f\mid_{X\cap\langle\cdot,a]}$ $(f\mid_{X\cap[a,\cdot\rangle})$ monotona funkcija, onda se uvjet "ako za svaki niz (x_n) u X, $(x_n) \to -\infty$ $((x_n) \to +\infty)$" smije oslabiti do "ako za niz $(-n)$ u $(-\mathbb{N})\bigcap(X\bigcap\langle\cdot,a])$ $((n)$ u $\mathbb{N}\bigcap(X\bigcap[a,\cdot\rangle))$". Budući da je funkcija $x \mapsto (x+\frac{1}{x})^x$, $x > 0$, uzlazna i budući da tražimo njezin limes kad $x \to +\infty$, dostatno je uporabiti niz (n), $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim(1+\frac{1}{n})^n = e$ (v. Primjer 3.2.7).

3.3.3 Neprekidnost

Definicija 3.3.3 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, **neprekidna u točki** $x_0 \in X$, ako za svaki interval I_y što sadrži točku $f(x_0)$ postoji interval I_x što sadrži točku x_0 tako da bude $f[X\bigcap I_x] \subseteq I_y$. Reći ćemo da je funkcija f **neprekidna na skupu** $A \subseteq X$ čim je neprekidna u svakoj točki $x \in A$. U slučaju $A = X$ kažemo da je f **neprekidna** funkcija ili da je **preslikavanje**. Ako funkcija f nije neprekidna (u točki x_0), kažemo da je **prekidna** (**u točki** x_0).*

Primjer 3.3.7 Pokažimo da je opća potencija $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+\bigcup\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} \equiv x^{\frac{1}{2}}$ (drugi korijen, v. §3.1.3(ii)), neprekidna funkcija. Promatrajmo bilo koju točku $x \geq 0$. Neka je $I_y \equiv \langle a, b\rangle$ bilo koji interval što sadrži točku $\sqrt{x}$ (v. graf na crtežu dolje). Budući da je $\sqrt{\cdot}$ strogo uzlazna funkcija,

to za traženi interval I_x, što sadrži točku x, smijemo uzeti $\langle a^2, b^2\rangle$ čim je $a \geq 0$, odnosno, $\langle -a^2, b^2\rangle$ čim je $a < 0$. Zaista, tada je $(\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\} \equiv [0,\cdot\rangle)$ $\sqrt{\cdot}[[0,\cdot\rangle \bigcap I_x] = \sqrt{\cdot}[\langle a^2, b^2\rangle] \subseteq \langle a, b\rangle = I_y$, $a \geq 0$; $\sqrt{\cdot}[[0,\cdot\rangle \bigcap I_x] = \sqrt{\cdot}[[0, b^2\rangle] \subseteq [0, b\rangle \subseteq \langle a, b\rangle = I_y$, $a < 0$;



Očito je da se Definicija 3.3.3 u metričkim terminima može iskazati ovako:

Teorem 3.3.5 *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je neprekidna u točki $x_0 \in X$ onda i samo onda, ako vrijedi:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Sada po Teoremu 3.3.5 i Definiciji 3.3.3 dobivamo izravnu vezu između neprekidnosti i granične vrijednosti u točki:

Teorem 3.3.6 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcija, a $x_0 \in X$ neka je točka kojoj svaka okolina siječe $X \setminus \{x_0\}$. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako postoji $\lim\limits_{x_0} f$ i $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$.*

Korolar 3.3.1 *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je neprekidna u točki $x_0 \in X$ onda i samo onda, ako za svaki niz (x_n) u X koji konvergira prema x_0, odgovarajući niz $(f(x_n))$ konvergira prema $f(x_0)$.*

Dokaz. Ako svaka okolina od x_0 siječe skup $X \setminus \{x_0\}$, tvrdnja slijedi izravno iz Teorema 3.3.6 i Teorema 3.3.4. Ako pak nije takav slučaj, onda svaki niz (x_n), koji konvergira prema x_0, mora biti stacionaran s članovima $x_n = x_0$ za $n \geq n_0$, pa je tvrdnja očigledno istinita. ■

Korolar 3.3.2 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, strogo monotono preslikavanje. Tada je i njezina "inverzna" funkcija $f^{-1} : f[X] \to \mathbb{R}$ strogo monotono preslikavanje.*

Dokaz. Ovaj korolar slijedi iz Korolara 3.3.1 i Teorema 3.2.6. Pokažimo to pobliže! Najprije, lako se vidi da stroga monotonost povlači injektivnost, pa postoji "inverzna" funkcija $f^{-1} : f[X] \to \mathbb{R}$ koja je, također, strogo monotona. Dokažimo da je funkcija f^{-1} neprekidna! Neka je $y \in f[X]$ bilo koja točka. Ako postoji interval $\langle c, d\rangle$ takav da je $f[X] \bigcap \langle c, d\rangle = \{y\}$, onda je očito da je f^{-1} neprekidna u točki y. Ako nije takav slučaj, tj. ako svaka okolina od y siječe skup $f[X] \setminus \{y\}$, onda mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

(1) $(\exists\delta > 0)(\forall\delta', 0 < \delta' \leq \delta)$ $\langle y-\delta', y+\delta'\rangle \bigcap f[X] = \langle y-\delta', y] \bigcap f[X] \supsetneqq \{y\}$;
(2) $(\exists\delta > 0)(\forall\delta', 0 < \delta' \leq \delta)$ $\langle y-\delta', y+\delta'\rangle \bigcap f[X] = [y, y+\delta'\rangle \bigcap f[X] \supsetneqq \{y\}$;
(3) $(\forall\delta > 0)$ $\langle y-\delta, y\rangle \bigcap f[X] \neq \emptyset \neq \langle y, y+\delta\rangle \bigcap f[X]$.

Ad (1). Neka je (y_n) bilo koji niz u $f[X]$ koji konvergira prema y, $\lim(y_n) = y$. Ne smanjujući općenitost, smijemo pretpostaviti da je niz (y_n) uzlazan. Primijetimo da je $y = f(x)$ i $y_n = f(x_n)$ za neke $x, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Budući da je f injekcija, to je $x = f^{-1}(y)$ i $x_n = f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je (x_n) monotoni niz u X, koji je k tomu i omeđen (npr. s x_1 i x). Po Teoremu 3.2.6, niz (x_n) konvergira. Jasno je da u ovomu slučaju mora biti $\lim(x_n) \leq x$ čim je niz (x_n) uzlazan, odnosno, $\lim(x_n) \geq x$ čim je niz (x_n) silazan. Budući da je funkcija f neprekidna, po Korolaru 3.3.1 slijedi:

$f(\lim(x_n)) = \lim(f(x_n)) = \lim(y_n) = y = f(x)$.

Sada, po injektivnosti, mora biti $\lim(x_n) = x$. Napokon,

$f^{-1}(\lim(y_n)) = f^{-1}(y) = x = \lim(x_n) = \lim(f^{-1}(y_n))$,

pa po Korolaru 3.3.1 zaključujemo da je funkcija f^{-1} neprekidna u točki y.

Ad (2). Dokazuje se posve slično prethodnomu slučaju (1).

Ad (3). U ovomu slučaju treba promatrani niz (y_n) u $f[X]$ koji konvergira prema y, $\lim(y_n) = y$, raščlaniti (kad god je to moguće) na dva komplementarna podniza: $(y_{n_k}) \to y$, $y_{n_k} < y$, i $(y_{m_k}) \to y$, $y_{m_k} > y$ (barem jedan od njih postoji). Dalje se postupa kao slučaju (1), odnosno, (2). ■

Neprekidnost realnih funkcija što ih ovdje proučavamo može se opisati i pomoću tzv. prirasta. Štoviše, pripadna računska tehnika je vrlo pogodna za suptilniju analizu u tzv. infinitezimalnom računu što predstoji.

Neka su dane funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, i točka $x_0 \in X$. Za svaku točku $x \in X$, razliku $x - x_0 = \Delta_{x_0} x \equiv \Delta x$ nazivamo **varijablinim prirastom u točki** x_0, a razliku $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (\Delta_{x_0} f)(x) \equiv \Delta f(x_0)(x)$ - **funkcijskim prirastom u točki** x_0. (U drugomu se, zapravo, radi o *funkcijinu prirastu u točki* $x = x_0 + \Delta x$ *s obzirom na točku* x_0, pa se navedeni naziv ne smije shvatiti doslovno!) Primijetimo da se, za čvrsti x_0, $\Delta f(x_0)$ može smatrati kako funkcijom varijable x, tako i funkcijom varijable Δx (imajući na umu činjenicu da se pritom radi o dvjema različitim domenama). Pritom ćemo, kad god ne bude moglo doći do zabune, tj. kad god bude jasno o kojoj se točki x_0 radi, skraćivati zapis $\Delta f(x_0)(x)$ u $\Delta f(x)$ ili u $\Delta f(\Delta x)$ već prema tomu kako nam bude korisnije gledati na funkciju $\Delta f(x_0)$.

Teorem 3.3.7 *Neka je* $f : X \to \mathbb{R}$ *funkcija, a* $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ *točka kojoj svaka okolina siječe skup* $X \setminus \{x_0\}$. *Tada je* f *neprekidna u točki* x_0, *ako i samo ako je* $\lim\limits_{0} \Delta f = 0$. (*Ovdje, dakako,* $\lim\limits_{0} \Delta f$ *označuje* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(\Delta x) = \lim\limits_{x \to x_0} \Delta f(x)$!).

Dokaz. Neprekidnost od f u točki x_0 je, po Teoremu 3.3.6, ekvivalentna jednakosti $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$. Ova je, po prethodnomu razmatranju, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$, ekvivalentna jednakosti $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$. Budući da je $f(x_0)$ konstanta, to se smije zapisati i kao $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)) = 0$, tj. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x) \equiv \lim\limits_{0}\Delta f = 0$. ■

Napomena 3.3.3 ***Napomena 3.3.4*** Pomoću Korolara 3.3.1 i 3.3.2 i Teorema 3.3.7 lako se dokaže da su sve osnovne elementarne funkcije neprekidne, tj. da su preslikavanja.

Teorem 3.3.8 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki x_0, a funkcija $g : Y \to \mathbb{R}$, $f[X] \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki $y_0 = f(x_0)$. Tada je u točki x_0 neprekidna i kompozicija $gf : X \to \mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je dan bilo koji $\epsilon > 0$. Budući da je g neprekidna u y_0, to postoji neki $\delta > 0$ takav da je $|g(y)-g(y_0)| < \epsilon$ čim je $|y-y_0| < \delta$. Po neprekidnosti od f u x_0 postoji neki $\delta' > 0$ za koji je $|f(x)-f(x_0)| = |y-y_0| < \delta$ čim je $|x-x_0| < \delta'$. Prema tomu, $|gf(x)-gf(x_0)| = |g(y)-g(y_0)| < \epsilon$ čim je $|x-x_0| < \delta'$. (Napomenimo da, strogo govoreći, pod ovdje navedenim pretpostavkama kompozicija gf "ne" postoji. Ovdje se, zapravo, radi o kompoziciji $X \to f[X] \hookrightarrow Y \to \mathbb{R}$, pri čemu je $f[X] \hookrightarrow Y$ inkluzija $f(x) \mapsto i(f(x)) = f(x)$. Dakle, funkciju f smo interpretirali kao funkciju $if : X \to Y$.) ■

Pored upravo dokazanoga, vrlo je važan i sljedeći teorem (kojega ćemo u potpunosti dokazati tek u Matematičkoj analizi, III):

Teorem 3.3.9 *Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidne u točki x_0 (na skupu $A \subseteq X$). Tada su u točki x_0 (na skupu A) neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i, kad je $g(x_0) \neq 0$ ($g(x) \neq 0$ za svaki $x \in A$), $\dfrac{f}{g}$.*

Za određivanje granične vrijednosti kompozicijske funkcije često rabimo ovaj teorem:

Teorem 3.3.10 *Neka su funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, i $g : Y \to \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, takve da je $f[X] \subseteq Y$. Ako je $\lim\limits_{x_0} f = y_0 \in Y$ i g neprekidna u y_0, onda je $\lim\limits_{x_0} gf = g(\lim\limits_{x_0} f) = g(y_0)$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ pravilom

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}.$$

Po Teoremu 3.3.6 je funkcija $\tilde{f}$ neprekidna u točki x_0, a po Teoremu 3.3.9 je i kompozicija $g\tilde{f}$ neprekidna u x_0. Po definiciji je $(g\tilde{f})|_{(X\setminus\{x_0\})} = (gf)|_{(X\setminus\{x_0\})}$ i $g\tilde{f}(x_0) = g(y_0)$. Sada tvrdnja vrijedi po Teoremu 3.3.6. ■

Primjer 3.3.8 Odredimo graničnu vrijednost realne funkcije $x \mapsto \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ u točki $x_0 = 0$. Primijenit ćemo Teorem 3.3.10 i činjenicu da se x $(\frac{1}{x})$ kad $x \to 0$ ponaša isto kao $\frac{1}{x}$ (x) kad $x \to \pm\infty$. Budući da je $\lim\limits_{-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ (v. Primjer 3.2.6(c) i §3.2.7, Zadatak 2.(a) i (b)), to je $\lim\limits_{0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln((\lim\limits_{0} 1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln((\lim\limits_{0} 1+\frac{1}{x})^x) = \ln e = 1$.

Praktičnih potreba radi, korisno je razvrstati raznovrsne "prekide u točki" realnih funkcija služeći se graničnim vrijednostima. Po Teoremima 3.3.6 i 3.3.3 smijemo reći da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki x_0, u kojoj limesi slijeva i zdesna imaju smisla, točno onda kad je udovoljeno ovim uvjetima:

(i) $\exists \lim\limits_{x_0-0} f \wedge \exists \lim\limits_{x_0+0} f$;

(ii) $\lim\limits_{x_0-0} f = \lim\limits_{x_0+0} f \quad (= \lim\limits_{x_0} f$; v. Teorem 3.3.3);

(iii) $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$.

Prema tomu, ako u promatranom slučaju nije udovoljeno barem jednom od uvjeta (i), (ii) ili (iii), funkcija f je prekidna u točki x_0. Ako f udovoljava uvjetima (i) i (ii), ali ne uvjetu (iii), kažemo da funkcija f ima u točki x_0 **uklonjiv prekid**. Ako vrijedi samo uvjet (i), govorimo o **prekidu prve vrste**, a ako ne vrijedi uvjet (i) - o **prekidu druge vrste** u točki x_0.

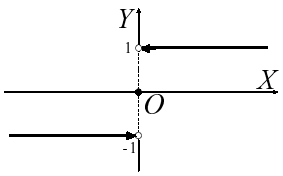
Primjer 3.3.9 (a) Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{x}{|x|}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Funkcija f ima u točki $x_0 = 0$ uklonjiv prekid, jer je $\lim\limits_{0-0} f = 1 = \lim\limits_{0+0} f = \lim\limits_{0} f \neq f(0) = 0$. Primijetimo da je $f(x) = 1$ za svaki $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Moći "ukloniti prekid" funkciji f u točki $x_0 = 0$ znači moći definirati neprekidnu funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ \lim\limits_{0} f = 1, & x = 0 \end{cases}$.

(b) Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom

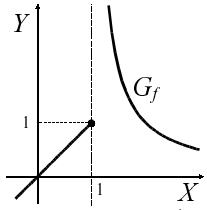
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$



Funkcija f ima u točki $x_0 = 0$ prekid prve vrste (v. crtkani "dodatak" grafu na crtežu gore), jer je $\lim\limits_{0-0} f = -1 \neq 1 = \lim\limits_{0+0} f$.

(c) Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom

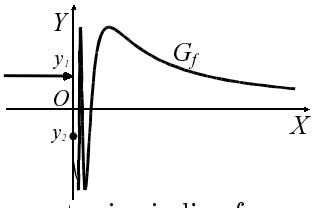
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}.$$



Funkcija f ima u točki $x_0 = 1$ prekid druge vrste (v. graf), jer je $\lim\limits_{1-0} f = 1$, dok je $\lim\limits_{1+0} f = +\infty$ (ne postoji).

(d) Promatrajmo funkciju

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} y_1, & x < 0 \\ y_2, & x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



Funkcija f ima u točki $x_0 = 0$ prekid druge vrste, jer je $\lim\limits_{0-0} f = y_1$, dok $\lim\limits_{0+0} f$ ne postoji. (Ništa bitno se ne mijenja ni kad je $\lim\limits_{0-0} f = y_1 = y_2 = f(0) \in [-1, 1]$!)

Napomena 3.3.5 Primijetimo da čim funkcijama iz Primjera 3.3.9 iz definicijskih područja izbacimo "loše" točke x_0, dobivamo suženja koja su neprekidne funkcije. To je posljedica činjenice da su ti primjeri konstruirani pomoću elementarnih funkcija, koje su sve neprekidne (v. Napomenu 3.3.3 i Teoreme T.3.3.8 i 3.3.9).

3.3.4 Svojstva neprekidne funkcije na segmentu

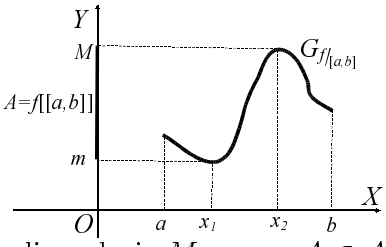
U ovomu pododjeljku ćemo iskazati i dokazati najvažnija svojstva realnih preslikavanja. Posebno važni rezultati se dobivaju suženjem realnog preslikavanja na domenu koja je segment.

Teorem 3.3.11 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$. Tada je njezino suženje $f|_{[a,b]}$ omeđena funkcija, tj. postoje neki $c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $f[[a, b]] \subseteq [c, d]$.*

Dokaz. Dokažimo da je funkcija $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena odozgor! Pretpostavimo protivno, tj. $f|_{[a,b]}$ nije omeđena odozgor. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji neki $x_n \in [a, b]$ takav da je $f(x_n) > n$. Po Korolaru 3.2.2, dobiveni niz (x_n) ima konvergentni podniz (x_{n_k}). Neka je $\lim(x_{n_k}) = x_0 \in [a, b]$ (v. Teorem 3.2.6 i Tvrdnju 1.2.2). Po Korolaru 3.3.1 mora biti $\lim(f(x_{n_k})) = f(x_0)$ pa je niz $(f(x_{n_k}))$ omeđen (v. Teorem 3.2.3), a to protuslovi pretpostavci $f(x_{n_k}) > n_k$. Dakle, suženje $f|_{[a,b]}$ jest odozgor omeđena funkcija. Na posve sličan način se dokaže da je $f|_{[a,b]}$ i odozdol omeđena funkcija. ■

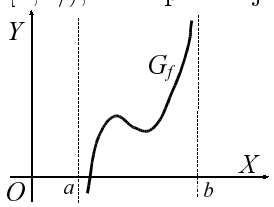
Teorem 3.3.12 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq X$. Tada njezino suženje $f|_{[a,b]}$ poprima svoju svoju najmanju vrijednost (**minimum**) i svoju najveću vrijednost (**maksimum**), tj.* $(\exists x_1, x_2 \in [a,b])(\forall x \in [a,b]) \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Dokaz. Po Teoremu 3.3.11 je skup $A \equiv f[[a,b]] = \{f(x) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}$ omeđen. Po Teoremu 1.4.7, postoje $m \equiv \inf A, M \equiv \sup A \in \mathbb{R}$. (v. crtež)



Tvrdimo da je $M = \max A \in A$ ($m = \min A \in A$) pa će to biti i tražena najveća (najmanja) vrijednost od f na $[a,b]$! U tu svrhu, odaberimo bilo koji niz (y_n) u A što konvergira prema $\sup A = M$. (Lako se vidi takav niz postoji!) Neka je (x_n) bilo koji pripadni niz u $[a,b]$ u smislu $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Po Korolaru 3.2.2, Teoremu 3.2.6 i Tvrdnji 1.2.2, postoji konvergentni podniz (x_{n_k}) od (x_n) s limesom $\lim(x_{n_k}) \equiv x_0 \in [a,b]$. Po Korolaru 3.3.1 mora biti $\lim(f(x_{n_k})) = f(x_0)$, a po Korolaru 3.2.1, $\lim(y_n) = \lim(y_{n_k}) = \lim(f(y_{n_k}))$. Slijedi da je $M = f(x_0) \in A$, što smo i tvrdili. Posve slično se dokazuje da je $m = \min A \in A$. Sada za $m, M \in A$ postoje neki $x_1, x_2 \in [a,b]$ za koje je $f(x_1) = m$ i $f(x_2) = M$. Budući da je, za svaki $x \in [a,b]$, $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, to je m minimum, postignut u točki x_1, a M maksimum, postignut u točki x_2, funkcije f na $[a,b]$. ■

Napomena 3.3.6 Pretpostavku o preslikavanju na *segmentu* u Teoremima 3.3.11. i 3.3.12 nije moguće zamijeniti preslikavanjem na intervalu $\langle a,b\rangle$, (ni na $\langle a,b]$ ili $[a,b\rangle$), kako pokazuje primjer na crtežu.



Teorem 3.3.13 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna i uzlazna, a $A \subseteq X$ neprazan i odozdol (odozgor) omeđen podskup sa svojstvom $\inf A \in X$ ($\sup A \in X$). Tada je i $f[A] \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i odozdol (odozgor) omeđen skup i pritom vrijedi*

$$f(\inf A) = \inf f[A] \quad (f(\sup A) = \sup f[A]).$$

Za silazno preslikavanje f vrijedi dualna tvrdnja:

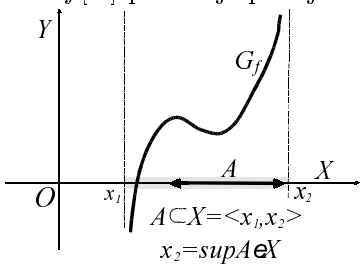
$$f(\inf A) = \sup f[A] \quad (f(\sup A) = \inf f[A]).$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati jednu (bilo koju) od četiri mogućnosti. Pa, neka je f uzlazno prelikavanje i neka je $\emptyset \neq A \subseteq X$ omeđen odozdol i

$\inf A \equiv x_0 \in X$. Tada je, za svaki $a \in A$, $x_0 \leq a$. Budući da je funkcija f uzlazna, to je $f(x_0) \leq f(a)$ za svaki $a \in A$ pa je $f(x_0)$ donja međa skupa skupa $f[A] \subseteq \mathbb{R}$. Prema tomu, skup $f[A]$ je neprazan i omeđen odozdol pa ima infimum $\inf f[A] \equiv y_0 \in \mathbb{R}$ (v. Teorem 1.4.7) i pritom je $f(x_0) \leq y_0$. Preostaje dokazati $f(x_0) = y_0$. Kad tako ne bi bilo, bilo bi $f(x_0) < y_0$. Uzmimo tada $\epsilon = y_0 - f(x_0) > 0$ i primijetimo da $y_0 \notin \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$. Po neprekidnosti od f u x_0, postoji neki $\delta > 0$ za koji je $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$ čim je $x \in X \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Budući da je $x_0 = \inf A$, to postoji neki $a \in A \bigcap [x_0, x_0 + \delta \rangle$. Slijedi $f(a) < f(x_0) + \epsilon = y_0$ pa y_0 ne može biti infimum od $f[A]$ - protuslovlje. ■

Napomena 3.3.7 (a) Teorem 3.3.13 smo, zapravo, već koristili u Primjeru 3.3.7 (b).

(b) Da je pretpostavka $\inf A \in X$ ($\sup A \in X$) nužna za omeđenost funkcijske slike $f[A]$ pokazuje primjer na crtežu.



Teorem 3.3.14 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$. Tada je slika $f[[a, b]] \subseteq \mathbb{R}$ segment (koji u slučaju konstantnog suženja $f|_{[a,b]}$ degenerira u točku).*

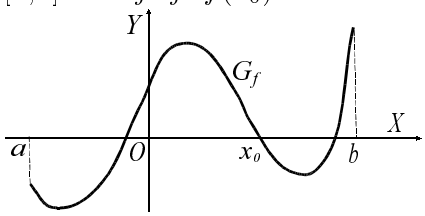
Dokaz. Po Teoremu 3.3.12 postoje $x', x'' \in [a, b]$, $x' \leq x''$, takvi da je, za svaki $x \in [a, b]$, $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ ili $f(x') \geq f(x) \geq f(x'')$. Zanemarujući trivijalni slučaj konstantnog suženja, mora biti $x' < x''$ i $f(x') \neq f(x'')$. Označimo $y' = \min\{f(x'), f(x'')\}$ i $y'' = \max\{f(x'), f(x'')\}$. Treba dokazati $f[[a, b]] = [y', y'']$. Budući da je $f[[a, b]] \subseteq [y', y'']$ i $y', y'' \in f[[a, b]]$ očito ispunjeno, preostaje dokazati $f[[a, b]] \supseteq \langle y', y'' \rangle$. Neka je $y_0 \in \langle y', y'' \rangle$ bilo koja točka. Treba dokazati da postoji točka $x_0 \in [a, b]$ za koju je $f(x_0) = y_0$. Uzmimo $x_1 = \frac{x' + x''}{2}$. Ako je $f(x_1) = y_0$ onda smo gotovi, a ako nije tako onda je ili $f(x_1) < y_0$ ili $f(x_1) > y_0$. Tada promatrajmo onaj "polusegment" $[x_1', x_1'']$ segmenta $[x', x'']$ (tj. $x_1'' - x_1' = \frac{x'' - x'}{2}$) za koji je $f(x_1') < y_0 < f(x_1'')$. Nastavljajući induktivnim postupkom, dobivamo silazni niz $([x_n', x_n''])$ podsegmenata od $[x', x''] \subseteq [a, b]$. Po Cantorovu aksiomu (Teorem 1.4.7), pripadni presjek je neprazan, tj. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n', x_n''] \neq \emptyset$. Štoviše, po konstrukciji (u $(n + 1)$-vom koraku uzimamo *polusegment* iz n-tog koraka) taj presjek jest jedna jedina točka $x_0 \in [x', x'']$ (inače bi bio neki segment - što proturječi konstrukciji). Tvrdimo da je $f(x_0) = y_0$. Naime, kad tako ne bi bilo, bilo bi ili $f(x_0) < y_0$ ili $f(x_0) > y_0$. U slučaju $f(x_0) < y_0$ postojao

bi, po neprekidnosti od f u x_0, neki $\delta > 0$ takav da je i $f(x) < y_0$ čim je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. To bi dalje povlačilo obstojnost nekog $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $f(x_n'') < y_0$ - protuslovlje. Na isti način se pobija pretpostavka $f(x_0) > y_0$. Ovime je teorem dokazan. ■

Neposredne posljedice prethodnoga teorema jesu ova dva važna korolara:

Korolar 3.3.3 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$. Tada $f|_{[a,b]}$ poprima sve vrijednosti između svoga minimuma i svoga maksimuma.*

Korolar 3.3.4 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$ i neka je $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$. Tada postoji barem jedna točka $x_0 \in [a, b]$ za koju je $f(x_0) = 0$.*



Prisjetimo se konvergencije (po točkama) funkcijskog niza i Primjera 3.2.19(b), koji je je pokazao da limes takvoga niza može biti prekidna funkcija iako su mu svi članovi neprekidne funkcije. Prema tomu, konvergencija po točkama, općenito, ne čuva neprekidnost. Sljedeći teorem će pokazati da, naprotiv, jednolika konvergencija čuva neprekidnost.

Teorem 3.3.15 *Neka funkcijski niz (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, jednoliko konvergira prema funkciji $f_0 : X \to \mathbb{R}$. Ako je svaka funkcija f_n, $n \in \mathbb{N}$, neprekidna u točki x_0, onda je i funkcija f_0 neprekidna u točki x_0. Nadalje, ako je svaka funkcija f_n neprekidna na skupu $A \subseteq X$, onda je i funkcija f_0 neprekidna na skupu A.*

Dokaz. Po definiciji jednolike konvergencije $(f_n) \to f_0$, za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|f_n(x) - f_0(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ za svaki $n \geq n_0$ i svaki $x \in X$. Posebice, za $n = n_0$ je $|f_{n_0}(x) - f_0(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ za svaki $x \in X$, a još za $x = x_0$ je $|f_{n_0}(x_0) - f_0(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Funkcija f_{n_0} je neprekidna u točki x_0 pa postoji neki $\delta > 0$ takav da je $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ čim je $x \in X \bigcap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Sve zajedno, dobili smo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $\delta > 0$ takav da je
$|f_0(x) - f_0(x_0)| = |f_0(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f_0(x_0)| \leq$
$|f_0(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_0(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$
čim je $x \in X$ i $|x - x_0| < \delta$, a to upravo znači da je f_0 neprekidna u x_0. ■

Korolar 3.3.5 *Neka je $\sum f_n$ funkcijski red, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, koji jednoliko konvergira prema funkciji $s \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n : X \to \mathbb{R}$. Ako je svaka*

funkcija f_n, $n \in \mathbb{N}$, neprekidna u točki x_0 (na skupu $A \subseteq X$), onda je i funkcija s neprekidna u točki x_0 (na skupu A).

Dokaz. Budući da funkcijski red $\sum f_n$ jednoliko konvergira prema funkciji s, to znači da pripadni funkcijski niz djelomičnih zbrojeva (s_k) jednoliko konvergira prema funkciji s. Svaka funkcija f_n, $n \in \mathbb{N}$, je neprekidna u točki x_0 (na skupu A) pa je i svaka funkcija $s_k = f_1 + \cdots + f_k$, $k \in \mathbb{N}$, neprekidna u x_0 (na A) (v. Teorem 3.3.9). Sada zaključak slijedi po Teoremu 3.3.15. ■

Korolar 3.3.6 *Neka je $\sum a_n x^n$, $n \in \mathbb{N} \bigcap \{0\}$, potencijski red s konvergencijskim polumjerom $\rho > 0$. Tada je njegova suma $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ neprekidna funkcija na intervalu $\langle -\rho, \rho \rangle$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \langle -\rho, \rho \rangle$ bilo koja točka. Tada je $|x_0| < \rho$ pa postoji neki $r \in \langle |x_0|, \rho \rangle$. Slijedi da je $x_0 \in \langle -r, r \rangle \subset \langle -\rho, \rho \rangle$. Po Teoremu 3.2.18, potencijski red $\sum a_n x^n$ jednoliko konvergira na segmentu $[-r, r]$, pa onda i na intervalu $\langle -r, r \rangle$, prema funkciji $s : \langle -\rho, \rho \rangle \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Budući da je svaka funkcija $x \mapsto a_n x^n$, $n \geq 0$ $(a_0 x^0 = a_0)$, neprekidna, po Korolaru 3.3.5 slijedi da je i suženje $s|_{[-r,r]}$ neprekidna funkcija. Posebice je funkcija s neprekidna u točki x_0. ■

U razmatranju o konvergentnosti potencijskog reda $\sum a_n x^n$ (v. §3.2.6) primijetili smo da na rubu $\{-\rho, \rho\}$ njegova konvergencijskog intervala $\langle -\rho, \rho \rangle$ treba možebitnu konvergentnost (divergentnost) posebno istražiti. S tim u svezi navodimo (bez dokaza) ovaj teorem:

Teorem 3.3.16 *Ako potencijski red $\sum a_n x^n$ konvergira i u rubnoj točki $x = -\rho$ $(x = \rho)$, onda on jednoliko konvergira na svakom segmentu $[-\rho, r]$ $([-r, \rho])$, $0 < r < \rho$. Konvergira li $\sum a_n x^n$ u objema rubnim točkama $-\rho$ i ρ, onda on i jednoliko konvergira na segmentu $[-\rho, \rho]$.*

Izravno iz toga teorema i Korolara 3.3.5 slijedi ovaj "Abelov teorem o graničnoj vrijednosti":

Korolar 3.3.7 *Neka je $\rho > 0$ konvergencijski polumjer i $s : \langle -\rho, \rho \rangle \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, suma potencijskoga reda $\sum a_n x^n$. Ako taj red konvergira i u rubnoj točki $x = -\rho$ $(x = \rho)$, onda je $\lim\limits_{-\rho} s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \rho^n$ $(\lim\limits_{\rho} s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n)$, tj. preslikavanje s dopušta neprekidno proširenje na $[-\rho, \rho\rangle$ $(\langle -\rho, \rho])$.*

3.3.5 Vježbe

1. Odrediti sljedeće granične vrijednosti:
(a) $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^r}{e^x}$, $r > 0$; (b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$; (c) $\lim\limits_{+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$; (d) $\lim\limits_{0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;
(e) $\lim\limits_{1}(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x})$; (f) $\lim\limits_{0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; (g) $\lim\limits_{-2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; (h) $\lim\limits_{e} \frac{\ln x-1}{x-e}$.

2. Funkciji $x \mapsto f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2}$ odrediti limese slijeva i zdesna u točki $x = 0$. Može li se odabrati neki $a \in \mathbb{R}$ za koji bi postojao $\lim\limits_{0} f$?

3. Istražiti ponašanje funkcije $x \mapsto f(x) = \arctan(1+\frac{1}{x})$ pri rubnim točkama njezina definicijskog područja $X \subseteq \mathbb{R}$.

4. Dokazati da je funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$, neprekidna.

5. Dokazati da je tzv. *Dirichletova funkcija*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, prekidna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.

6. Postoji li i (ako postoji) koja je to konstanta $a \in \mathbb{R}$ s kojom funkcija
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in \langle \cdot, 0 \rangle \\ a, & x = 0 \\ 1 + x, & x \in \langle 0, \cdot \rangle \end{cases}$, postaje preslikavanjem?

7. Dopušta li funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, neprekidno proširenje na cijeli $\mathbb{R}$?

8. Dopušta li funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$, neprekidno proširenje na cijeli $\mathbb{R}$?

9. Pokazati da funkcijski niz (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx}$, konvergira po točkama prema funkciji $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, te obrazložiti zašto f_0 ima prekid u točki $x = 0$.

10. Zaključiti da potencijski red $\sum a_n x^n$, $a_n = \frac{\ln n}{n}$, konvergira prema *neprekidnoj* funkciji $s : [-1, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$.

Poglavlje 4

INFINITEZIMALNI RAČUN

4.1 DERIVACIJA

Do deriviranja kao nove matematičke tehnike ("omjeri neizmjerno malih promjenjivih veličina") prvi je, koliko se zna, došao I. Newton (prije godine 1669.) rješavajući problem određivanja trenutne brzine neke točke, što se *nejednoliko* giba po pravcu. Do istoga je otkrića nešto poslije došao i G.W. Leibniz rješavajući problem određivanja tangente u bilo kojoj točki neke krivulje. Pokazalo se da deriviranje ima široku i nezaobilaznu primjenu u svim prirodnim i tehničkim znanostima i, dakako, u tehničkoj i tehnološkoj praksi. Ovdje ćemo iskazati točnu definiciju i pokazati primjenu na istraživanje važnih svojstava realnih funkcija jedne realne varijable.

4.1.1 Derivabilnost i njezino značenje

Definicija 4.1.1 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,* ***derivabilna u točki*** *$x_0 \in X$ (ili da* ***ima derivaciju u točki*** *x_0), ako funkcija*

$$\hat{f} : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ima granična vrijednost u točki x_0, tj. ako postoji $\lim\limits_{x_0} \hat{f}$. Drugim riječima, f je derivabilna u x_0 ako postoji

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv f'(x_0), \quad x \in X \setminus \{x_0\}. \tag{1}$$

Broj $f'(x_0)$ nazivamo ***derivacijom*** *funkcije f* ***u točki*** *x_0. Reći ćemo da je funkcija f* ***derivabilna na skupu*** *$A \subseteq X$, ako je f derivabilna u svakoj točki $x \in A$. U slučaju $A = X$ kratko kažemo da je funkcija f* ***derivabilna****. Primijetimo da, za na skupu $A \subseteq X$ derivabilnu funkciju f, postoji funkcija $(f|_A)' : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, koju nazivamo* ***derivacijom*** *funkcije f* ***na skupu*** *A. U slučaju $A = X$ govorimo o* ***derivaciji*** *f' funkcije f. Napokon,*

derivabilnu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ kojoj je derivacija $f' : X \to \mathbb{R}$ preslikavanje (tj. neprekidna) nazivamo ***neprekidno derivabilnom*** *funkcijom.*

Napomena 4.1.1 Za točku $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ se kaže da je **izolirana točka** u skupu X, ako postoji $\epsilon > 0$ takav da je $(X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle = \emptyset$. Primjerice, svaka točka $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ je izolirana u skupu $\mathbb{N}$; u skupu $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ nije izolirana samo točka 0; u intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ nema izoliranih točaka. Primijetimo da je, po samoj definiciji, svaka realna funkcija neprekidna u svakoj izoliranoj točki x_0 svoga definicijskog područja. Derivabilnost, naprotiv, u takvoj izoliranoj točki po definiciji nema smisla. Prema tomu, ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda ta točka nije izolirana u pripadnomu definicijskom području.

Iskoristimo li oznake $x - x_0 = \Delta x$ i $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x) \equiv \Delta y$ (v. §3.3.3), formulu (1) možemo zapisati na još dva načina:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \tag{1'}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1''}$$

Primjer 4.1.1 Ispitajmo derivabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (kvadriranje). Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ bilo koja točka (u $\mathbb{R}$ nema izoliranih točaka). Po $(1')$, primjerice, dobivamo da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Prema tomu, funkcija f je derivabilna u svakoj točki x_0 i $f'(x_0) = 2x_0$. Za $x = 0$ je $f'(0) = 0$, za $x = -1$ je $f'(-1) = -2$ itd. Dobivenu derivaciju zapisujemo kao $(x^2)' = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 4.1.2 (*Newtonov pristup*) Neka je zapisom $s = f(t)$ i uvjetom $f(0) = 0$, pri čemu s označuje prijeđeni put a t vrijeme, dan zakon po kojemu se točka ("tvarna čestica") P giba po pravcu. Neka je pritom $f : [0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Odredimo brzinu $v(t_0)$ točke P u trenutku t_0. Točka P će do trenutka t_0 prevaliti put $s_0 = f(t_0)$, a do trenutka t put $s = f(t)$. Srednja brzina promatrane točke u vremenskomu segmentu $[t_0, t]$ za $t_0 < t$ ($[t, t_0]$ za $t_0 > t$) je, po definiciji,

$$\bar{v}(t) = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t},\ \Delta t = t - t_0,\ \Delta s \equiv \Delta f(t) = f(t) - f(t_0).$$

Ova brzina $\bar{v}(t)$ je to bliža traženoj brzini $v(t_0)$ u trenutku t_0 što je promatrani vremenski segment kraći. Stoga smijemo postulirati da je

$$v(t_0) = \lim_{t_0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

No, to znači da je $v(t_0) = f'(t_0)$, tj. "brzina je derivacija puta po vremenu".

Pozabavimo se sada pobliže "problemom tangente" (*Leibnizov pristup*).

Neka je u ravnini s koordinatnim sustavom $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ dana krivulja $\mathcal{C}$ jednadžbom $y = f(x)$, pri čemu je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Odredimo (algebarski) tangentu t krivulje $\mathcal{C}$ u točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$. Neka je $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, pa je $T = (x, f(x)) \in \mathcal{C}$ i $T \neq T_0$. Točke T_0 i T određuju jedinstvenu sekantu s_T krivulje $\mathcal{C}$ (v. crtež dolje). Njezin smjerovni koeficijent (v. §2.3.1) jest

$k_{s_T} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Pustimo li da se točka T "približuje" po krivulji $\mathcal{C}$ (nepomičnoj) točki T_0, tj. da $x \to x_0$, sekanta s_T će se "približavati" tangenti t. Prema tomu, za smjerovni koeficijent od t mora vrijediti sljedeće:

$k_t = \lim\limits_{T \to T_0} k_{s_T} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$,

tj. "tangentin smjerovni koeficijent jest funkcijina derivacija u promatranoj točki". Slijedom toga, za tangentinu jednadžbu (u točki $T_0 = (x_0, f(x_0)) \in \mathcal{C}$) dobivamo

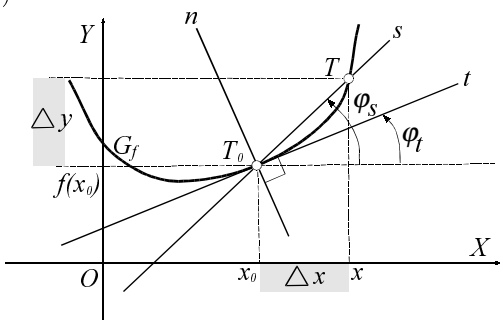
$$t \cdots y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

(Tangenta u T_0 može postojati i kad je $\lim\limits_{x_0} f' = +\infty$ $(-\infty)$, o čemu sad ne ćemo raspravljati (v. pododjeljak 4.1.7, Primjer 4.2.27), i tada joj je jednadžba $x = x_0$.)

Normalom u točki $T_0 = (x_0, f(_0))$ **krivulje** $\mathcal{C}$ nazivamo pravac n kroz točku T_0 okomit na pripadnu tangentu t. Slijedi da je normalina jednadžba

$$n \cdots y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0\ (x = x_0,\ f'(x_0) = 0). \tag{3}$$

(Ako je tangentina jednadžba $x = x_0$ onda je pripadna normalina jednadžba $y = f(x_0)$.)



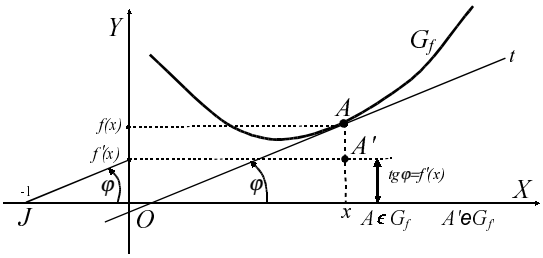
Primjer 4.1.3 Odredimo tangentinu i normalinu jednadžbu u točki $T_0 = (2, y_0)$ parabole $y = x^2$.

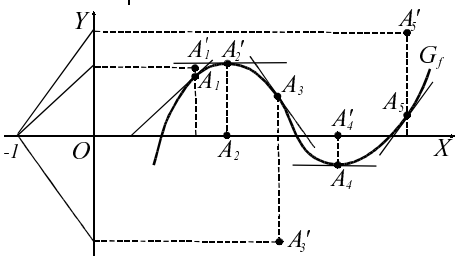
U Primjeru 4.1.1 smo odredili derivaciju f' funkcije $f(x) \equiv y = x^2$ i dobili $f'(x) = 2x$. Uvrštenjem u (2) i (3) dobivamo tražene jednadžbe:

$t \cdots y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, dakle, $y = 4x - 4$;

$n \cdots y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2)$, dakle, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

Geometrijsko značenje derivacije kao tangentina smjerovnog koeficijenta dopušta tzv. "grafičko deriviranje" grafički (grafom G_f) zadane funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, što je prikazano na ovim crtežima:





Teorem 4.1.1 *Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki x_0 onda je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. derivabilnost funkcije f u točki x_0 povlači $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\Delta x = f'(x_0)\cdot 0 = 0$, pa je, po Teoremu 3.3.7, funkcija f neprekidna u točki x_0. ■

Po Teoremu 4.1.1 slijedi da funkcije nema derivacije u točkama u kojima je prekidna. No, derivabilnost je bitno jače svojstvo od neprekidnosti, tj. neprekidnost funkcije f u točki x_0 ne povlači njezinu derivabilna u toj točki (v. Napomenu 4.1.1 i naredni Primjer 4.1.4).

Pomoću limesa slijeva i zdesna (v. §3.3.2) mogu se definirati derivacije slijeva i zdesna:

Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, **u točki** $x_0 \in X$ **derivabilna slijeva** (**zdesna**) ako funkcija

$$\hat{f} : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

ima u točki x_0 granična vrijednost slijeva (zdesna), tj. ako postoji $\lim\limits_{x_0-0}\hat{f}$ ($\lim\limits_{x_0+0}\hat{f}$). Pripadni limes tada nazivamo **derivacijom slijeva** (**zdesna**) funkcije f **u točki** x_0. Očito je da je funkcija f, koja je derivabilna slijeva i zdesna u točki x_0, derivabilna u x_0 ako i samo ako se te derivacije slijeva i zdesna podudaraju. (Taj je broj onda $f'(x_0)$.)

Primjer 4.1.4 Funkcija $x \mapsto f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, (apsolutna vrijednost) je neprekidna. Posebice, ona je neprekidna u točki $x = 0$. Međutim,

$\lim\limits_{x_0-0}\hat{f} = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}(-1) = -1;$

$\lim\limits_{0+0}\hat{f} = \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}(1)=1.$

Prema tomu, funkcija f je u točki $x=0$ derivabilna slijeva i zdesna, ali budući da pripadne derivacije nisu jednake, to f nije derivabilna u $x=0$.

4.1.2 Derivacije elementarnih funkcija

Ovdje ćemo odrediti derivacije nekih (osnovnih) elementarnih funkcija (v. §3.1.3) i izvesti nekoliko osnovnih derivacijskih pravila.

Tvrdnja 4.1.1 *Derivacija konstantne funkcije $c_r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}$, je nulkonstanta c_0, tj.*

$$(\forall r\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})\quad c_r'(x)=0. \tag{4}$$

Dokaz. $\Delta c_r(x)=r-r=0\Rightarrow c_r'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta c_r(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0.$ ■

Tvrdnja 4.1.2 *Derivacija prirodne potencije $x\mapsto x^n$, $n\in\mathbb{N}$, je funkcija $x\mapsto nx^{n-1}$, tj.*

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R})\quad (x^n)'=nx^{n-1}. \tag{5}$$

Dokaz. Po Teoremu 1.4.14 je $\Delta f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n=$
$\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^k-x^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^k=$
$\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^k+nx^{n-1}\cdot\Delta x.$

Stoga je $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}+nx^{n-1})=nx^{n-1}.$
■

Tvrdnja 4.1.3 *Derivacija trigonometrijske funkcije* sin *jest* cos, *a funkcije* cos *jest* $-\sin$, *tj.*

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \sin' x=\cos x; \tag{6}$$
$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \cos' x=-\sin x. \tag{7}$$

Dokaz. $(\Delta\sin)(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\Delta x\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$. Po tomu je (v. i Primjer 3.3.3, Napomenu 3.3.4 i Teorem 3.3.9)
$\sin' x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta\sin)(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=1\cdot\cos x=\cos x.$
Sasvim slično se dokazuje i tvrdnja pod (7). ■

Tvrdnja 4.1.4 *Eksponencijalna funkcija $x\mapsto\exp_a(x)$ ima derivaciju $x\mapsto\exp_a(x)\ln a$, tj.*

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad (a^x)'=a^x\ln a. \tag{8}$$

Posebice je

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad (e^x)'=e^x. \tag{9}$$

Dokaz. Budući da je $\Delta(a^x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, to je $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. Uvrstimo li $a^{\Delta x} - 1 = t$, dobivamo $a^{\Delta x} = t + 1$, $\Delta x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}$ i $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$. Prema tomu (v. Primjer 3.3.6, Teorem 3.3.10), $(a^x)' = a^x \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = a^x \ln a \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = a^x \ln a \frac{1}{\ln e} = a^x \ln a$. ■

Naredni teorem redovito rabimo pri određivanju derivacija većine elementarnih funkcija.

Teorem 4.1.2 (Deriviranje i osnovne računske operacije) *Neka su funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilne (na skupu $A \subseteq X$; u točki $x_0 \in X$). Tada su derivabilne (na A; u x_0) i funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ i vrijedi:*

$$(f+g)' = f' + g'; \tag{10}$$
$$(f-g)' = f' - g'; \tag{11}$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'; \tag{12}$$
$$(c_r \cdot g)' = c_r \cdot g' \quad (f = c_r \text{ - konstantna funkcija}); \tag{13}$$
$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \tag{14}$$

Dokaz. Sve formule (10)-(14) se dokazuju slično. Dokažimo, primjerice, onu posljednju!

$$(\frac{f}{g})'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$
$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}. \quad ■$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $f = c_r$, po (4) i (14) dobivamo

$$(\frac{c_r}{g})' = -\frac{c_r \cdot g'}{g^2}, \quad \text{tj.} \quad (\frac{r}{g(x)})' = -r \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2},$$

a u slučaju $g = c_r$ dobivamo (usp. (13) za $f = c_{\frac{1}{r}}$)

$$(\frac{f}{c_r})' = \frac{f'}{c_r}, \quad \text{tj.} \quad (\frac{f(x)}{r})' = \frac{f'(x)}{r}.$$

Tvrdnja 4.1.5 *Derivacije trigonometrijskih funkcija* tan *i* cot *jesu:*

$$(\forall x \in X_{\tan})\ \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{15}$$
$$(\forall x \in X_{\cot})\ \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{16}$$

Dokaz. $\tan' x = (\frac{\sin}{\cos})'(x) \overset{(14)}{=} \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} \overset{(6),(7)}{=} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Na isti način se dokazuje formula (16). ■

Tvrdnja 4.1.6 *Derivacija negativne cijele potencije $x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, je funkcija $x \mapsto -nx^{-n-1}$, tj.*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \quad (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Dokaz. $(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' \overset{(14)}{=} -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} \overset{(5)}{=} -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. ■

Ponekad je korisno, prije eksplicitnog određivanja derivacije neke funkcije f, formalno izraziti funkcijski prirast $\Delta f(x)$ u točki x_0, $x = x_0 + \Delta x$, pomoću vrijednosti $f'(x_0)$. Pretpostavimo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki x_0. Definirajmo novu funkciju $x - x_0 \mapsto \alpha(x - x_0)$, $x \in X \setminus \{x_0\}$, propisom

$$\alpha(x - x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \text{ tj. } \quad \alpha(\Delta x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x_0).$$

Očito je tada

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x - x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \\ \Delta y \equiv \Delta f(x) = (f'(x_0) + \alpha(\Delta x))\Delta x \end{cases}. \tag{17}$$

Teorem 4.1.3 (Derivacija funkcijske kompozicije) *Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki x_0, a funkcija $g : Y \to \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki $y_0 = f(x_0) \in Y \supseteq f[X]$, onda je i funkcijska kompozicija $gf : X \to \mathbb{R}$, derivabilna u x_0 i pritom je*

$$(gf)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{18}$$

Dokaz. Neka je $x \in X$, $x \neq x_0$, i $\Delta x = x - x_0$. Označimo $y \equiv f(x)$, $\Delta y \equiv f(x) - f(x_0)$, $z \equiv (gf)(x)$, $\Delta z \equiv (gf)(x) - (gf)(x_0)$. Tada je $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, tj. $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$, pa je $z = (gf)(x_0 + \Delta x) - (gf)(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_{0+\Delta y}) - g(y_0)$. Sada je $(gf)'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta x} \overset{(17)}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(g'(y_0) + \alpha(\Delta y))\Delta y = (g'(y_0) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta y)) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(y_0)f'(x_0) + (\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta y))f'(x_0)$.

Budući da je funkcija f neprekidna u točki x_0 (v. Teorem 4.1.1), to $\Delta x \to 0$ povlači $\Delta y \to 0$, pa (17) povlači $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \alpha(\Delta y) = 0$. ■

Primjer 4.1.5 Derivirajmo funkciju $x \mapsto h(x) = \cos(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$. Primijetimo da je $h = gf$, pri čemu je $f = \sin$ i $g = \cos$. Dakle, po (18),

$$h'(x) = \cos'(\sin x) \cdot \sin' x = -\sin(\sin x) \cdot \cos x.$$

Tvrdnja 4.1.7 *Ovo su derivacije hiperbolnih funkcija:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sinh' x = \cosh x \tag{19}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cosh' x = \sinh x \tag{20}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{21}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x} \tag{22}$$

Dokaz. Dokažimo npr. formulu (19)!
$\sinh' x = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' \overset{(13),(11)}{=} \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') \overset{(9),(18)}{=}$
$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$ ■

Teorem 4.1.4 (Derivacija inverzne funkcije) *Neka je injektivna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki x_0 i $f'(x_0) \neq 0$. Ako je pripadna "inverzna" funkcija $f^{-1} : f[X] \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $y_0 = f(x_0)$, onda je f^{-1} derivabilna u točki y_0 i pritom je*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{23}$$

Dokaz. Budući da je f^{-1} inverzna funkciji f i $y_0 = f(x_0)$, to je $f^{-1}(y_0) = x_0$ i $\Delta f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ čim je $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y = y$. Zbog injektivnosti funkcije f je $\Delta y \neq 0$ točno onda kad je $\Delta x \neq 0$, a zbog neprekidnosti funkcije f^{-1} u točki y_0 i neprekidnosti funkcije f u točki x_0 (v. Teorem 4.1.1), $\Delta y \to 0$ točno onda kad $\Delta x \to 0$. Prema tomu, $(f^{-1})'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f^{-1}(y)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$. ■

Tvrdnja 4.1.8 *Ovo su derivacije ciklometrijskih funkcija i area-funkcija:*

$$(\forall x \in \langle -1, 1 \rangle) \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{24}$$

$$(\forall x \in \langle -1, 1 \rangle) \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{25}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}; \tag{26}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1 + x^2}; \tag{27}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \tag{28}$$

$$(\forall x \in \langle \cdot, -1 \rangle \bigcup \langle 1, \cdot \rangle) \quad \operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \tag{29}$$

$$(\forall x \in \langle -1, 1 \rangle) \quad \operatorname{arth}' x = \frac{1}{1 - x^2}; \tag{30}$$

$$(\forall x \in \langle \cdot, -1 \rangle \bigcup \langle 1, \cdot \rangle) \quad \operatorname{arcth}' x = -\frac{1}{x^2 - 1}. \tag{31}$$

Dokaz. Dostatno je, ilustracije radi, primjenom Teorema 4.1.4, dokazati prvu formulu.

$$\arcsin' x \overset{(23)}{=} \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(Funkcije arcsin i arccos nisu derivabilne u točkama $x = -1$ i $x = 1$!) ■

Tvrdnja 4.1.9 *Logaritamska funkcija* $x \mapsto \log_a x$ *ima derivaciju* $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln a}$, *tj.*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \log_a' x = \frac{1}{x \ln a}. \tag{32}$$

Posebice je

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \ln' x = \frac{1}{x}. \tag{33}$$

Dokaz. $\log_a' x \overset{(23)}{=} \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$. ■

Tvrdnja 4.1.10 *Derivacija opće potencije* $x \mapsto x^r$, $r \in \mathbb{R}$, *je funkcija* $x \mapsto rx^{r-1}$ *kad god je ova dobro definirana* (usp. (5) i Tvrdnju 4.1.6) *tj.*

$$(x^r)' = rx^{r-1}. \tag{34}$$

Dokaz. Dostatno je tvrdnju dokazati za $x \in \langle 0, \cdot \rangle$. Po §3.1.3(iv) je $x^r = e^{r \ln x}$. Prema tomu,

$$(x^r)' = (e^{r \ln x})' \overset{(18),(9)}{=} e^{r \ln x}(r \ln x)' \overset{(13),(33)}{=} e^{r \ln x} \cdot \tfrac{r}{x} = x^r \cdot \tfrac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

(Opća potencija nije derivabilna u točki $x = 0$ čim je $r < 1$!) ■

Tvrdnja 4.1.11 *Neka su dane funkcije* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *i neka je* $h(x) = f(x)^{g(x)} \equiv (f^g)(x)$. *Ako su* f, g *i* h *derivabilne u točki* x_0, *onda derivacija* $h'(x_0)$ *dopušta zapis*

$$(f^g)'(x_0) = (g'(x_0) \cdot \ln f(x_0) + g(x_0) \cdot \tfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}) f(x_0)^{g(x_0)}. \tag{35}$$

Dokaz. Prikažimo funkciju h kao kompoziciju logaritamske i eksponencijalne funkcije (koje uključuju f, g i množenje). Prvo, neka je $\mu : X \to \mathbb{R}$, $\mu = g \cdot (\ln \circ f)$, tj.

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \overset{\ln}{\mapsto} \ln f(x); \quad x \overset{g}{\mapsto} g(x); \quad x \overset{\mu}{\mapsto} \mu(x) = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Tada je $h \equiv f^g$ jednaka funkcijskoj kompoziciji $\exp_e \circ \mu$, tj.

$$x \overset{\mu}{\mapsto} \mu(x) \overset{\exp_e}{\mapsto} \exp_e(\mu(x)) = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = f(x)^{g(x)} = h(x).$$

Primijenimo li pravila (9), (18), (12) i (33) dobit ćemo (35). ■

Napomena 4.1.2 Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, zadana implicitno jednadžbom $F(x, y) = 0$ (v. §3.1.1) i ako je derivabilna u točki x_0, onda derivaciju $f'(x_0)$ određujemo formalnim deriviranjem jednadžbe $F(x, y) = 0$ (derivirajući y pišemo $y' \equiv f'(x)$ i uvrštavamo $x = x_0$) i sređivanjem.

Primjer 4.1.6 Odredimo derivaciju u točki $x = 0$ funkcije $x \mapsto f(x) = y$ implicitno zadane jednadžbom $2^y - xy + x^2 - 2 = 0$. Formalno derivirajući jednadžbu dobivamo: $(2^y - xy + x^2 - 2)' = 0' \Rightarrow 2^y \cdot \ln 2 \cdot y' - (y + xy') + 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2^y \ln 2 - x}$, pa je $f'(x_0) \equiv y_0' = \frac{y_0 - 2x_0}{2^{y_0} \ln 2 - x_0}$. Vrijednost $f(0) \equiv y_0$ dobivamo uvrštenjem u jednadžbu. Dakle $2^{y_0} - 0 \cdot y_0 + 0^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2^{y_0} = 2 \Rightarrow y_0 = 1$. Napokon, $f'(0) \equiv y_0' = \frac{1 - 2 \cdot 0}{2^1 \ln 2 - 0} = \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 4}$.

4.1.3 Diferencijal

U pododjeljku §4.1.2 smo pokazali da za prirast $f(x)-f(x_0) = (\Delta_{x_0} f)(x) \equiv \Delta f(x)$ derivabilne (u točki x_0) funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x = x_0 + \Delta x$, vrijedi formula (17):

$$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \text{pri čemu je} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

To navodi da se funkciji derivabilnoj u točki x_0 pridijeli (lokalno) linearna funkcija što ju određuje derivacija $f'(x_0)$. Tako se dolazi do tzv. diferencijabilnosti, odnosno, diferencijala promatrane funkcije u točki x_0. Za funkcije jedne varijable, što ih sada proučavamo, bit će razvidno da su diferencijabilnost i derivabilnost ekvivalentna svojstva. Da je diferencijabilnost, općenito, jače svojstvo od derivabilnosti uočit ćemo uskoro proučavajući realne funkcije više varijabla.

Definicija 4.1.2 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,* ***diferencijabilna u točki*** *x_0, ako postoji broj $a \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$f(x) - f(x_0) = a \cdot (x - x_0) + r(x - x_0),$$

pri čemu za funkciju $x - x_0 \mapsto r(x - x_0)$, $x \neq x_0$, mora vrijediti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \quad (\text{"}\textit{ostatak}\text{"}\ r(x-x_0)\ \textit{teži k}\ 0\ \textit{bitno brže od}\ x-x_0).$$

Reći ćemo da je funkcija f ***diferencijabilna****, ako je diferencijabilna u svakoj točki $x \in X$.*

Razvidno je (v.(17)) da je funkcija f diferencijabilna u x_0 čim je derivabilna u x_0. Naime, za traženi broj a smijemo uzeti $f'(x_0)$, pa je $r(x-x_0) = \alpha(x - x_0) \cdot (x - x_0)$ i uvjetu je udovoljeno. S druge strane, lako je dokazati da je broj a jedinstven čim je f diferencijabilna u x_0, a onda je

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Prema tomu, funkcija f je diferencijabilna (u točki x_0) točno onda kad je derivabilna (u x_0). Pripadnu linearnu funkciju nazivamo **diferencijalom** funkcije f **u točki** x_0 i označujemo s

$$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad df(x_0)(x) = f'(x_0) \cdot x. \tag{36}$$

Primijetimo da je, po (17),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x) - df(x_0)(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Primjer 4.1.7 Odredimo diferencijale $df(x_0)$, u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$, osnovnih elementarnih funkcija sin, potencije s eksponentina 2 i linearne funkcije s koeficijentom k, tj. funkcija $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto x^2$ (kvadriranje) i $x \mapsto kx$ ($k \in \mathbb{R}$ konstanta).

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ bilo koja točka (promatrane funcije su derivabilne). Vrijednosti $df(x_0)(x)$ traženih diferencijala $df(x_0)$ jesu redom:

$d(\sin x_0)(x) = \sin' x \mid_{x=x_0} \cdot x = \cos x_0 \cdot x;$

$d(x_0^2)(x) = (x^2)' \mid_{x=x_0} \cdot x = 2x_0 x;$

$d(kx_0)(x) = (kx)' \mid_{x=x_0} \cdot x = kx.$

Primijetimo da je diferencijal linearne funkcije, u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$, jednak toj funkciji.

Da bismo što jednostavnije operirali diferencijalom, iskoristimo činjenicu (v. Linearnu algebru)

$$df(x_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R},$$

tj. da je $df(x_0)$ vektor u dualnomu prostoru (svih linearnih funkcija) od $\mathbb{R}$. Ako s $d \in \mathrm{hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ označimo bazni vektor dualan vektoru $e = 1 \in \mathbb{R}$, smijemo pisati

$$df(x_0) = f'(x_0)d,$$

a za njegove vrijednosti

$$df(x_0)(x) = f'(x_0)dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pojednostavnjujući zapisivanje, kad god ne može doći do zabune, uobičajilo se diferencijal $df(x_0)$ tretirati kao funkciju od $x - x_0 = \Delta x$, $x \in \mathbb{R}$, i pisati

$$df(x_0)(\Delta x) \equiv df(x) = f'(x)dx,$$

pa ćemo se i mi toga držati. Na taj se način gornji primjeri mogu zapisati kako slijedi:

$$d \sin x = \cos x dx, \quad dx^2 = 2xdx, \quad d(kx) = kdx.$$

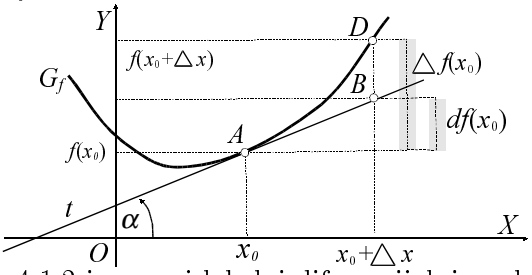
Primijetimo da takvo skraćeno zapisivanje dopušta zapisati derivaciju kao količnik

$$f'(x) = \tfrac{df(x)}{dx} \equiv \tfrac{dy}{dx}.$$

Pritom na veličinu dx smijemo gledati kao na "neizmjerno mali" Δx jer je

$$f'(x_0)\Delta x = df(x_0)(\Delta x) \equiv df(x) = f'(x)dx.$$

Radi boljega poimanja, korisno je pojasniti diferencijalovo geometrijsko značenje (v. crtež dolje). Budući da je $f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx}$, $x = x_0 + \Delta x$, $dx = \Delta x$, tangentin smjerovni koeficijent (t u točki $(x_0, f(x_0)) \in G_f$, v. (2)), slijedi da je vrijednost pripadnoga diferencijala $df(x_0)(dx) \equiv df(x) = f'(x_0)dx$ "prirast do tangente" t, dok je $\Delta f(x)$ pripadni funkcijski prirast, tj. "prirast do grafa" G_f!)



Teorem 4.1.2 ima svoj lokalni diferencijalni analogon.

Teorem 4.1.5 (Diferencijal i osnovne računske operacije) *Neka su funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, diferencijabilne u točki x_0. Tada za pripadne diferencijale u x_0 vrijedi:*

$$dc_r(x_0) = c_0 \quad (f \equiv c_r, c_0 - \text{konstantne funkcije}); \tag{39}$$

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0); \tag{40}$$

$$d(f-g)(x_0) = df(x_0) - dg(x_0); \tag{41}$$

$$d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0); \tag{42}$$

$$d(c_r \cdot g)(x_0) = c_r dg(x_0) \quad (f = c_r); \tag{43}$$

$$d(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g(x_0)^2} \quad (g(x_0) \neq 0). \tag{44}$$

Dokaz. Dokažimo, primjera radi, formulu (42)! Uzmimo bilo koji $x \in \mathbb{R}$. Tada je u $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $d(f \cdot g)(x_0)(x) = (f \cdot g)'(x_0)dx \overset{(12)}{=} (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))dx = g(x_0)f'(x_0)dx + f(x_0)g'(x_0)dx = g(x_0)df(x_0)(x) + f(x_0)dg(x_0)(x) = (g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0))(x)$. ■

Primjer 4.1.8 Odredimo funkciji $x \mapsto f(x) = e^x \sin x$ diferencijal u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$. $df(x_0)(x) \overset{(42)}{=} (\sin x_0 d(e^{x_0}) + e^{x_0} d(\sin x_0))(x) = \sin x_0 e^{x_0} dx + e^{x_0} \cos x_0 dx = e^{x_0}(\sin x_0 + \cos x_0)dx$. Ili skraćeno, $d(e^x \sin x) = (e^x \sin x)'dx = e^x(\sin x + \cos x)dx$

Teorem 4.1.6 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki x_0 i neka je $f'(x_0) \neq 0$. Tada je*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1.$$

Dokaz. Po (17) i (36) je $\frac{\Delta f(x)}{df(x)} = \frac{f'(x_0)dx + \alpha(dx)dx}{f'(x_0)dx} = 1 + \frac{\alpha(dx)}{f'(x_0)}$ i $\lim\limits_{dx \to 0} \alpha(dx) = 0$. Prema tomu, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1 + \frac{1}{f'(x_0)} \lim\limits_{dx \to 0} \alpha(dx) = 1$. ■

Teorem 4.1.6 potvrđuje da je funkcijin prirast $\Delta f(x_0)(\Delta x) \equiv \Delta f(x) \equiv \Delta y$ približno jednak diferencijalovoj vrijednosti $df(x_0)(\Delta x) \equiv df(x) \equiv dy$ čim je varijablin prirast $\Delta x = dx$ dostatno malen. Pišemo $\Delta y \approx dy$. Ova se činjenica često primijenjuje u približnom izračunavanju funkcijskih vrijednosti, kao i u procjenjivanju pogrješaka koje su posljedica netočnih mjerenja. Ako je npr. poznata funkcijina vrijednost $y_0 = f(x_0)$, njezina se **vrijednost** u točki $x = x_0 + dx$ (f derivabilna u x_0 i dx dostatno malen) smije **aproksimirati** po formuli

$$f(x_0 + dx) = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy. \tag{45}$$

Nadalje, ako je varijabla x izmjerena s pogrješkom koja apsolutno ne premašuje $|dx|$, onda se najveća **apsolutna pogrješka** funkcijine vrijednosti $y = f(x)$ smije procijeniti kao

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)|\,dx, \tag{46}$$

relativna pogrješka kao

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}, \tag{47}$$

a **postotna pogrješka** kao

$$\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\% \approx \frac{dy}{y} \cdot 100\%. \tag{48}$$

Primjer 4.1.9 Izračunajmo neku približnu (racionalnu) vrijednost iracionalnoga broja $\sqrt[4]{84}$ rabeći aproksimaciju diferencijalom.
U rješavanju ovakvoga zadatka treba voditi računa o trima stvarima: Prvo, da se odabere što je moguće jednostavnija elementarna funkcija f (primjerena danom zadatku); da se odabere odgovarajuća točka x_0 za koju se (točna) vrijednost $f(x_0)$ može lako izračunati; i treće, da $x_0 + dx$ bude dana varijablina vrijednost s relativno malim dx.
Primijetimo, najprije, da je $\sqrt[4]{84} = (81+3)^{\frac{1}{4}} = 3(1+\frac{1}{27})^{\frac{1}{4}}$.
Stoga se (ne zahtijevamo li bolju aproksimaciju), kao prikladan izbor nameću funkcija $x \mapsto f(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{4}}$ i točka $x_0 \equiv 0$, pri čemu je $dx = \frac{1}{27} = x_0 + dx$.
Tada, primijenjujući formulu (45) dobivamo:

$$\sqrt[4]{84} = 3(1+\tfrac{1}{27})^{\frac{1}{4}} = f(0+\tfrac{1}{27}) \approx f(0) + f'(0)\cdot\tfrac{1}{27} =$$
$$3(1+0)^{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4(1+0)^{\frac{3}{4}}}\cdot\frac{1}{27} = 3 + \frac{1}{36} = \frac{109}{36} \approx 3,028.$$

Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna (ekvivalentno, diferencijabilna) funkcija. Tada u svakoj točki x postoji diferencijal $df(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df(x)(x) = f'(x)dx$, pa je dobro definirana funkcija $df : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x \mapsto df(x)$. Budući da je $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ izomorfan vektorskomu prostoru $\mathbb{R}$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, to na df smijemo gledati i kao na funkciju iz X u $\mathbb{R}$.

Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na skupu $A \subseteq X$, tj. neka postoji funkcija $(f|_A)' : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$. Ako je funkcija $(f|_A)'$ derivabilna u točki x_0, onda kažemo da je funkcija f **dvaput derivabilna u točki** x_0, a vrijednost $((f|_A)')'(x_0) \equiv f''(x_0)$ nazivamo **drugom derivacijom** funkcije f **u točki** x_0. Reći ćemo da je funkcija f **dvaput derivabilna na** A ako je f dvaput derivabilna u svakoj točki $x \in A$. Pripadnu funkciju nazivamo **drugom derivacijom** funkcije f **na skupu** A i označujemo s $(f|_A)'' : A \to \mathbb{R}$. U slučaju $A = X$ govorimo o **dvaput derivabilnoj** funkciji f i o njezinoj **drugoj derivaciji** $f'' \equiv (f')' : X \to \mathbb{R}$. Nastavljajući induktivno, ima smisla govoriti o **trećoj**, **četvrtoj**, $\cdots$, n-**toj**, $\cdots$ **derivaciji** funkcije f (**na skupu** A; **u točki** x_0). Pripadne oznake su f''', $f^{(4)}$, $\cdots$, $f^{(n)}$, $\cdots$. Dakle (v. Teorem 1.4.2),

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0), \quad n \in \mathbb{N}\ (f^{(0)} \equiv f). \tag{50}$$

Primjer 4.1.10 Odredimo (ako postoje) sve derivacije $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{rx}$.
Budući da je f funkcijska kompozicija množenja konstantom (r) s (prirodnom) eksponencijalnom funkcijom ($\exp_e$), to je f derivabilna funkcija. Slično vrijedi i za njezine derivacije. Pritom dobivamo:

$$f'(x) = re^{rx},\ f''(x) = (re^{rx})' = r^2e^{rx},\ \cdots,$$
$$f^{(n)}(x) = (r^{n-1}e^{rx})' = r^ne^{rx},\ \cdots.$$

Posve slično se za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, definiraju diferencijali viših redova (u točki x_0). Pretpostavimo da je f diferencijabilna

funkcija. **Drugim diferencijalom** funkcije f **u točki** x_0 nazivamo diferencijal $d(df)(x_0)$ funkcije-diferencijala $df : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ u točki x_0. Radi se, dakle, o linearnoj funkciji, koju označujemo s $d^2 f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, određenoj "koeficijentom" $f''(x_0)dx$, tj.

$$d^2 f(x_0) = d(df(x))|_{x=x_0} = d(f'(x)dx)|_{x=x_0} = f''(x_0)dx,$$

(odnosno, $d^2 f(x_0) = (f''(x_0)dx)d \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) s vrijednostima

$$d^2 f(x_0)(x) \equiv d^2 f(x) = (f''(x_0)dx)dx \equiv f''(x_0)dx^2, \tag{51}$$

Veličina $dx^2 = dx \cdot dx$ nosi obavijest o još jednoj zamjeni prostora $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ prostorom $\mathbb{R}$. Pritom kažemo da je funkcija f **dvaput diferencijabilna u točki** x_0. Ako je f dvaput diferencijabilna u svakoj točki $x \in X$ onda za nju kažemo da je **dvaput diferencijabilna** funkcija. U tom slučaju postoji funkcija (**drugi diferencijal** od f)

$$d^2 f : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}, \quad x \mapsto d^2 f(x).$$

Općenito, n-**ti diferencijal** $d^n f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije f **u točki** x_0, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definiramo kao diferencijal $(n-1)$-voga diferencijala od f, $d^{n-1} f : X \to \mathbb{R}$, u x_0, tj. $d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f)(x_0)$. Stoga vrijedi formula ($dx^n \equiv (dx)^n$)

$$d^n f(x_0)(x) \equiv d^n f(x) = f^{(n)}(x_0)dx^n, \tag{52}$$

pri čemu veličina $dx^n = dx^{n-1} \cdot dx$ nosi obavijest o n zamjena prostora $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ prostorom $\mathbb{R}$. Obstojnošću n-tog diferencijala od f (u x_0) definira se n **puta diferencijabilnost** funkcije f (**u točki** x_0). Razvidno je da su ta svojstva ekvivalentna odgovarajućoj derivabilnosti.

Po (52), formula (38) ima sljedeće poopćenje na svaki $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \tag{53}$$

Neka je jednadžbama $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ parametarski zadana funkcija $x \mapsto f(x) = y$ (v. §3.1.1). Budući da se, općenito, parametar t ne može eliminirati, odredit ćemo derivaciju od f u točki $x_0 = \varphi(t_0)$ (čim postoji) pomoću diferencijala od φ i ψ u točki t_0.

$$f'(x_0) = \tfrac{dy}{dx} \equiv \tfrac{d\psi(t)}{d\varphi(t)} = \tfrac{\psi'(t_0)dt}{\varphi'(t_0)dt} = \tfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \varphi'(t_0) \neq 0,$$

što se kraće i općenito zapisuje kao

$$y' \equiv f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \dot{x} = \varphi'(t), \dot{y} = \psi'(t). \tag{54}$$

Na sličan način dobivamo (ako postoje) i derivacije viših redova, primjerice (dx i dt tretiramo kao konstante),

$$y'' = \tfrac{d^2 y}{dx^2} = \tfrac{d(y'dx)}{dx^2} = \tfrac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}dx)}{dx \cdot dx} = \tfrac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{dx} = \tfrac{d_t(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}dt)}{\dot{x}dt} = \tfrac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}}, \text{ tj.}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}, \quad \dot{x} \neq 0, \ddot{x} = \varphi''(t), \ddot{y} = \psi''(t). \tag{55}$$

4.1.4 Osnovni teoremi diferencijalnoga računa

Ovdje ćemo dokazati nekoliko temeljnih teorema o važnim svojstvima derivabilnih funkcija.

Teorem 4.1.7 (Fermatov teorem) *Neka suženje $f|_{\langle a,b\rangle}$ funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, poprima u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle \subseteq X$ svoju najmanju ili najveću vrijednost. Ako je f derivabilna u x_0 onda je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(x_0)$ minimum od $f|_{\langle a,b\rangle}$, tj. $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b\rangle$. Zapisujući $x = x_0+\Delta x$ dobivamo $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \geq 0$. Budući da je f derivabilna u $x_0 \in \langle a,b\rangle$, to je f derivabilna slijeva i zdesna u x_0 i pripadne se derivacije podudaraju s $f'(x_0)$, tj.

$$\lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Primijetimo da je nazivnik Δx u derivaciji slijeva stalno negativan ($x < x_0$), dok je u derivaciji zdesna stalno pozitivan ($x > x_0$). Budući da su brojnici stalno pozitivni, to je derivacija slijeva od f u x_0 manja ili jednaka nula, a ona zdesna veća ili jednaka nula. Slijedi zaključak $f'(x_0) = 0$. U slučaju maksimuma $f(x_0)$ dokazuje se na isti način. ■

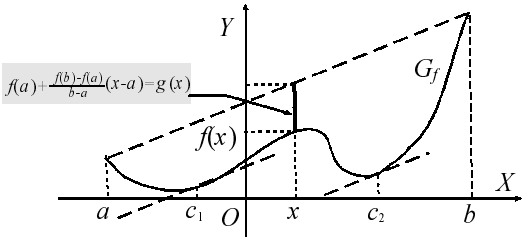
Teorem 4.1.8 (Rolleov teorem) *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq X$ i derivabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$. Ako je $f(a) = f(b)$ onda postoji točka $x_0 \in \langle a,b\rangle$ takva da je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Po Teoremu 3.3.12, suženje $f|_{[a,b]}$ postiže na $[a,b]$ svoju najmanju i svoju najveću vrijednost, tj. postoje $x_1, x_2 \in [a,b]$ takvi da je, za svaki $x \in [a,b]$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Ako je $f(x_2) = f(x_1)$ onda je $f|_{[a,b]}$ konstantna funkcija $c_{f(x_1)}$, pa je $(f|_{\langle a,b\rangle})' = c_0|_{\langle a,b\rangle}$ - dokaz gotov. Neka je $f(x_2) \neq f(x_1)$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$. Tada ne mogu obje vrijednosti biti jednake $f(a)$ $(= f(b))$. Pretpostavka $f(x_1) \neq f(a)$ povlači $a \neq x_1 \neq b$, tj. $x_1 \in \langle a,b\rangle$, a pretpostavka $f(x_2) \neq f(a)$ povlači $a \neq x_2 \neq b$, tj. $x_2 \in \langle a,b\rangle$. Po Teoremu 4.1.7 zaključujemo da je x_1 ili x_2 tražena točka x_0. ■

Teorem 4.1.9 (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti) *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq X$ i derivabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$. Tada postoji točka $x_0 \in \langle a,b\rangle$ takva da je*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{56}$$

Dokaz. Promatrajmo funkciju $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ (v. crtež dolje). Funkcija g je neprekidna na $[a,b]$ i derivabilna na $\langle a,b\rangle$ i k tomu je $g(a) = f(a) = g(b)$.



Po Teoremu 4.2.8 postoji neka točka $x_0 \in \langle a, b\rangle$ u kojoj je $g'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tj. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Lagrangeova formula (56) se može napisati na nekoliko načina. Tako npr. množenjem formule (56) faktorom $b - a$ dobivamo

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a). \tag{56$'$}$$

Nadalje, budući da je $x_0 = a + \frac{x_0-a}{b-a}(b - a)$ i $0 < \frac{x_0-a}{b-a} \equiv \vartheta < 1$, smijemo pisati

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a), \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{56$''$}$$

Napokon, označimo li $a = x$ i $b = x + \Delta x$, dobivamo

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \vartheta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{56$'''$}$$

Teorem 4.1.10 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda je suženje $f|_{[a,b]}$ konstantna funkcija.*

Dokaz. Odaberimo bilo koji $x \in \langle a, b]$. Tada su na segmentu $[a, x]$ ispunjeni uvjeti Teorema 4.1.9 pa postoji točka $x_0 \in \langle a, x\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ za koju je $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x - a)$. Po pretpostavci je $f'(x_0) = 0$, što sada povlači $f(x) = f(a)$ za svaki $x \in \langle a, b]$. ■

Korolar 4.1.1 *Neka su funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidne na segmentu $[a, b] \subseteq X$ i derivabilne na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) = g'(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ onda je suženje $(f - g)|_{[a,b]}$ konstantna funkcija.*

Dokaz. Funkcija $h \equiv f-g : X \to \mathbb{R}$ udovoljava uvjetima Teorema 4.1.10 jer je, na $\langle a, b\rangle$, $h' = f' - g' = 0$. Slijedi da je funkcija $f - g$ konstantna na $[a, b]$. ■

Lagrangeovu formulu ćemo sada upotrijebiti u dokazu tzv. L'Hospitalova pravila, što ga rabimo za određivanje graničnih vrijednosti u mnogim slučajevima tzv. *neodređenih oblika*:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

(∞ ovdje označuje bilo $+\infty$ bilo $-\infty$!) Primjerice, neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ se javlja pri određivanju granične vrijednosti $\lim\limits_{x_0} \frac{f}{g}$ čim je $\lim\limits_{x_0} f = 0 = \lim\limits_{x_0} g$, a ∞^0 pri određivanju $\lim\limits_{x_0} f^g$ čim je $\lim\limits_{x_0} f = \infty$ i $\lim\limits_{x_0} g = 0$. Sljedeći teorem razmatra samo oblik $\frac{0}{0}$, dok se preostali dopustivim preinakama svode na njega.

Teorem 4.1.11 (L'Hospitalovo pravilo) *Neka za funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, vrijedi $\lim\limits_{x_0} f = 0 = \lim\limits_{x_0} g$. Ako postoji interval I takav da je $x_0 \in I \subseteq X$ i da su f i g neprekidno derivabilne na I, pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$, onda je*

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0 = \lim_{x_0} \frac{f'}{g'}. \tag{57}$$

U dokazu ćemo trebati ovu lemu:

Lema 4.1.1 *Neka je funkcija $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki x_0 i neka je $g(x_0) = 0$, a $g'(x_0) \neq 0$. Tada postoji neki $\epsilon > 0$ takav da su na skupu $A_\epsilon = (X \setminus \{x_0\}) \bigcap \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle$ sve vrijednosti $g(x) \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo protivno, tj. da za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $x_\epsilon \in A_\epsilon$ za koji je $g(x_\epsilon) = 0$. Birajući $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, dobivamo tako niz (x_n), $x_n \in A_{\frac{1}{n}} \subseteq X \setminus \{x_0\}$, koji konvergira prema x_0, dok je $(g(x_n))$ konstantan nulniz (0). Tada je i $(\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}) = (0)$. Po pretpostavci, postoji $g'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ i $g'(x_0) \neq 0$. Zbog $\lim(x_n) = x_0$ mora biti (v. Teorem 3.3.4) i $g'(x_0) = \lim(\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}) = \lim(0) = 0$, što je protuslovlje. ■

Dokaz. (Teorema 4.1.11.) Po Teoremu 4.1.1 slijedi su funkcije f i g neprekidne na intervalu I pa je $f(x_0) = \lim\limits_{x_0} f = 0$ i $g(x_0) = \lim\limits_{x_0} g = 0$ (v. Teorem 3.3.6). Po Lemi 4.1.1 zaključujemo da postoji podskup $A_\epsilon = I \bigcap \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle \subseteq X$, $\epsilon > 0$, takav da je $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in A_\epsilon \setminus \{x_0\}$. Dakle, kvocijent $\frac{f(x)}{g(x)}$ je definiran čim je $x \in A_\epsilon \setminus \{x_0\}$. Štoviše,

$\lim\limits_{x_0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim\limits_{x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = ((\exists x_1, x_2 \in \langle x, x_0 \rangle)$; v. Teorem 4.1.9) $= \lim\limits_{x_0} \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = (f', g'$ neprekidne na $I) = \frac{\lim\limits_{x_0} f'}{\lim\limits_{x_0} g'} =$ (Teorem 3.3.2(iii); $g'(x) \neq 0$, $x \in A_\epsilon) = \lim\limits_{x_0} \frac{f'}{g'}$. ■

Napomena 4.1.3 Postoje razne varijante i poopćenja upravo dokazanoga teorema. Tako npr. L'Hospitalovo pravilo vrijedi i za neodređene oblike $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, za granične vrijednosti kad $x \to \pm\infty$ kao i u slučajevima kad se granične vrijednosti (derivacije) zamijene graničnim vrijednostima slijeva ili zdesna (derivacijama slijeva ili zdesna).

Napomena 4.1.4 L'Hospitalovo pravilo se smije primijeniti više puta uzastopce, čim prethodna primjena opet daje oblik $\frac{0}{0}$ $(\frac{\infty}{\infty})$ i ako nove funkcije udovoljavaju postavljenim uvjetima.

Napomena 4.1.5 Ako se u određivanju granične vrijednosti pojavi neki od preostalih (prije navedenih) neodređenih oblika i ako se želi primijeniti L'Hospitalovo prvilo, treba taj neodređeni oblik pogodnom transformacijom svesti na oblik $\frac{0}{0}$ ili na oblik $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer 4.1.11 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{(57)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x}{2x} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{(57)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{16 \cos 4x}{2} = 8.$

Primjer 4.1.12 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \underset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{\overset{(57)}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underset{(\frac{-\infty}{-\infty})}{\overset{(57)}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$

Primjer 4.1.13 Odredimo graničnu vrijednost $\lim\limits_{x\to 0} f$ funkcije $x \mapsto f(x) = x^x$. Budući da je definicijsko područje od f skup $\mathbb{R}^+$, tj. skup svih $x > 0$, to je tražena granična vrijednost isto što i pripadna granična vrijednost zdesna, $\lim\limits_{x\to 0} f = \lim\limits_{x\to +0} f$. (Granična vrijednost u 0 slijeva nema smisla!) Prema tomu,

$$\lim_{x\to 0} f = \lim_{x\to 0+0} x^x \underset{(0^0)}{=} \lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x} \underset{(e^{0(-\infty)})}{=}.$$

Budući da je

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x \underset{(0\cdot(-\infty))}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{(\frac{-\infty}{+\infty})}{\overset{(57)}{=}} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} (-x) = 0,$$

to je $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1.$

Primjer 4.1.14 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}) \underset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{(57)}{=}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{(57)}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

4.1.5 Taylorova formula

Sjetimo se da se polinomske vrijednosti izračunavaju relativno kratkim računom što uključuje samo zbrajanje i množenje realnih brojeva. Zbog te praktične jednostavnosti, polinomi su vrlo pogodna preslikavanja za aproksimiranje onih preslikavanja vrijednosti kojih zahtijevaju mnogo složenije račune. Primijetimo da Lagrangeova formula daje približnu vrijednost funkcije f (derivabilne na intervalu I) u točki x po formuli

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x), \quad R_0(x) = (x - x_0)f'(x_0 + \vartheta(x - x_0)), 0 < \vartheta < 1.$$

Drugim riječima, suženje $f|_I$ se aproksimira polinomom p nultoga stupnja (konstantnom funkcijom $p = c_{f(x_0)}$), pri čemu funkcija R_0, tzv. *ostatak*, predstavlja aproksimacijsku pogrješku. Ako je funkcija f na I derivabilna $n + 1$ puta, puno bolju aproksimaciju daje tzv. Taylorova formula, koja poopćuje Lagrangeovu uključujući postojeće derivacije viših redova. Postoje li derivacije od f po volji visokog reda, aproksimiranje preuzima tzv. Taylorov red.

Teorem 4.1.12 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq X$ derivabilna $n + 1$ puta, te neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$ bilo koja točka. Tada za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi* Taylorova formula*:*

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{p\cdot n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \vartheta)^{n+1-p}, \end{cases} \tag{58}$$

pri čemu se u ostataku n-toga reda $R_n(x)$ *pojavljuju neki $p \in \mathbb{N}$ i $\vartheta \in \mathbb{R}$, $0 < \vartheta < 1$.*

Dokaz. Odaberimo bilo koju točku $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Ako je $x \in \langle a, b\rangle$ i $x = x_0$, nemamo, očito, što dokazivati. Promatrajmo slučaj $x > x_0$. Pretpostavimo da je

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

pri čemu je $R_n(x) = (x - x_0)^p h(x)$, za neki $p \in \mathbb{N}$ i vrijednost $h(x)$ neke funkciju $h : \langle x_0, b\rangle \to \mathbb{R}$. Treba, naravno, za dani p, odrediti funkciju h. U tu svrhu, za bilo koji čvrsti $x \in \langle x_0, b\rangle$, definirajmo funkciju $g_x \equiv g : [x_0, b\rangle \to \mathbb{R}$ stavljajući

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + (x - t)^p h(x).$$

Primijetimo da je $g(x_0) = g(x)$ $(= f(x))$ i da je g derivabilna na $\langle x_0, x\rangle$,

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x - t)^{n-1} +$$
$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - p(x - t)^{p-1}h(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - p(x - t)^{p-1}h(x).$$

Prema tomu, funkcija g na segmentu $[x_0, x]$ ispunja uvjete Rolleova teorema, pa postoji neka točka $t_0 \equiv x_0 + \vartheta(x - x_0) \in \langle x_0, x\rangle$, $0 < \vartheta < 1$, takva da je $g'(t_0) = 0$. Slijedi:

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!}(x-x_0-\vartheta(x-x_0))^n - p(x-x_0-\vartheta(x-x_0))^{p-1}h(x), \quad \text{tj.}$$
$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{p\cdot n!}(x - x_0)^{n+1-p}(1 - \vartheta)^{n+1-p}.$$

Dakle, ostatak $R_n(x)$ je zaista određen navedenim izrazom. Na isti se način tvrdnja dokazuje kad je $x < x_0$. ■

Navedeni zapis za $R_n(x)$ se naziva ostatkom u *Schlömilchovu obliku.* Ako je $p = 1$, ostatak $R_n(x)$ poprima tzv. *Cauchyjev oblik*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \vartheta)^n, \tag{59}$$

a ako je $p = n + 1$ - tzv. *Lagrangeov oblik*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{60}$$

Po Taylorovoj formuli (58), ostatak $R_n(x)$ jest razlika

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Pripadni polinom, dakle, to bolje aproksimira funkciju f u točki x što je ostatak $R_n(x)$ manji. To vodi na sada lako dokaziv teorem:

Teorem 4.1.13 *Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ima na intervalu $I \subseteq X$ sve derivacije $(f|_I)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je $x_0 \in I$ bilo koja točka. Tada je, za svaki $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \\ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned} \tag{61}$$

onda i samo onda, ako niz $(R_n(x))$ konvergira prema nuli, $\lim(R_n(x)) = 0$.

Potencijski red u (61) nazivamo **Taylorovim redom** (ili **razvojem**) funkcije f u točki x_0. Ako je $x_0 = 0$, govorimo o **Maclaurinovu redu** (ili **razvoju**) funkcije f, tj. o

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{62}$$

Napomena 4.1.6 Želi li se u Taylorov red razviti bilo koju elementarnu funkciju, dostatno je uvrstiti odgovarajuće derivacije u desnu stranu formule (61) te odrediti konvergencijski interval dobivenoga reda. Formula (61) će vrijediti u svakoj točki x toga intervala, tj. bit će $\lim(R_n(x)) = 0$. Ovo, međutim, ne vrijedi za svaku po volji mnogo puta derivabilnu funkciju! Naime, ako funkcija f *nije elementarna,* moguće je da, u nekoj točki $x \in X$, njezin Taylorov red konvergira ali ne prema $f(x)$, tj. moguće je i $\lim(R_n(x)) \neq 0$. Primjer takve funkcije jest

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

kojoj sve derivacije u $x_0 = 0$ iščezavaju (neka to čitatelj provjeri!) pa Maclaurinov red

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

konvergira na $\mathbb{R}$ prema c_0. Dakle,

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ (= 0) \text{ za svaki } x \neq 0.$$

Primjer 4.1.15 Razvijmo u Maclaurinov red funkciju sin.
Primijetimo da iz $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$ i $\sin^{(4)} = \sin$ induktivno slijedi $\sin^{(2n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \cos$ i $\sin^{(2n)} = (-1)^n \cdot \sin$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tomu, $\sin 0 = \sin^{(2n)} 0 = 0$ i $\sin^{(2n-1)} 0 = (-1)^{n-1}$ pa dobivamo Maclaurinov razvoj (za bilo koji $n \in \mathbb{N}$*):*

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} +$$
$$\frac{0}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x).$$

Istražimo ponašanje (pod)niza pripadnih ostataka $(R_{2n}(x))$ u bilo kojoj točki $x \in R$. Primijenimo li Lagrangeov oblik (s $x_0 = 0$), dobit ćemo

$$R_{2n}(x) = \frac{\sin^{(2n+1)}(\vartheta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\cos(\vartheta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \text{pa je}$$
$$|R_{2n}(x)| = \frac{|(-1)^{n+1}\cos(\vartheta x)|}{(2n+1)!}|x^{2n+1}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Za promatrani x, uzmimo $n_0 = [|x|] + 1$ pa je $|x| < n_0$. Tada je, za dovoljno veliki n ($n \geq \frac{n_0}{2}$),

$$\lim\left(\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \lim\left(\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{n_0} \cdot \ldots \cdot \frac{|x|}{2n+1}\right) =$$
$$\frac{|x|^{n_0}}{n_0!}\lim\left(\frac{|x|^{2n+1-n_0}}{(n_0+1)\cdots(2n+1)}\right) \leq \frac{|x|^{n_0}}{n_0!}\lim\left(\left|\frac{x}{n_0}\right|^{2n+1-n_0}\right).$$

Budući da je $|\frac{x}{n_0}| < 1$ to pripadni geometrijski niz $(|\frac{x}{n_0}|^{2n+1-n_0})$ konvergira prema 0, što povlači $\lim(|R_{2n}(x)|) \leq \lim(\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}) \leq 0$. Stoga je i $\lim(R_{2n}(x)) = 0$. Budući da je pripadni komplementarni podniz $(R_{2n-1}(x))$ konstantni nulniz (0), slijedi, napokon, zaključak da je $\lim(R_n(x)) = 0$. Prema tomu, Teorem 4.1.13 daje

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da smo do istoga zaključka mogli doći i primjenom D'Alembertova kriterija (sin je elementarna funkcija!). Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim(|\frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}|) = \lim(\frac{x^2}{2n(2n+1)}) = 0 < 1,$$

pa pripadni red konvergira (apsolutno) na cijelom $\mathbb{R}$.
Izračunajmo (procijenimo) još i $\sin 1$ pomoću pripadnoga polinoma petoga stupnja (tj. prvih šest članova Maclaurinova reda):

$$\sin 1 = \frac{1}{1!} - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} + R_6(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + R_6(1), \quad \text{dakle,}$$

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \approx 0,8417 \quad \text{s pogrješkom} \quad |R_6(1)| \leq \frac{|1|^7}{7!} < 0,0002.$$

Prema tomu, $\sin 1 = 0,8417 \pm 2 \cdot 10^{-4}$ ili $\sin 1 \in \langle 0,8415; 0,8419 \rangle$.

Postupajući kao u Primjeru 4.1.15, za funkciju cos dobivamo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Primjer 4.1.16 Za funkciju $\exp_e$ se lako dobiva pripadni Maclaurinov red:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo li $x = 1$, dobivamo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

što je još jedan zapis za broj e (usp. Primjer 3.2.7).

Primjer 4.1.17 Može se dokazati da u apsolutno konvergentnom realnom redu smijemo komutirati "pribrojnike", tj. da članovi smiju izmjenjivati mjesta, te da to vrijedi i za apsolutno konvergentne redove kompleksnih brojeva. Definiramo li funkciju (iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{C}$) $x \mapsto e^{ix}$, $i \equiv \sqrt{-1}$, pomoću Maclaurinova reda za $\exp_e$ (Primjer 4.1.16) formalnom zamjenom $x \rightsquigarrow ix$, dobivamo

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Taj red konvergira apsolutno, za svaki $x \in \mathbb{R}$, prema $e^{|x|}$ pa smijemo komutirati pribrojnike. Sumiramo li zasebno realne i zasebno imaginarne članove, dobivamo

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}) = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Dobili smo, dakle, i treći, eksponencijalni zapis kompleksnog broja (usp. §1.5.3): $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$.)
Primijetimo da je

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos x + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Dobivene zapise za e^{ix} i e^{-ix} nazivamo *Eulerovim formulama*. Iz njih izravno slijedi

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

(Neka čitatelj usporedi ove formule s definicijskim formulama hiperbonih funkcija u §3.1.4(iv)!)

Primjer 4.1.18 Razvijmo u Maclaurinov red funkciju $f : \langle -1, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.
Uvrstimo li u formulu (62) vrijednosti $f^{(n)}(0)$, $n \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, desna strana postaje funkcijskim redom

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \equiv \sum (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Izravnim ispitivanjem njegove apsolutne konvergentnosti (ili konvergentnosti pripadnoga niza $(R_n(x))$) dobivamo područje $\langle -1, 1]$ (v. Primjer 3.2.22). Prema tomu,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1]\,.$$

Napomena 4.1.7 Primijetimo da dobiveni Maclaurinov red za funkciju $x \mapsto \ln(1+x)$ može poslužiti za izračunavanje prirodnih logaritama $\ln x$ kad je $x \in \langle 0, 2]$. Za izračunavanje prirodnih logaritama $\ln x$ kad je $x \in \langle 2, \cdot\rangle$ rabimo Maclaurinov razvoj funkcije $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$. (Neka čitatelj odredi taj red! Pritom smije iskoristiti činjenicu $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ (vodeći računa o definicijskim područjima) i rezultat iz Primjera 4.1.18.)

Primjer 4.1.19 Neka je dan bilo koji broj $\alpha \in \mathbb{R}\backslash(\{0\} \bigcup \mathbb{N})$. Promatrajmo funkciju $f : \langle -1, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$. Maclaurinov red ove funkcije nazivamo **binomnim redom** (U slučaju $\alpha \equiv m \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ dobivamo polinom m-toga stupnja!) Postupajući kao u prethodnim primjerima, lako se dobiva

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in \langle -1, 1\rangle\,,$$

pri čemu su $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{1} = \alpha$, $\binom{a}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, $\cdots$, $\binom{a}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $\cdots$, $n \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, tzv. **opći binomni koeficijenti** (usp. §1.4.5).
Nije teško pokazati da binomni red konvergira i točki $x = -1$ čim je $\alpha > 0$, kao i u točki $x = 1$ čim je $\alpha > -1$.

4.1.6 Deriviranje funkcijskog reda

Neka funkcijski red $\sum f_n$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, konvergira (po točkama) na intervalu $I \subseteq X$ što sadrži točku x_0. Pod **derivacijom funkcijskoga reda** $\sum f_n$ (**u točki** x_0), oznaka: $(\sum f_n)'$ $((\sum f_n)'(x_0))$, podrazumijevamo derivaciju s' $(s'(x_0))$ pripadne sume $s : I \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, (u točki x_0). Budući da funkcija s najčešće nije elementarna ili ne dopušta pogodan analitički zapis, to je tehnički teško istraživati njezina svojstva. Velika je olakšica kad je za to dostatno poznavanje odgovarajućih svojstava pripadnih članova f_n funkcijskoga reda. Promatrajmo, prvo, potencijski red $\sum a_n x^n$. O deriviranju potencijskog reda govori ovaj teorem:

Teorem 4.1.14 *Potencijski red* $\sum a_n x^n$ *dopušta deriviranje "član po član", tj.*

$(\sum a_n x^n)' = \sum (a_n x^n)'$ *odnosno,*

$(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n),$

na svomu konvergencijskom intervalu, uključujući i rubne točke kad u njima oba ta reda konvergiraju. (Zapis u zagradi ističe da je derivacija potencijskog reda opet potencijski red!)

Cjeloviti dokaz Teorema 4.1.14 bi izišao iz okvira ovih skripata. Navest ćemo, ipak, ideju i redosljed glavnih koraka. Najprije se dokazuje da potencijski redovi $\sum a_n x^n$ i $\sum (a_n x^n)' = \sum b_n x^n$, $b_n = (n+1) a_{n+1}$, imaju isti konvergencijski polumjer ρ, tj. da je (v. §3.2.6)

$\limsup(\sqrt[n]{|a_n|}) = \limsup(\sqrt[n]{n|a_n|}) = \limsup(\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|})$.

Ta se jednakost izvodi iz činjenice $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$ (v. §3.2.7, Zadatak 1.(e)) i ove tvrdnje (koju ne dokazujemo): ako je $\lim(c_n) = c > 0$ i $\limsup(d_n) = d$ i onda je $\limsup(c_n d_n) = cd$. (Osim toga, koristi se i jednostavna činjenica da potencijski redovi $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ i $\sum n a_n x^n$ imaju isti konvergencijski polumjer.) U drugomu koraku se dokazuje da se razlika

$|\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}|,$

$s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $x, x+\Delta x \in \langle -\rho, \rho \rangle$, može učiniti po volji malom čim je prirast Δx dostatno malen, što upravo znači da je $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ za svaki $x \in \langle -\rho, \rho \rangle$. To se postiže tako da se za $s(x+\Delta x)$ i $s(x)$ uvrste pripadni redovi, da se na $(x+\Delta x)^n$ primijeni binomna formula itd. U posljednjem koraku se pokazuje da ista tvrdnja vrijedi i za točku $x = -\rho$ ($x = \rho$) čim redovi $\sum a_n (-\rho)^n$ i $\sum n a_n (-\rho)^{n-1}$ ($\sum a_n \rho^n$ i $\sum n a_n \rho^{n-1}$) konvergiraju.

Primjer 4.1.20 Odredimo konvergencijsko područje i sumu funkcijskoga reda $1 + 2x + \cdots + n x^{n-1} + \cdots \equiv \sum n x^{n-1}$. Primijetimo da je funkcijski red $\sum n x^{n-1}$ zapravo potencijski red $\sum (n+1) x^n$. Nadalje, njegov je opći član, funkcija $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = n x^{n-1}$, derivacija funcije $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Lako se provjeri da potencijski redovi $\sum f_n \equiv \sum x^n$ i $\sum (n+1) x^n$ ($= \sum n x^{n-1} \equiv \sum g_n$) konvergiraju na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Po Teoremu 4.1.14 i Primjeru 3.3.12 (s poopćenjem) sada dobivamo

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n)' = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}.$

Može se dokazati da pravilo iz Teorema 4.1.14. vrijedi i pod nešto općenitijim uvjetima:

Teorem 4.1.15 *Neka je* $\sum f_n$ *funkcijski red, pri čemu je svaka funkcija* $f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *neprekidno derivabilna na segmentu* $I \subseteq X$. *Ako*

red $\sum(f_n|_I)$ *konvergira (po točkama) prema funkciji* $s : I \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *i ako red* $\sum(f_n|_I)'$ *jednoliko konvergira prema funkciji* $u : I \to \mathbb{R}$, $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, *onda je funkcija* s *derivabilna i vrijedi* $s' = u$, *tj.* $(\sum(f_n|_I))' = \sum(f_n|_I)'$.

4.1.7 Određivanje funkcijskog tijeka

Temeljito istraživanje važnih svojstava dovoljno puta derivabilne funkcije može se relativno lako provesti proučavajući upravo njezine derivacije. Primjerice, pokazuje se da je funkcija uzlazna ondje gdje joj je derivacija pozitivna, da ima lokalno ekstremnu vrijednost u točki u kojoj joj derivacija iščezava i druga derivacija ne iščezava itd.

Teorem 4.1.16 *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *derivabilna na intervalu* $I \subseteq X$. *Tada je* $f|_I$ *uzlazna ako i samo ako je* $f'(x) \geq 0$ *za svaki* $x \in I$.

Dokaz. Prvo dokažimo dovoljnost! Neka je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$. Promatrajmo bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Treba dokazati da je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Po Lagrangeovu teoremu postoji neki $x_0 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ takav da je $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x_0)$. Budući da je $x_2 - x_1 > 0$ i $f'(x_0) \geq 0$, to je $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, dakle, $f(x_1) \leq f(x_2)$. Obratno, neka je $f|_I$ derivabilna i uzlazna. Promatrajmo bilo koju točku $x_0 \in I$. Treba dokazati da je $f'(x_0) \geq 0$. Primijetimo da je, zbog uzlaznosti, $(\forall x \in I,\ x \neq x_0)$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Zbog derivabilnosti je tada i $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. ■

Posve slično Teoremu 4.1.15 dokazuje se i ovaj teorem:

Teorem 4.1.17 *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *derivabilna na intervalu* $I \subseteq X$. *Tada je* $f|_I$ *silazna ako i samo ako je* $f'(x) \leq 0$ *za svaki* $x \in I$.

Primjer 4.1.21 Odredimo najveće intervale na kojima je polinom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^3 - 3x + 8$, monoton. Po Teoremima 4.1.15 i 4.1.16, zadatak se svodi na rješavanje nejednadžba $p'(x) \geq 0$ i $p'(x) \leq 0$. Budući da je $p'(x) = 3x^2 - 3$, dobivamo $p'(x) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$ i $p'(x) \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$. Prema tomu, p raste na $\langle \cdot, -1]$ i $[1, \cdot\rangle$, a pada na $[-1, 1]$.

Sljedeću činjenicu ćemo trebati poslije - u suptilnijoj analizi lokalnih ekstrema (v. Definiciju 4.1.3).

Lema 4.1.2 *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *derivabilna u točki* x_0. *Ako je* $f'(x_0) < 0$ $(f'(x_0) > 0)$ *onda postoji neki* $\epsilon > 0$ *takav da je* $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$ *za svaki* $x \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 \rangle$ *i* $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ *za svaki* $x \in \langle x_0, x_0 + \epsilon \rangle$.

Dokaz. Obstojnost $f'(x_0)$ povlači funkcijinu definiranost na nekom intervalu $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subseteq X$, $r > 0$. Po definiciji je

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

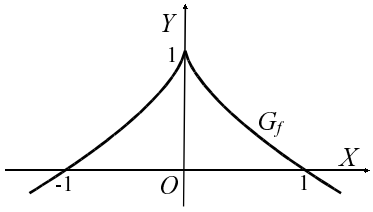
što povlači da za svaki $h > 0$ postoji neki $\epsilon > 0$, $\epsilon \leq r$, takav da je $|f'(x_0) - \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}| < h$ čim je $|\Delta x| \leq \epsilon$. Slijedi, ako je $f'(x_0) < 0$, onda je $f'(x_0) + h < 0$ čim je $|f'(x_0)| > h$, pa je tada i $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0$. Dakle, $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ čim je $\Delta x < 0$, a $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ čim je $\Delta x > 0$. Slično se zaključuje u slučaju $f'(x_0) > 0$. ■

Definicija 4.1.3 *Reći ćemo da funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ima u točki $x_0 \in X$* ***lokalni minimum****, odnosno,* ***lokalni maksimum****, ako postoji interval I što sadrži x_0, takav da je, za svaki $x \in (X \setminus \{x_0\}) \bigcap I$, $f(x_0) < f(x)$, odnosno, $f(x_0) > f(x)$. Zajednički naziv za vrijednost $f(x_0)$, koja je lokalni minimum ili lokalni maksimum, jest* ***lokalni ekstrem****.*

Napomena 4.1.8 Nijedan od lokalnih minimuma (lokalnih maksimuma) ne mora, općenito, biti najmanja (najveća) vrijednost promatrane funkcije. Primjerice, čak ni *omeđeno preslikavanje* s (i beskonačno) mnogo lokalnih ekstrema ne mora imati (globalni) ekstrem . Ali ni obratno, čak za *preslikavanje na segmentu,* minimum (maksimum) nije nužno najmanji (najveći) lokalni minimum (lokalni maksimum).

Napomena 4.1.9 Po Fermatovu teoremu (Teorem 4.1.7), ako funkcija f ima u točki x_0 lokalni ekstrem i ako postoji $f'(x_0)$ onda je $f'(x_0) = 0$.

Primjer 4.1.22 Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, ima u točki $x_0 = 0$ lokalni (i globalni) maksimum (v. graf). Naime, $f(0) = 1 > 1 - \sqrt[3]{x^2} = f(x)$ za svaki $x \neq 0$. Međutim, f nije derivabilna u 0. ($f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ za svaki $x \neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.)



Definicija 4.1.4 *Reći ćemo da je točka x_0* ***kritična točka*** *funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ako je f neprekidna u x_0 i ili f nije derivabilna u x_0 ili je $f'(x_0) = 0$. Pritom, u slučaju $f'(x_0) = 0$, x_0 nazivamo i* ***stacionarnom točkom*** *funkcije f.*

Lako je dokazati sljedeći teorem:

Teorem 4.1.18 (Nuždan uvjet za ekstrem) *Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki x_0 i ako postoji interval I takav da je $x_0 \in I \subseteq X$, onda je x_0 kritična točka od f.*

Primijetimo da *obrat* toga *teorema ne vrijedi*, jer iz $f'(x_0) = 0$ ne slijedi da je vrijednost $f(x_0)$ lokalni ekstrem. Primjerice, za prirodnu potenciju $x \mapsto f(x) = x^3$ (kubiranje) je $f'(0) = 0$, ali $f(0)$ nije njezin lokalni ekstrem.

Da bismo u dvama sljedećim teoremima pojednostavnili iskaze i dokaze dogovorimo se o ovomu:

Reći ćemo da funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, **prolazom kroz točku** x_0 **mijenja predznak**, ako postoji $\epsilon > 0$ takav su vrijednosti od $f|_{(X \cap \langle x_0 - \epsilon, x_0 \rangle)}$ stalnog i protivnog predznaka vrijednostima od $f|_{(X \cap \langle x_0, x_0 + \epsilon \rangle)}$. (Ako su promatrane funkcijske vrijednosti stalnog i istog predznaka, kažemo da f **prolazom kroz točku** x_0 **ne mijenja predznak**.)

Teorem 4.1.19 (Prvi dostatni uvjet za ekstrem) *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na intervalu $I \subseteq X$. Ako prolazom kroz točku $x_0 \in I$ derivacija $(f|_I)'$ mijenja predznak, onda funkcija f ima u x_0 lokalni ekstrem. Pritom, ako se, porastom varijable x, predznak od f' promijeni iz negativnoga u pozitivan, f u x_0 ima lokalni minimum, a u protivnom - lokalni maksimum.*

Dokaz. Po pretpostavci, postoji $\epsilon > 0$ takav da su vrijednosti od $(f|_{\langle x_0 - \epsilon, x_0 \rangle})'$ stalnog i protivnog predznaka vrijednostima od $(f|_{\langle x_0, x_0 + \epsilon \rangle})'$, $\langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle \subseteq I \subseteq X$. Neka je, recimo, $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 \rangle$, a $f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle x_0, x_0 + \epsilon \rangle$. Treba dokazati da je $f(x_0)$ lokalni maksimum, tj. da je $f(x_0) > f(x)$ za svaki $x \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle \setminus \{x_0\}$. Promatrajmo bilo koji $x \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 \rangle$. Po Lagrangeovu teoremu postoji neki $x_1 \in [x, x_0]$ za koji je $f(x_0) - f(x) = f'(x_1)(x_0 - x)$. Zbog $f'(x_1)(x_0 - x) > 0$ slijedi $f(x_0) > f(x)$. Promatrajmo sad bilo koji $x \in \langle x_0, x_0 + \epsilon \rangle$. Lagrangeov teorem daje $f(x) - f(x_0) = f'(x_2)(x - x_0)$ za neki $x_2 \in [x_0, x]$. Zbog $f'(x_2)(x - x_0) < 0$ opet slijedi $f(x_0) > f(x)$. Posve slično se dokazuje kad f' prolazom kroz x_0 mijenja predznak od "$-$" na "$+$". ■

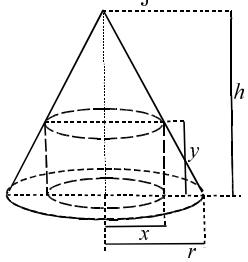
Teorem 4.1.20 (Drugi dostatni uvjet za ekstrem) *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, dvaput derivabilna u svojoj kritičnoj točki x_0 i neka je $f''(x_0) \neq 0$. Tada funkcija f ima u točki x_0 ekstrem, i to maksimum čim je $f''(x_0) < 0$, odnosno, minimum čim je $f''(x_0) > 0$.*

Dokaz. Budući da postoji $f''(x_0)$, to po derivacijinoj definiciji postoje neki $\epsilon > 0$ i $f'(x)$ za svaki $x \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle \equiv I \subseteq X$. Primijetimo da je kritična točka x_0 stacionarna jer po pretpostavci mora biti $f'(x_0) = 0$. Razmotrimo slučaj $f''(x_0) > 0$. Najprije,

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0},$$

pa je $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)$ za svaki x iz dostatno malog ϵ_1-intervala $I_1 \subseteq I$ oko točke x_0, $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon$. Dakle, ako je $x < x_0$ onda je $f'(x) < 0$, a ako je $x > x_0$ onda je $f'(x_0) > 0$. To znači da derivacija $(f|_I)'$ prolazom kroz točku x_0 mijenja predznak od "$-$" na "$+$" pa, po Teoremu 4.1.18, funkcija f ima u točki x_0 lokalni minimum. Posve slično se dokaže da u slučaju $f''(x_0) < 0$ funkcija f ima u točki x_0 lokalni maksimum. ■

Primjer 4.1.23 Promatrajmo skup svih valjaka što se mogu upisati (načinom oslikanim na crtežu dolje) u dani stožac određen baznim polumjerom r i visinom h. Kolika je visina onoga valjka što ima najveći obujam.



Označimo li s x polumjer, $0 \leq x \leq r$, a s y visinu, $0 \leq y \leq h$, upisanog valjka, dobivamo relaciju

$x : r = (h - y) : h,$ tj. $x = \frac{r(h-y)}{h}$.

Slijedi da je obujam upisanog valjka dan formulo

$V = \pi x^2 y = \frac{\pi r^2}{h^2} y(h - y)^2.$

Naš se zadatak, dakle, svodi na određivanje ekstremnih vrijednosti (posebice, maksimuma) realne funkcije $y \mapsto g(y) = V$ na segmentu $[0, h]$. Primijetimo da je funkcija g neprekidna (polinom), nenegativna i nekonstantna i da je $g(0) = g(h) = 0$. Po Teoremu 3.3.12, g poprima ekstremne vrijednosti na $[0, h]$, pa je njezina najmanja vrijednost 0, a najveća vrijednost joj je pozitivna i postiže se u nekoj točki $y_0 \in \langle 0, h \rangle$. Budući da je g derivabilna, po Fermatovu teoremu mora biti $g'(y_0) = 0$. Da bismo ju odredili, riješimo jednadžbu $g'(y) = 0$, tj.

$g'(y) = \frac{\pi r^2}{h^2}(h - y)(h - 3y) = 0,$

što daje $y_1 = h$, $y_2 = \frac{h}{3}$. Prvo rješenje otpada jer je $g(h) = 0$. Preostaje, dakle, ono drugo, tj. $y_0 = \frac{h}{3}$. Da bismo se i formalno uvjerili da je najveći obujam $V_{\max} = g(\frac{h}{3}) = \frac{4\pi r^2 h}{27}$, provjerimo je li $g''(\frac{h}{3}) < 0$ (v. Teorem 4.1.19)! Zaista,

$g''(y) = \frac{2\pi r^2}{h^2}(3y - 2h) \Rightarrow g''(\frac{h}{3}) = -\frac{\pi r^2 h}{h^2} < 0.$

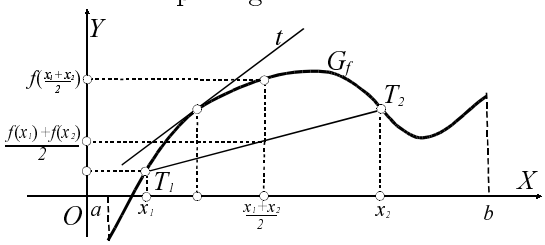
Definicija 4.1.5 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,* ***konveksna*** (***konkavna***) *na intervalu ili segmentu $I \subseteq X$, ako*

$(\forall x_1, x_2 \in I) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

$((\forall x_1, x_2 \in I) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2})$.

U slučaju stroge nejednakosti $>$ ($<$) govorimo o ***strogoj konveksnosti*** (***strogoj konkavnosti***).

Zanimljivo je i geometrijsko značenje upravo definiranih pojmova (v. crtež dolje). Naime, nije teško dokazati da je funkcija f konveksna (konkavna) na I točno onda kad je, za svaki par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, dužina $\overline{T_1T_2}$ "ispod" ("iznad") grafa pripadnoga suženja $f|_{[x_1,x_2]}$, pri čemu je $T_1 = (x_1, f(x_1))$ i $T_2 = (x_2, f(x_2))$. Pritom "ispod" i "iznad" uključuju i biti (dijelom ili sva) na grafu. U slučaju stroge konveksnosti (stroge konkavnosti), svaka točka T dužine $\overline{T_1T_2}$, $T \neq T_{1,2}$, je strogo "ispod" (strogo "iznad") pripadnoga grafa. Nadalje, ako je funkcija f derivabilna, lako se dokaže i ova karakterizacija: f je konveksna (konkavna) na I točno onda kad se, za svaki $x \in I$, njezin graf $G_{f|_I}$ nalazi "ispod" ("iznad") svoje tangente t u točki $T = (x, f(x))$. U slučaju stroge konveksnosti (stroge konkavnosti), graf $G_{f|_I}$ je strogo "ispod" (strogo "iznad"), osim u diralištu T, svake tangente. Napokon, ako je f konveksna (strogo konveksna; konkavna; strogo konkavna) na I, lako se vidi da je f konveksna (strogo konveksna; konkavna; strogo konkavna) i na svakom podintervalu ili podsegmentu od I.



Primjer 4.1.24 (a) Prirodna potencija $x \mapsto f(x) = x^2$ (kvadriranje) je strogo konkavna funkcija na $\mathbb{R}$.

(b) Prirodna potencija $x \mapsto f(x) = x^3$ (kubiranje) je strogo koveksna na $\langle \cdot, 0]$, a strogo konkavna na $[0, \cdot\rangle$.

(c) Svaka afina funkcija $x \mapsto f(x) = kx + l$, k i l realne konstante, je konveksna i konkavna na $\mathbb{R}$, ali nije strogo konveksna ni strogo konkavna ni na jednom segmentu ili intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Jednostavna analiza pokazuje da je funkcijina konveksnost (konkavnost), zapravo, lokalno svojstvo. U slučaju derivabilne funkcije moguće ga je opisati derivacijom (tangentom) kako slijedi:

Lema 4.1.3 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle \equiv I$. Tada je f konveksna (konkavna) na $[a, b]$ ako i samo ako je "lokalno konveksna" ("lokalno konkavna") na $\langle a, b\rangle$, tj. ako za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ postoji $\epsilon > 0$ takav da je graf od f na podintervalu $I_\epsilon \equiv \langle x - \epsilon, x + \epsilon\rangle \subseteq I$ "ispod" ("iznad") svoje tangente u točki $T = (x, f(x))$.*

Dokaz. Nužnost je očito istinita (v. i komentar uz Definiciju 4.1.5). Obratno, neka je ispunjen uvjet lokalne konveksnosti (lokalne konkavnosti) u svakoj točki $x \in I$. Dokažimo da je funkcija f konveksna (konkavna) na

$[a,b]$, tj. da je (v. komentar uz Definiciju 4.1.5), za svaku točku $x \in I$, graf $G_{f|_I}$ "ispod" ("iznad") svoje tangente u točki x! Pretpostavimo protivno, tj. da postoji neka točka $x \in I$ takva da graf $G_{f|_I}$ nije "ispod" ("iznad") pripadne tangente t_x. Tada postoji $x_0 \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ takav da je $f(x_0)$ veće (manje) od ordinate pripadne točke na tangenti t_x. Budući da je f neprekidna u točki x_0, to postoji neki interval $I_\delta \equiv \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ oko točke x_0 takav da je svaka funkcijska vrijednost $f(x)$, $x \in [a,b] \bigcap I_\delta$, veća (manja) od ordinate odgovarajuće točke na t_x. Slijedom toga, postoji i podsegment $[a_1, b_1] \subset [a,b]$, takav da je na njemu graf od f *strogo* "iznad" ("ispod") pravca t_x.To povlači da je, za svaki par $x_1, x_2 \in [a_1, b_1]$, $x_1 < x_2$, i graf od f na $[x_1, x_2]$ strogo "iznad" ("ispod") dužine $\overline{T_1 T_2}$, osim u T_1 i T_2, pri čemu je $T_1 = (x_1, f(x_1))$ i $T_2 = (x_2, f(x_2))$. (Naime, najveća (najmanja) vrijednost od f na $[x_1, x_2]$ je veća ili jednaka (manja ili jednaka) od $\max\{f(x_1), f(x_2)\}$ ($\min\{f(x_1), f(x_2)\}$).) Prema tomu, (v. komentar uz Definiciju 4.1.5) funkcija f je strogo konkavna (strogo konveksna) na podsegmentu $[a_1, b_1]$. Dakle, u svakoj točki iz $\langle a_1, b_1 \rangle$ je graf od f na $[a_1, b_1]$ strogo "iznad" (strogo "ispod"), osim u diralištu, pripadne tangente. Međutim, to se kosi s pretpostavljenom lokalnom konveksnosti (lokalnom konkavnosti) u svakoj točki iz $\langle a, b \rangle \supseteq \langle a_1, b_1 \rangle$. ■

Teorem 4.1.21 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq X$ i dvaput derivabilna na intervalu $\langle a, b \rangle \equiv I$. Tada je f konveksna (konkavna) na $[a,b]$ onda i samo onda, ako je $(f|_I)'' \leq 0$ ($(f|_I)'' \geq 0$).*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f konveksna (konkavna) na $[a,b]$ i dvaput derivabilna na $I \equiv \langle a, b \rangle$. Treba dokazati da je $(f|_I)'' \leq 0$ ($(f|_I)'' \geq 0$). Razmatrajmo slučaj konveksne funkcije f! Po Teoremu 4.1.16 je dostatno dokazati da je derivacija $(f|_I)'$ silazna funkcija. Promatrajmo bilo koji par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Jednadžbe pripadnih tangenata na G_f jesu

$t_i \ldots y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i), \quad x \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$

Zbog pretpostavljene konveksnosti mora biti

$f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \geq f(x), \quad x \in [a,b], i = 1, 2.$

Uvrštavajući $x = x_2$ u slučaju $i = 1$ te $x = x_1$ u slučaju $i = 2$, dobivamo

$f'(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i $f'(x_2) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Prema tomu, $f'(x_1) \geq f'(x_2)$ pa smijemo zaključiti da je $(f|_I)'$ silazna funkcija, a to smo i tvrdili. Posve slično se, koristeći Teorem 4.1.15, dokazuje u slučaju konkavne funkcije f.

Obratno, neka je $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) za svaki $x \in I$. Promatrajmo bilo koju točku $x_0 \in I$. Snagom Leme 4.1.3, dostatno je dokazati da je f lokalno konveksna (lokalno konkavna) u točki x_0. Jednadžba pripadne tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ jest

$t \ldots g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \; x \in \mathbb{R}.$

Definirajmo funkciju $h : I \to \mathbb{R}$ pravilom

$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.
Primijetimo da je $h(x_0) = 0$. Razmatrajmo slučaj $f''(x) \leq 0$, $x \in I$. Istražimo, prvo, ima li funkcija h lokalni ekstrem. Budući da je $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, to je x_0 njezina stacionarna točka (h' je neprekidna (v. Teorem 4.1.1, $h'' = (f|I)''$) i $h'(x_0) = 0$). Budući da je $h''(x_0) = f''(x_0) < 0$, Teorem 4.1.19 povlači da funkcija h ima u točki x_0 lokalni maksimum $h(x_0) = 0$. Dobili smo, dakle, da je $f(x) < g(x)$, $x \neq x_0$, na nekom podintervalu $I_\epsilon \equiv \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\rangle \subseteq I$. To povlači da je f lokalno konveksna u x_0. Na slični način se zaključuje u slučaju $f''(x) \geq 0$, $x \in I$. ■

Definicija 4.1.6 *Reći ćemo da funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ima u točki $x_0 \in X$* ***infleksiju*** *(ili* ***obratište****), ako postoji $\epsilon > 0$ takav da je f na $[x_0 - \epsilon, x_0] \subseteq X$ strogo konveksna i na $[x_0, x_0 + \epsilon] \subseteq X$ strogo konkavna ili obratno. Točku $T \equiv (x_0, f(x_0))$ nazivamo* ***infleksijskom točkom*** *na grafu G_f.*

Po Teoremu 4.1.20 slijedi da za dvaput derivabilnu funkciju f s infleksijom u točki x_0 mora vrijediti $f''(x_0) = 0$. Primijetimo da je taj uvjet nuždan ali ne i dostatan za obstojnost infleksijske točke. Kao (protu)primjer može poslužiti potencija $x \mapsto x^4$ u točki $x_0 = 0$. S tim u svezi, jednostavno je dokazati ovaj teorem:

Teorem 4.1.22 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, dva puta derivabilna na $\langle a, b\rangle \subseteq X$ i neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Ako je $f''(x_0) = 0$ i ako prolazom kroz točku x_0 druga derivacija f'' mijenja predznak, onda funkcija f ima infleksiju u točki x_0. (Ekvivalentan uvjet, pored $f''(x_0) = 0$, jest da prva derivacija f' ima u x_0 lokalni ekstrem, odnosno, da f' prolazom kroz x_0 ne mijenja predznak* - usp. Teorem 4.1.18)

Sljedeći teorem malo pobliže razlučuje lokalni ekstrem od infleksije poopćujući tako Teoreme 4.1.19 i 4.1.21.

Teorem 4.1.23 *Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ima na intervalu $\langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\rangle$, $\epsilon > 0$, derivaciju $(n-1)$-vog reda i n-tu derivaciju u točki x_0, $n \geq 2$. Tada vrijedi:*

(i) *Ako je $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ i n paran, onda funkcija f ima u točki x_0 lokalni ekstrem i to lokalni maksimum kad je $f^{(n)}(x_0) < 0$, a lokalni minimum kad je $f^{(n)}(x_0) > 0$;*

(ii) *Ako je $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ i n neparan, onda funkcija f ima u točki x_0 infleksiju.*

Dokaz. Ako je $n = 2$, tvrdnja je istinita po Teoremu 4.1.19. Neka je $n \geq 3$. Primijenimo na f i x_0 Taylorovu formulu s Lagrangeovim ostatkom $R_{n-2}(x)$, $x = x_0 + \Delta x$ (v. Teorem 4.1.12, (58) i (60)):
$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \cdots + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-2)!}(\Delta x)^{n-2} +$

$+\frac{f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1}$, $0<\vartheta<1$.

Pretpostavka povlači

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1}$.

Sada primjenom 4.1.2 zaključujemo (za $|\Delta x|$ dostatno malen) da je, u slučaju $f^{(n)}(x_0)<0$,

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)>f^{(n-1)}(x_0)=0$, čim je $\Delta x<0$, a

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)<0$, čim je $\Delta x>0$,

dok je, u slučaju $f^{(n)}(x_0)>0$,

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)<0$, čim je $\Delta x<0$ i

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)>0$, čim je $\Delta x>0$.

Po pretpostavci je n paran pa je $n-1$ neparan. Dakle,

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1}<0$, čim je $f^{(n)}(x_0)<0$, a

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$, čim je $f^{(n)}(x_0)>0$.

Time je tvrdnja (i) dokazana.

(ii). Opet ćemo primijeniti pripadnu Taylorovu formulu s Lagrangeovim ostatkom $R_{n-2}(x)$, $x=x_0+\Delta x$, koja se sada svodi na

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1}$.

Promatrajmo pripadnu tangentu t u x_0 (v. dokaz Teorema 4.1.20)

$t\ldots g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Primijetimo da je

$f(x_0+\Delta x)-g(x_0+\Delta x)=\frac{f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1}$.

Po Lemi 4.1.2 slijedi (za $|\Delta x|$ dostatno malen) da je, u slučaju $f^{(n)}(x_0)<0$,

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)>f^{(n-1)}(x_0)=0$, čim je $\Delta x<0$, a

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)<0$, čim je $\Delta x>0$,

dok je, u slučaju $f^{(n)}(x_0)>0$,

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)<0$, čim je $\Delta x<0$ i

$f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)>0$, čim je $\Delta x>0$.

Budući da je n neparan to je $n-1$ paran, pa je $(\Delta x)^{n-1}>0$. Slijedi:

$f(x_0+\Delta x)-g(x_0+\Delta x)=\frac{f^{(n-1)}(x_0+\vartheta\Delta x)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1}>0$,

čim je $f^{(n)}(x_0)<0$ i $\Delta x<0$;

$f(x_0+\Delta x)-g(x_0+\Delta x)<0$, čim je $f^{(n)}(x_0)<0$ i $\Delta x>0$;

$f(x_0+\Delta x)-g(x_0+\Delta x)<0$, čim je $f^{(n)}(x_0)>0$ i $\Delta x<0$;

$f(x_0+\Delta x)-g(x_0+\Delta x)>0$, čim je $f^{(n)}(x_0)>0$ i $\Delta x>0$.

Prema tomu, u slučaju $f^{(n)}(x_0)<0$, na dostatno malom intervalu je lijevo od x_0 funkcijski graf strogo "iznad" tangente t, a desno od x_0 strogo "ispod" t. tangente. Obratno je, pak, u slučaju $f^{(n)}(x_0)>0$. Zaključujemo da postoji neki $\delta>0$ takav da je, u slučaju $f^{(n)}(x_0)<0$, funkcija f strogo konkavna na $[x_0-\delta,x_0]$ a strogo konveksna na $[x_0,x_0+\delta]$, dok je u slučaju $f^{(n)}(x_0)>0$ upravo obratno. Slijedi da u oba slučaja, čim je dakle $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, funkcija f ima u točki x_0 infleksiju. ■

Primjer 4.1.25 Odredimo lokalne ekstreme i infleksije za funkciju

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-x}.$

Primijetimo da funkcija f (umnožak eksponencijalne funkcije i polinoma) ima n-tu derivaciju $f^{(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prva, druga i treća derivacija od f jesu redom

$f'(x) = (\frac{x^2}{2} - x)e^{-x},$

$f''(x) = (-\frac{x^2}{2} + 2x - 1)e^{-x},$

$f'''(x) = (\frac{x^2}{2} - 3x + 3)e^{-x}.$

Jednadžba $f'(x) = 0$ ima za rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Budući da je $f''(0) = -1 < 0$ i $f''(2) = e^{-2} > 0$, funkcija f ima u točki 0 lokalni maksimum $f(0) = 0$, a u točki 2 lokalni minimum $f(2) = -2e^{-2}$. Jednadžba $f''(x) = 0$ ima za rješenja $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ i $x_4 = 2 + \sqrt{2}$. Budući da je

$f'''(2 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-2+\sqrt{2}} < 0 \quad i \quad f'''(2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-2-\sqrt{2}} > 0,$

funkcija f ima točkama $2 - \sqrt{2}$ i $2 + \sqrt{2}$ infleksije. (U $2 - \sqrt{2}$ je prijelaz iz konkavnosti u konveksnost, a u $2 + \sqrt{2}$ - iz konveksnosti u konkavnost.) Ordinate infleksijskih točaka jesu $f(2 - \sqrt{2}) = (-3 + 2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$ i $f(2 + \sqrt{2}) = (-3 - 2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$.

Pri crtanju funkcijinog grafa dobro koriste i pravci (čim postoje) prema kojima taj graf "konvergira". Točna definicija jest ova:

Definicija 4.1.7 *Neka je dana funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Reći ćemo da funkcija f, odnosno njezin graf G_f, ima za* ***asimptotu*** *pravac $p \cdots g(x) = kx + l$, $x \in \mathbb{R}$, ako je*

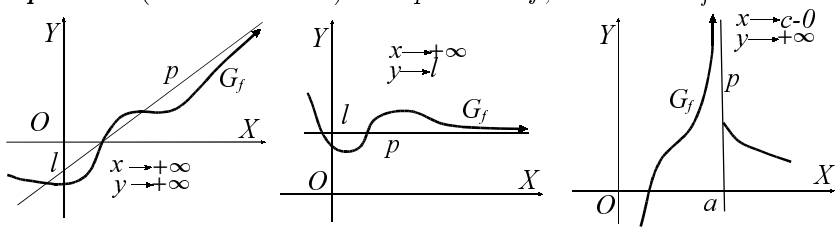
$\lim\limits_{\infty} |f - g| = 0.$

Pritom ∞ označuje bilo $-\infty$ bilo $+\infty$. (Primijetimo da X ne smije biti omeđen!) *Ako je pritom $k = 0$, tj. $g = c_l$, govorimo o* ***vodoravnoj*** *(ili* ***horizontalnoj****) asimptoti, a ako je $k \neq 0$ - o* ***kosoj*** *asimptoti. U slučaju pravca*

$p \cdots x = a$, asimptotski uvjet jest

$\lim\limits_{a \pm 0} f = \infty,$

tj. da barem jedna od graničnih vrijednosti funkcije f u točki a, slijeva - $a - 0$ ili zdesna - $a + 0$, divergira prema $-\infty$ ili $+\infty$. Pritom kažemo da je p ***uspravna*** *(ili* ***vertikalna****) asimptota od f, odnosno G_f.*



Po Definiciji 4.1.7 je pravac $p \cdots y = kx + l$ asimptota od G_f točno onda kad je

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - kx - l| = 0 \quad \text{ili} \tag{63}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - kx - l| = 0. \tag{64}$$

Dijeleći te relacije varijablom x i graničnim prijelazima $x \to \pm\infty$ dobivamo smjerovni koeficijent k i odsječak na Y-osi l:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx), \tag{65}$$

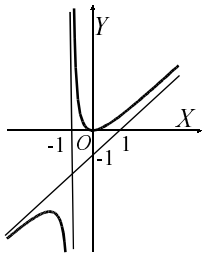
pri čemu ∞ označuje $+\infty$ ili $-\infty$.

Primjer 4.1.26 Za racionalnu funkciju $x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ odredimo pripadne asimptote. Primijetimo da je definicijsko područje promatrane funkcije skup $X = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Za graničnu vrijednost u polu -1, $\lim\limits_{-1} f$, dobivamo $\lim\limits_{x\to-1-0} \frac{x^2}{1+x} = -\infty$ (i $\lim\limits_{x\to-1+0} \frac{x^2}{1+x} = +\infty$), pa je pravac $x = -1$ uspravna asimptota. Obstojnost neke kose ili vodoravne asimptote provjeravamo formulama (64), tj.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1 = k;$

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} = -1 = l.$

Prema tomu, pravac $p \cdots y = x - 1$ jest kosa asimptota za f (v. crtež).



Radi lakšeg i cjelovitijeg istraživanja funkcijina tijeka i crtanja pripadnoga grafa G_f korisno je držati se sljedećih naputaka, koji sažimlju sva prethodna razmatranja:

- odrediti definicijsko područje $X \subseteq \mathbb{R}$ (kad nije eksplicite navedeno);
- istražiti (ne)omeđenost;
- istražiti parnost i neparnost (kad god to ima smisla);
- istražiti (ne)periodičnost (kad god to ima smisla);
- istražiti ponašanje u blizini "rubnih" točaka definicijskoga područja;
- odrediti sjecišta s koordinatnim osima (ako postoje);
- istražiti (ne)prekidnost;
- istražiti ponašanje u blizini prekidnih točaka;
- odrediti asimptote (ako postoje);
- istražiti (ne)derivabilnost i odrediti kritične točke;
- istražiti (ne)monotonost po intervalima;
- odrediti lokalne ekstreme (ako postoje);
- istražiti (ne)konveksnost i (ne)konkavnost po intervalima;
- odrediti infleksijske točke.

Primjer 4.1.27 Istražimo tijek i nacrtajmo graf realne funkcije zadane analitičkim zapisom

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

Iz zapisa slijedi da je $X = \mathbb{R}$, tj. da se radi o funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$. Jednostavnim uvidom otkrivamo da funkcija f nije parna ni neparna ni periodička. Graf G_f presijeca Y-os ($x = 0$) u točki $f(0) = 0$, a X-os ($f(x) = 0$) u točkama $x_1 = x_2 = 0$ i $x_3 = 2$. Dakle, 0 i 2 su tzv. *nultočke* funkcije f, pri čemu je 0 dvostruka, a 2 jednostruka ili obična nultočka. Budući da je f elementarna funkcija, ona je neprekidna. Istražimo joj granično ponašanje u ∞!

$$\lim_{\infty} f = \lim_{\infty}(x \cdot \sqrt[3]{\tfrac{2}{x} - 1}) \Rightarrow (\lim_{-\infty} f = +\infty;\ \lim_{+\infty} f = -\infty).$$

Posebice, funkcija f nije omeđena. Za asimptote, pogledajmo

$$\lim_{\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{\infty}(\sqrt[3]{\tfrac{2}{x} - 1}) = -1 = k;$$

$$\lim_{\infty}(f(x) - kx) = \lim_{\infty}(x(\sqrt[3]{\tfrac{2}{x} - 1} + 1)) \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{0}{0})}{=}$$

$$\lim_{\infty} \frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(\frac{2}{x}-1)^2}}\cdot\frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \tfrac{2}{3},$$

pri čemu smo rabili L'Hospitalovo pravilo (v. Teorem 4.1.11 i Napomenu 4.1.3). Dakle, pravac $y = -x + \frac{2}{3}$ je tražena (kosa) asimptota. Primijenjujući formalna derivacijska pravila za elementarne funkcije, dobivamo

$$f'(x) = \left((2x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right)' = \cdots = \tfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}.$$

Primijetimo da f nije derivabilna u točkama $x = 0$ i $x = 2$ pa su to dvije njezine kritične točke. Treća kritična točka $x = \frac{4}{3}$ je stacionarna (rješenje za $f'(x) = 0$).

Nejednadžba $f'(x) > 0$ postaje, množeći ju s pozitivnim ($0 \neq x \neq 2$) izrazom $3x\sqrt[3]{x(x-2)^2}$, nejednadžbom $x(4 - 3x) > 0$. Prema tomu, funkcija f je uzlazna na intervalu $\langle 0, \frac{4}{3}\rangle$. Sličnom tehnikom se dobiva da je f silazna na $\langle \cdot, 0\rangle \bigcup \langle \frac{4}{3}, \cdot\rangle$.

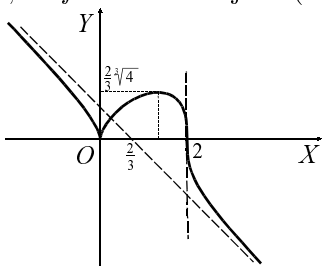
Lako se provjeri da postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(x) > f(0) = 0$ za svaki $x \in \langle -\epsilon, \epsilon\rangle \setminus \{0\}$ (primjerice, $\epsilon = 1$), pa funkcija f ima u kritičnoj (i svojoj dvostrukoj nul-) točki 0 lokalni minimum. S druge strane, prolazom kroz kritičnu (i svoju običnu nul-) točku 2 funkcija f mijenja predznak, pa u njoj ne postoji lokalni ekstrem. (Poslije ćemo vidjeti da funkcija f ima u točki 2 infleksiju.) Za istraživanje u trećoj kritičnoj (stacionarnoj) točki $\frac{4}{3}$ smijemo rabiti derivacije viših redova. Budući da je

$$f''(x) = \left(\tfrac{1}{3}(4 - 3x)(x(2 - x^2))^{-\frac{2}{3}}\right)' = \cdots = \tfrac{-8}{9x(2-x)\sqrt[3]{x(2-x)^2}},$$

$x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$, to je $f''(\frac{4}{3}) < 0$, pa f ima u točki $\frac{4}{3}$ lokalni maksimum $f(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}$

Primijetimo da je $f''(x) \neq 0$ za svaki x iz svojega definicijskog područja, pa funkcija f nema infleksije ni u jednoj točki u kojoj je dvaput derivabilna. Rješavajući nejednadžbu $f''(x) > 0$, množeći ju pozitivnim izrazom $9x(2 -$

$x)^2\sqrt[3]{x(2-x)^2}$, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu $-8(2-x)>0$. Njezino rješenje jest svaki $x>2$. To znači da je funkcija f strogo konkavna na $[2,\cdot\rangle$. Na isti način se dobiva da je f strogo konveksna na $\langle\cdot,0]$ i na $[0,2]$. (*Oprez*! Funkcija f nije konveksna i na njihovoj uniji $\langle 0,2]$; f nije konveksna ni konkavna ni na jednom *intervalu* što sadrži točku $x=0$ ili točku $x=2$.) Napokon, budući da prolazom kroz točku 2 funkcije f od konveksne postaje konkavnom, to f ima infleksiju u (svojoj nul-) točki 2.



4.1.8 Vježbe

1. Dokazati da je svaka točka $x\in\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ neizolirana točka od $\mathbb{Q}$.
2. Derivirati grafički prirodnu potenciju $x\mapsto x^2$ (kvadriranje).
3. Derivirati po definiciji funkciju $x\mapsto e^{x^2}$.
4. Izračunati $f'(e^{\frac{\pi}{6}})$ ako je $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subseteq\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{\sin(\ln x)}$.
5. Neka su pravci t i n redom tangenta i normala u bilo kojoj točki na astroidi $x=a\cos^3\varphi,\quad y=a\sin^3\varphi,\quad \varphi\in[0,2\pi\rangle$ (v. Primjer 2.3.6).
Dokazati da je $4d(t;O)^2+d(n;O)^2=a^2$, pri čemu je $O=(0,0)$ ishodište, a d označuje udaljenost.
6. Neka je kuglin polumjer (izmjeren s pogrješkom) $r=3\,\mathrm{cm}\pm0,1\,\mathrm{mm}$. Odredit (do na pogrješku) kuglin obujam V.
Rješenje. Označimo $r_0=3\,\mathrm{cm}$ i $dr=\Delta r=0,1\,\mathrm{mm}=0,01\,\mathrm{cm}$. Po formuli (45) je

$$V=f(r)=\tfrac{4\pi r^3}{3}=f(r_0)\pm f'(r_0)dr=$$
$$\tfrac{4\pi 3^3}{3}\pm 4\pi 3^2\cdot 0,01=(36\pm 0,36)\pi\,\mathrm{cm}^3.$$

7. Neka je jednadžbama $x=t+\ln t$ i $y=t^2$ parametarski zadana funkcija $x\mapsto f(x)=y$. Odrediti tangentu pripadnoga grafa G_f kojoj je smjerovni koeficijent $k=1$.
Rješenje. Neka u diralištu (x_0,y_0) parametar ima vrijednost t_0. Po formuli (2) iz §4.1.1 je

$$1=f'(x_0)\overset{(54)}{=}(\tfrac{\dot y}{\dot x})(t_0)=\tfrac{2t_0}{1+\frac{1}{t_0}}=\tfrac{2t_0^2}{t_0+1}\Rightarrow(t_0)_1=1,\ (t_0)_2=-\tfrac{1}{2}.$$

Budući da je $(t_0)_2=-\frac{1}{2}$ izvan definicijskoga područja ($t\in\mathbb{R}^+$), traženo rješenje se dobiva za $t_0=1$. Dakle, $x_0=1+\ln 1=1$ i $y_0=1^2=1$, pa je tangentina jednadžba $y=x$.
8. Koliko članova Maclaurinova razvoja elementarne funkcije $f(x)=\ln(1+x)$ treba uzeti da bi se broj $\ln 2$ izračunao s točnosti do 10^{-5} (tj. da apsolutna pogrješka ne bude veća od 10^{-5})?

9. Odrediti sumu $s : X \to \mathbb{R}$ potencijskoga reda
$\sum \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$ (usp. Primjer 4.1.20).

10. Smije li se funkcijski red
(a) $\sum(\frac{\sin nx}{n} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1})$, $x \in [0, 2\pi]$;
(b) $\sum \sin^n x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2} - \epsilon]$, $\epsilon > 0$,
derivirati "član po član"? Pojasnite što se zbiva u primjeru (b) kad se dopusti $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

11. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokazati da postoji neki $\epsilon > 0$ takav su vrijednosti $f(x) < 0$ za $x \in \langle -\epsilon, 0\rangle$ i $f(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \epsilon\rangle$. Nadalje, dokazati da je funkcija f derivabilna, ali da nije monotona ni na jednom intervalu što sadrži točku $x = 0$. Je li f' neprekidna u točki $x = 0$?

12. Dokazati ovaj *Darbouxov teorem*: Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na segmentu $[a, b] \subseteq X$ i ako je $f'(a) \neq f'(b)$, onda derivacija f' poprima svaku vrijednost između $f'(a)$ i $f'(b)$. (Primijetimo da f' ne mora biti neprekidna!)

13. Nekom pravokutniku dva vrha leže na grafu G_f, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, a druga dva na asimptoti toga grafa. Posve odrediti te vrhove pod uvjetom da pravokutnikova površina bude najveća.

14. Računom potvrditi da su $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$ infleksijske točke za polinom $p(x) = (2x - 3)(x - 3)^5$. Odrediti i pripadne intervale na kojima je p konveksan, odnosno, konkavan.

15. Provjerom potvrditi da su pravci $x = 2$, $y = 3$ i $y = \frac{x}{2} + 4$ asimptote za funkciju $x \mapsto f(x) = 3 + \frac{x^3+\sqrt{x^6-1}}{4(x-2)^2}$.

16. Istražiti funkcijin tijek i nacrtati pripadni graf:
(a) $f(x) = x|x| - 1$; (b) $f(x) = x + \sin x$; (c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

17. Istražiti kakva svojstva ima funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u i "blizu" točke $x = 0$, ako je $f(0) = 0$ i:
(a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$; (b) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$;
(c) $f(x) = x^2(2 + \sin \frac{1}{x^2})$, $x \neq 0$; (d) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$;
(e) $f(x) = x^2(1 + x^2 \sin \frac{1}{x})$, $x \neq 0$.

Dio II

VIŠA MATEMATIKA, II

PREDGOVOR

Ova skripta su prirodni nastavak autorovih skripata Viša matematika, I, (i oznake se nastavljaju) i tek zajedno s njima tvore potpunu cjelinu. Skripta sadrže matematičko gradivo što ga obuhvaća predmet pod uobičajenim nazivom Viša matematika II, a predaja se kao drugi dio temeljnoga matematičkog predmeta na svim tehničkim, tehnološkim i srodnim fakultetima. Skripta mogu poslužiti i kao pomoćni udžbenik iz Matematičke analize II na Prirodoslovno-matematičkim fakultetima. (Pritom se ispuštaju neki dijelovi 6. i cijelo 7. poglavlje.) Radi se, ponajprije, o analizi realnih funkcija više realnih varijabla.

Početno gradivo (integralni račun za funkcije jedne varijable) se nastavlja na diferencijalni račun iz 4. poglavlja u prvim skriptama. Slijede 5. poglavlje o realnim funkcijama više varijabla, 6. - izbor iz vektorske analize primjeren potrebama tehničkih fakulteta te 7. poglavlje - o rješavanju običnih diferencijalnih jednadžaba što se prirodno pojavljuju u širokoj tehničko-tehnološkoj praksi.

Poglavlja se dijele na glavne teme - odjeljke, a ovi na osnovne tematske jedinice - pododjeljke. Označavanje prati poglavlja i odjeljke. Primjerice, Teorem 6.3.2 označuje drugi teorem u trećemu odjeljku šestoga poglavlja. Obradu svake tematske jedinice prate odgovarajući primjeri, a svaki se odjeljak svršava pododjeljkom "Vježbe" sa zadacima za provjeru ispravne usvojenosti izloženoga gradiva. Tako i ova skripta sadrže malu ali probranu zbirku - vježbenicu.

Sadržaj ovih skripata je napisan na početku Više matematike, I.

Veliku zahvalnost dugujem dr. sc. Branku Červaru koji narisao sve crteže i bitno poboljšao grafički izgled konačnoga teksta.

Unaprijed zahvaljujem svakom čitatelju koji će mi ukazati na neku pogrješku ili propust i predložiti ispravak ili poboljšanje.

U Splitu, mjeseca svibnja, g. G. 2000.

Nikica Uglešić
[elektronička adresa: uglesic@mapmf.pmfst.hr]

4.2 NEODREĐENI INTEGRAL

Infinitezimalni račun, kako smo već spomenuli, vuče korijene iz Newtonovih i Leibnizovih radova o problemima "trenutne" brzine i krivuljine tangente. Od tada pa do danas, skoro triipolstoljetna teorija, primjena i praksa pokazuju da se mnogi tehničko-tehnološki, a i ini problemi svode na probleme infinitezimalnoga računa. Među njima, pak, mnogi se svode na ovo pitanje: Je li dana realna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivacija neke realne funkcije $g : X \to \mathbb{R}$? Nadalje, ako je odgovor na to pitanje potvrdan, zadatak je odrediti funkciju g, tj. riješiti jednadžbu (u skupu realnih funkcija $\mathbb{R}^X$) $g' = f$, pri čemu se za dani f traži g. Pokazat ćemo da ta jednadžba ili nema rješenja ili ih ima beskonačno mnogo. Skup svih pripadnih rješenja ćemo nazvati (neodređenim) *integralom* funkcije f i pritom ćemo govoriti da smo funkciju f *integrirali*. Pokazat će se da je integriranje tehnički neusporedivo složeniji račun-postupak od deriviranja, premda se, na neki način, radi o obratnomu računu.

Ovdje ćemo, jednostavnosti radi i kad to ne bude imalo zasebnog utjecaja, nazivom **interval** i oznakom I obuhvatiti sve mogućnosti (v. 1.1.3): $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle \cdot, b\rangle$, $\cdots$, $\langle \cdot, \cdot\rangle = \mathbb{R}$. Štoviše, ponekad će I označavati i neku uniju disjunktnih intervala, jer će, najčešće, definicijska područja promatranih funkcija biti ili intervali ili razlike nekih intervala i prebrojivih podskupova od $\mathbb{R}$.

4.2.1 Pojam i osnovna svojstva neodređenog integrala

Definicija 4.2.1 *Neka su dani interval (ili njihova unija) I, prebrojiv podskup $A \subset I$ funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, pri čemu je $I \setminus A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. Svaku neprekidnu funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A$, nazivamo* ***primitivnom funkcijom*** *za funkciju f na intervalu I.*

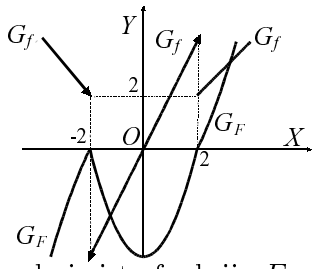
Primjer 4.2.1 Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2, & x < -2 \\ x^2 - 4, & 2 \le x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2, & x \ge 2 \end{cases},$$

je primitivna funkcija za funkciju $f : \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ 2x, & -2 < x < 2 \\ x, & x \ge 2 \end{cases},$$

jer je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$ (v. crtež). (Ovdje je $I = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $A = \{-2, 2\}$.)



Primijetimo da je ista funkcija F primitivna funkcija i za funkcije

$$f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} -x,\ x \le -2 \\ 2x,\ -2 < x < 2 \\ x,\ x \ge 2 \end{cases},\ f_2(x) = \begin{cases} -x,\ x < -2 \\ 2x,\ -2 \le x < 2 \\ x,\ x \ge 2 \end{cases},$$

kao i za mnoge druge koje se smiju razlikovati od f, f_1 ili f_2 po vrijednostima u točkama -2 i 2.

Primjer 4.2.2 Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, su između ostalih i ove funkcije primitivne (na $I = \mathbb{R}$):

$F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 - 3$, $F_3(x) = x^2 + \sqrt{5}$ $(A = \emptyset)$.

Funkcija $x \mapsto G(x) = \arcsin x$ je primitivna za funkciju $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $I = X = \langle -1, 1\rangle$, $A = \emptyset$. (Primijetimo da se ovdje za I smije uzeti i $[-1, 1\rangle$, $\langle -1, 1]$, $[-1, 1]$ redom, s pripadnim suženjima od arcsin, čim je $A = \{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$ redom.) Funkcija $x \mapsto H(x) = \frac{1}{x}$ je primitivna za funkciju $x \mapsto h(x) = -\frac{1}{x^2}$ na $I = X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $A = \emptyset$. Napokon, primijetimo i to da je funkcija $F_1(x) = x^2$ primitivna ne samo za funkciju $f(x) = 2x$ nego i za funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases},\ f_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \notin \mathbb{N} \\ 0, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Jedan od temeljnih teorema matematičke analize jest onaj o dovoljnim uvjetima za obstojnost primitivne funkcije. Mi ćemo ga iskazati i dokazati (u posebnom slučaju) u idućemu odjeljku po uvođenju pojma *određenog integrala*. A ovdje ćemo dokazati da je, grubo govoreći, dostatno poznavati jednu (bilo koju) primitivnu funkciju za danu funkciju f da bi se znale i "sve" ostale njezine primitivne funkcije. No, to podrazumijeva pretpostavku da su te primitivne funkcije derivabilne (na cijelom intervalu) i da im se derivacije podudaraju (ali *ne* nužno s $f|_I$ u svakoj točki!).

Teorem 4.2.1 *Ako za danu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq X$, onda je svaka funkcija $G : I \to \mathbb{R}$, $G = F + c_r|_I$, gdje je c_r konstantna funkcija u (bilo koji) $r \in \mathbb{R}$, primitivna za funkciju f. Štoviše, ako su $F, G : I \to \mathbb{R}$ derivabilne primitivne funkcije za f i pritom je $F' = G'$, onda je $G = F + c_r|_I$, za neki $r \in \mathbb{R}$. (Sažeto: "Derivabilna primitivna funkcija je jednoznačno određena do na aditivnu konstantu".)*

Dokaz. Jasno, dostatno je dokazati drugu tvrdnju. Neka su F i G bilo koje dvije derivabilne primitivne funkcije za f na I i neka je $F' = G'$. Tada

je funkcija $H : I \to \mathbb{R}$, $H = G - F$, derivabilna i $H' = c_0|_I$. Promatrajmo bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Suženje $H|_{[x_1,x_2]}$ ima derivaciju jednaku nulkonstanti $c_0|_I$ pa je, po Teoremu 4.1.10, $H|_{[x_1,x_2]}$ neka konstantna funkcija $c_r|_{[x_1,x_2]}$. Prema tomu, $(G-F)|_{[x_1,x_2]} = c_r|_{[x_1,x_2]} \Rightarrow G(x) = F(x)+r$, $x \in [x_1, x_2]$. Budući da su F i G neprekidne funkcije i $x_1, x_2 \in I$ bilo koje točke, to je $G = F + c_r|_I$. ■

Definicija 4.2.2 *Za danu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, skup svih njezinih primitivnih funkcija na intervalu (ili njihovoj uniji) I nazivamo* ***neodređenim integralom*** *funkcije f na intervalu I i označujemo s $\int f(x)dx$.*

U skladu s Teoremom 4.1.1, ima smisla pisati
$\int f(x)dx = F(x) + c$, $x \in I \setminus A$,
gdje F neka (bilo koja) primitivna funkcija za f na I, a c oznaka za opću konstantu. Uobičajilo se funkciju f nazvati **integrandom** (ili **podintegralnom funkcijom**), x - **integracijskom varijablom**, a c - **integracijskom konstantom**.

Primjer 4.2.3 (a) $\int \sin x dx = -\cos x + c$, jer je $(-\cos x + c)' = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, jer je $(\arcsin x + c)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

(c) $\int 2|x|dx = \int \left(\begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \right) dx = \begin{cases} x^2 + c, & x \geq 0 \\ -x^2 + c, & x < 0 \end{cases}$,

jer je $\left(\begin{cases} x^2 + c, & x \geq 0 \\ -x^2 + c, & x < 0 \end{cases} \right)' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} = 2\,|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

(Funkcija $x \mapsto 2|x|$ nije derivabilna u točki $x = 0$, dok njezina primitivna funkcija to jest. Ta derivacija je 0, jer postoje derivacije slijeva i zdesna i obje iščezavaju.)

(d) $\int \left(\begin{cases} 2, & x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \right) dx = \begin{cases} 2x + c, & x < 3 \\ x + c, & x > 3 \end{cases}$,

jer je $\left(\begin{cases} 2x + c, & x < 3 \\ x + c, & x > 3 \end{cases} \right)' = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$.

(U ovomu primjeru nije svaka primitivna funkcija definirana u točki $x = 3$. Naime, tek je posebnim izborom konstanata $c_2 = c_1 + 3$ (c je opća oznaka!) moguće udovoljiti uvjetu o neprekidnosti primitivne funkcije u točki $x = 3$. U takvomu slučaju, ipak, primitivna funkcija nije derivabilna u toj točki, jer joj je derivacija slijeva u točki 3 jednaka 2, a ona zdesna - 1.)

Istinitost sljedećega teorema je očigledna.

Teorem 4.2.2 *Neka je $\int f(x)dx = F(x) + c$, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A$* (oznake iz Definicija 4.3.1 i 4.3.2) *Tada na $I \setminus A$ vrijedi:*

(i) $(\int f(x)dx)' = f(x)$ ("deriviranjem integrala dobivamo integrand");

(ii) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ ("diferenciranje poništava integriranje");

(iii) $\int(dF(x))dx = F(x) + c$ ("integriranje poništava diferenciranje do na konstantu").

Idući teorem tvrdi da je neodređeni integral primjer linearnog funkcionala.

Teorem 4.2.3 *Neka funkcije $f_i : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$, $n \in \mathbb{N}$, dopustaju primitivne funkcije na intervalu $I \subseteq X$, te neka su $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ konstante. Tada i funkcija $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : X \to \mathbb{R}$ dopušta primitivnu funkciju na I i vrijedi*

$\int(\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \cdots + \lambda_n \int f_n(x)dx + c, (1)$

tj. neodređeni integral čuva (do na aditivnu konstantu) linearnu kombinaciju.

Dokaz. Neka je F_i bilo koja primitivna funkcija za f_i na I, tj. $\int f_i(x)dx = F_i(x) + c_i$, $i = 1, \cdots, n$. Budući da je $F_i'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A_i$ i $A_i \subset I$ prebrojiv, $i = 1, \cdots, n$, to je

$(\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n)'(x) = (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)(x), \quad x \in I \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i)$.

Primijetimo da je i skup $A \equiv \bigcup_{i=1}^n A_i \subset I$ prebrojiv. Slijedi da je (neprekidna) funkcija $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n : I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : X \to \mathbb{R}$. Prema tomu (i k je oznaka za konstantu),

$\int(\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x))dx = \lambda_1 F_1(x) + \cdots + \lambda_n F_n(x) + k =$
$\lambda_1(\int f_1(x)dx - c_1) + \cdots + \lambda_n(\int f_n(x)dx - c_n) + k =$
$\lambda_1 \int f_1(x)dx + \cdots + \lambda_n \int f_n(x)dx + c, \quad c \equiv k - (\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n)$. ■

Napomenimo da ubuduće u jednakostima sličnima onoj u Teoremu 4.2.3, opću konstantu c $(c_1, c_2, k, \cdots)$ najčešće ne ćemo zapisivati, tj. u takvim "jednakostima" ćemo dopuštati da se lijeva i desna strana smiju razlikovati do na aditivnu konstantu.

Teorem 4.2.3 očito povlači:

$\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
$\int(\lambda f(x))dx = \lambda \int f(x)dx$.

Primjer 4.2.4 $\int(4\cos x + \frac{x^3}{2} - 3)dx \overset{(1)}{=} 4\int \cos x dx + \frac{1}{2}\int x^3 dx - 3\int dx = 4\sin x + \frac{x^4}{8} - 3x + c$. (Naime, $\sin' x = \cos x$, $(\frac{x^4}{4})' = x^3$ i $(x)' = 1$.)

Neka čitatelj provjeri (deriviranjem, v. §4.1.2) točnost ove **tablice osnovnih integrala** (na definicijskim područjima podintegralnih funkcija):

$$\int 0 \cdot dx = c; \tag{2}$$
$$\int dx = x + c; \tag{3}$$
$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1; \tag{4}$$
$$\int x^{-1} dx \equiv \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c; \tag{5}$$
$$\int e^x dx = e^x + c; \tag{6}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1; \tag{7}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c; \qquad \int \sinh x dx = \cosh x + c \tag{8),(8'}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c; \qquad \int \cosh x dx = \sinh x + c \tag{9),(9'}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c; \qquad \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c \tag{10),(10'}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c; \qquad \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c \tag{11),(11'}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c_1 = -\operatorname{arccot} x + c_2; \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2; \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c_1, & |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c_2 & |x| > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c; \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x + c_1 = \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + c_2; \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c_1 = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c_2. \tag{16}$$

Neodređene integrale od (2) do (16) nazivamo **tabličnim integralima**.

4.2.2 Osnovne integracijske metode.

Neodređene integrale elementarnih funkcija što se mogu prikazati kao linearne kombinacije podintegralnih funkcija iz tablice gore, lako određujemo primjenom Teorema 4.2.3. U takvim slučajevima kažemo da smo funkciju **integrirali izravno** (ili **neposredno**).

Primjer 4.2.5 (a) $\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = 2 \int x^{\frac{7}{6}} dx \overset{(4)}{=} \frac{12}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + c;$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \overset{(1)}{=} \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \overset{(11),(10)}{=}$
$= -\cot x + \tan x + c.$

Skup svih izravno integrabilnih funkcija proširujemo primjenom dvaju jednostavnih postupaka: uvođenjem nove varijable (supstitucija) i prepoznavanjem diferencijala nekog umnoška (parcijalna integracija).

Supstitucija se sastoji u tomu da se nekom dopustivom zamjenom integracijske varijable ili podintegralnog izraza polazni integral svede na neke od onih tabličnih. O tomu govore dva iduća teorema.

Teorem 4.2.4 *Neka za funkciju f postoji neka primitivna funkcija na intervalu I. Nadalje, neka je $\varphi : J \to I$, J - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je*

$$\int f(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + c, \tag{17}$$

gdje je Φ primitivna funkcija za funkciju $\phi \equiv (f\varphi) \cdot \varphi'$ na J. Drugačijim zapisom,

$$\int ((f\varphi) \cdot \varphi')(t) dt \equiv \int \phi(t) dt = \Phi(t) + c.$$

Dokaz. Budući da stroga monotonost realne funkcije povlači injektivnost, to je funkcija φ bijektivna. Postoji, dakle, inverzna funkcija φ^{-1} : $I \to J$ za koju se lako dokaže da je, također, strogo monotona. Primijetimo da neprekidnost i stroga monotonost funkcije φ povlače neprekidnost inverzne funkcije φ^{-1} (v. Korolar 3.3.2). Nadalje, budući da je φ i derivabilna, po Teoremu 4.1.4 zaključujemo da je i φ^{-1} derivabilna. Ukratko, strogo monotona i derivabilna surjekcija φ ima inverznu funkciju φ^{-1} koja je, također, strogo monotona i derivabilna. Po pretpostavci, postoji neka primitivna funkcija F za f na I. Tada je $F'(x) = f(x)$, $x \in I \setminus A$. Neka je $B = \varphi^{-1}[A] \subset J$, pa je i B prebrojiv skup. Dokažimo da je $F\varphi \equiv \Phi$ primitivna funkcija za $(f\varphi) \cdot \varphi' \equiv \phi$ na intervalu J! Zaista, za svaki $t \in J \setminus B$ je $\Phi'(t) = (F\varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = ((f\varphi) \cdot \varphi')(t) = \phi(t)$, pri čemu smo iskoristili Teorema 4.1.3. Primijetimo da je $\Phi\varphi^{-1} = (F\varphi)\varphi^{-1}$ $= F$ pa je $\Phi\varphi^{-1}$ primitivna funkcija za f na I. ■

Teorem 4.2.4 jamči da se, pod navedenim uvjetima, zadani integral smije rješavati zamjenom $x = \varphi(t)$ i $dx = \varphi'(t)dt$, tj.

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \equiv$
$\int \phi(t)dt = \Phi(t) + c = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + c = F(x) + c.$

Dakako, temeljna zamisao je u tomu da se nađe zamjenska funkcija φ, koja će polučiti funkciju ϕ, tako da integral $\int \phi(t)dt$ bude "tehnički" bitno jednostavniji (što bliži nekom tabličnom integralu) od polaznoga (netabličnog) $\int f(x)dx$. Naravno, idealno je ako se "iz prve" za $\int \phi(t)dt$ dobije neki tablični integral.

Primjer 4.2.6 (a) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = [x = t^6;\ dx = 6t^5dt] =$
$\int \frac{1+t^2}{t^3} \cdot 6t^5dt = \int 6(t^4 + t^2)dt \overset{(1)}{=} 6\int t^4dt + 6\int t^2dt \overset{(4)}{=}$
$6 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + c = [t = \sqrt[6]{x}] = \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} + c;$

(b) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = [x = \sin t;\ dx = \cos t dt] = \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} \overset{(10)}{=}$
$\tan t + c = [t = \arcsin x] = \tan(\arcsin x) + c =$
$\tan(\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c;$

(c) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = [x = t - 1;\ dx = dt]$
$= \int \frac{dt}{t^2+1} \overset{(12)}{=} \arctan t + c = [t = x + 1] = \arctan(x + 1) + c.$

(Podrazumijeva se, bez izričitog naglašavanja, da primjer pod (a) ima smisla samo za $x > 0$, a primjer pod (b) - samo za $|x| < 1$. S tim u svezi, primijetimo da funkcije $t \mapsto t^6$ i sin *nisu* monotone, ali njihova *suženja* na $\mathbb{R}^+$ *i* $\langle -1, 1\rangle$, redom, *jesu* strogo monotona.)

Teorem 4.2.5 *Neka je G primitivna funkcija za funkciju g na intervalu J, tj. $G'(t) = g(t)$, $t \in J \setminus B$, te neka je $\psi : I \to J$, I - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je*

$$\int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)dx = G(\psi(x)) + c. \tag{18}$$

Drugim riječima, ako je $f(x)dx = g(\psi(x))d\psi(x)$ za svaki $x \in I$, pri čemu funkcije g i ψ imaju navedena svojstva, onda funkcija $f = (g\psi) \cdot \psi'$ ima na I primitivnu funkciju $F = G\psi$, tj.

$$\int f(x)dx \equiv \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)dx = G(\psi(x)) + c.$$

Dokaz. Teorem 4.2.5 je, zapravo, preformulacija prethodnoga Teorema 4.2.4 u smislu da se umjesto zamjenske funkcije $x = \varphi(t)$ uvodi zamjenska funkcija $t = \psi(x) = \varphi^{-1}(x)$. ■

Primjer 4.2.7 (a) $\int \sqrt{2x+3}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{2x+3} \cdot 2dx = [t = 2x+3;\ dt = 2dx]$
$= \int \frac{1}{2}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + c.$

(b) $\int \cos 5x dx = \int \frac{1}{5}\cos 5x \cdot 5dx = [t = 5x;\ dt = 5dx] =$
$\frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + c = \frac{1}{5}\sin 5x + c.$

(c) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2xdx}{(1+x^2)^r} = [t = 1 + x^2;\ dt = 2xdx] =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^r} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|t| + c, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + c, & r \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{-r+1}}{-r+1} + c, & r \neq 1 \end{cases}.$$

(d) Odredimo, po Teoremu 4.2.5, primitivnu funkciju F za f ako je g opća potencija $t \mapsto g(t) = t^r$.
Po (4) i (5) je, redom, $G(t) = \frac{t^{r+1}}{r+1}$ kad je $r \neq -1$ i $G(t) = \ln|t|$ kad je $t = -1$. Dakle,

$$\int f(x)dx \equiv \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)dx = G(\psi(x)) + c = \begin{cases} \frac{\psi(x)^{r+1}}{r+1} + c, & r \neq -1 \\ \ln|\psi(x)| + c, & r = -1 \end{cases}.$$

Ili, u praktičnijem zapisu,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c \text{ i}$$
$$\int f(x)^r f'(x)dx = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + c,\ r \neq -1.$$

Parcijalna integracija se sastoji u tomu da se pogodnim izborom realnih funkcija $x \mapsto g(x)$ i $x \mapsto h(x)$, takvih da je $g(x)h'(x)dx = f(x)dx$, i primjenom diferencijala na produktnu funkciju $x \mapsto g(x)h(x)$, integral $\int f(x)dx$ ili bitno pojednostavni ili da postane nepoznanicom u lako rješivoj jednadžbi.

Teorem 4.2.6 *Ako su funkcije $g, h : I \to \mathbb{R}$, I - interval (ili njihova unija), neprekidno derivabilne, onda vrijedi*

$$\int g(x)h'(x)dx = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)dx. \tag{19}$$

Dokaz. Ovdje se najprije pozivamo na Teoreme 3.3.2 i 3.3.4, što ćemo ih dokazati (neovisno o ovomu) u sljedećemu odjeljku, koji jamče obstojnost primitivnih funkcija na I za gh' i hg'. Tada primjenom formule (1), Teorema 4.1.5 i Teorema 4.2.2 dobivamo

$$\int g(x)h'(x)dx + \int h(x)g'(x)dx = \int (g(x)h'(x) + g'(x)h(x))dx =$$
$$\int (g \cdot h)'(x)dx = g(x)h(x),$$

što je ekvivalentno formuli (19). ■

Uobičajilo se uvesti pokrate $g(x) = u$ i $h(x) = v$ pa formula (19) ima i zapis

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Primjer 4.2.8 (a) $\int xe^x dx = [u = x;\ dv = e^x dx;\ du = dx;$ $v = \int e^x dx = e^x] \overset{(19)}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$

(b) $\int \ln x dx = [u = \ln x;\ dv = dx;\ du = \frac{dx}{x};\ v = x] \overset{(19)}{=}$ $= (\ln x)x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$

(c) $\int x^2 \cos x dx = [u = x^2;\ dv = \cos x dx;\ du = 2u du;\ v = \sin x] \overset{(19)}{=}$ $x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = [u = x;\ dv = \sin x dx;\ du = dx;\ v = -\cos x] \overset{(19)}{=}$ $x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \int \cos x dx) = x^2 \sin x + 2x\cos x + 2\sin x + c.$

(d) Odredimo, za svaki $n \in \mathbb{N}$, integral

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \equiv I_n.$$

Za $n = 1$ se radi o tabličnomu integralu (12),tj. $I_1 = \arctan x + c$.
Neka je $n \geq 2$. Tada je

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}, \quad \text{tj.}$$

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}.$$

Primijenimo parcijalnu integraciju na $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$, $n \geq 2$, uzevši $u = x;\ dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^n};\ du = dx;\ v = \int \frac{x dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$ (v. Primjer 4.2.7(c)). Slijedi,

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} =$$
$$\frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Dobili smo, dakle, rekurzivnu formulu

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}. \tag{20}$$

Primjerice, za $n = 2$ i $n = 3$ je, redom,

$$I_2 \equiv \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + c,$$
$$I_3 \equiv \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\arctan x + c.$$

4.2.3 Integriranje nekih elementarnih funkcija

Integralni račun, tj određivanje primitivnih funkcija je, kao što smo već mogli primijetiti, tehnički složen posao. Jedna poteškoća proizlazi iz činjenice da primitivna funkcija za (i relativno jednostavnu) elementarnu funkciju ne mora biti elementarna. Druga, pak, jest sama bit integralnoga računa, tj. i kad je primitivna funkcija elementarna (tada se kaže da je integral *elementarno rješiv*), njezino je određivanje, osim u rijetkim slučajevima (tablični ili njima vrlo slični integrali) samo po sebi tehnički složen posao. Ovdje ćemo pokazati nekoliko tehnika integriralnoga računa u slučaju elementarno rješivih integrala.

(i) **Integriranje racionalnih funkcija**.

Polinom (tj. cijelu racionalnu funkciju) $x \mapsto p(x)$ integriramo po formuli (1). Budući da se svaka racinalna funkcija $x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ može zapisati kao zbroj od polinoma (priključujući u ovomu razmatranju k njima i konstantne funkcije) i prave racionalne funkcije, neka je odmah stupanj m od p manji od stupnja n od q. Osim toga, smijemo pretpostaviti da polinomi p i q nemaju zajedničkih nultočaka (realnih ili kompleksnih). Naime, po tzv. "Osnovnom teoremu algebre", koji tvrdi da svaki (nekonstantni) polinom ima barem jednu nultočku, slijedi da svaki polinom p dopušta faktorizaciju

$$p(x) \equiv a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = a_m(x - x_1) \cdots (x - x_m),$$

gdje su $x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{C}$. Ako se pritom ne želi operirati kompleksnim brojevima, onda se ne ističu linearni faktori $x - x_i$, $x_i \in \mathbb{C}$, (koji se uvijek javljaju s parovima konjugirano kompleksnih nultočaka x_i, $x_j = \bar{x}_i$), nego ih se "skriva" u pripadnim kvadratnim faktorima tipa $x^2 + bx + c$. Osim toga, višekratne nultočke se, obično, ne rastavlja, tj. tada se piše $(x - x_i)^{s_i}$ i $(x^2 + bx + c)^{k_j}$, gdje su s_i i k_j pripadne kratnosti.

Temeljna zamisao jest da se polazna (prava) racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ prikaže kao zbroj jednostavnijih racionalnih funkcija, koje u nazivnicima imaju prirodne potencije navedenih linearnih ili kvadratnih faktora iz faktorizacije od q. Pritom se rabi tzv. *metoda neodređenih koeficijenata*, koja se, u biti, temelji na činjenici da su dva polinoma jednaka onda i samo onda kad su im koeficijenti uz iste potencije jednaki. Neka je, dakle,

$$q(x) \equiv b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = \\ b_n(x - x_1)^{s_1} \cdots (x - x_r)^{s_r}(x^2 + c_1 x + d_1)^{k_1} \cdots (x^2 + c_l x + d_l)^{k_l},$$

pri čemu su $s_i, k_j \in \mathbb{N}$, $i = 1, \cdots, r$, $j = 1, \cdots, l$, $\sum\limits_{i=1}^{r} s_i + 2\sum\limits_{j=1}^{l} k_j = n$, a $x_1, \cdots, x_r$ sve realne i međusobno različite nultočke od q, dok su sve kvadratni trinomi $x^2 + c_j x + d_j$ međusobno različiti i bez realnih nultočaka. Tada, za svaki i i svaki j, postoje realni brojevi A_{is_i}, B_{jk_j} i C_{jk_j} takvi da je

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \\ \frac{1}{b_n}\Big(\frac{A_{11}}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1s_1}}{(x-x_1)^{s_1}} + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_{2s_2}}{(x-x_2)^{s_2}} + \cdots + \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \cdots + \frac{A_{rs_r}}{(x-x_r)^{s_r}} + \\ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2c_1x+d_1} + \cdots + \frac{B_{1k_1}x+C_{1k_1}}{(x^2c_1x+d_1)^{k_1}} + \frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2c_2x+d_2} + \cdots + \frac{B_{2k_2}x+C_{2k_2}}{(x^2c_2x+d_2)^{k_2}} + \cdots + \\ \frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2c_lx+d_l} + \cdots + \frac{B_{lk_l}x+C_{lk_l}}{(x^2c_lx+d_l)^{k_l}}\Big). \tag{21}$$

Koeficijenti A_{is_i}, B_{jk_j} i C_{jk_j} se određuju tako da se jednakost (21) pomnoži polinomom $q(x)$ i potom izjednače koeficijenti uz iste potencije. Kao zaključak, rastav (21) i formula (1) povlače da se integriranje (prave) racionalne funkcije, $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, svodi na izračunavanje sljedeća tri (tipična) neodređena integrala:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^s}, \quad \int \frac{(x+b)dx}{(x^2+cx+d)^k}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^k},$$

gdje su $s, k \in \mathbb{N}$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prvi od njih zamjenom $x - a = t$ postaje tabličnim integralom (4) ili (5). Drugi rješavamo kako slijedi:

$$\int \frac{(x+b)dx}{(x^2+cx+d)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+c)dx}{(x^2+cx+d)^k} - \frac{1}{2}\int \frac{(c-2b)dx}{(x^2+cx+d)^k}.$$

Prvi integral na desnoj strani se zamjenom $x^2 + cx + d = t$ opet svodi tablični integral (4) ili (5), a za drugi integral na desnoj strani primijetimo da je $c^2 - 4d < 0$ pa je

$$x^2 + cx + d = (x - \tfrac{c}{2})^2 + d - \tfrac{c^2}{4} = (d - \tfrac{c^2}{4})((\tfrac{x-\frac{c}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}})^2 + 1)^2.$$

Sada zamjenom $\frac{x-\frac{c}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}} = t$ dobivamo integral iz Primjera 4.2.8(e). Napokon, treći integral je istoga tipa kao upravo promatrani drugi integral na desnoj strani gore.

Primjer 4.2.9 Izračunajmo integral $\int \frac{x^3+2x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}dx$.
Budući da se integrira prava racinalna funkcija i kvadratni trinom $x^2 + 2x + 3$ nema realnih nultočaka, smijemo odmah prijeći na "rastavljanje na parcijalne razlomke" (21):

$$\frac{x^3+2x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2} \quad \Big|\cdot(x+1)(x^2+2x+3)^2$$

$$x^3+2x^2+3x-6 = A(x^2+2x+3)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3) + (Dx+E)(x+1)$$

$$= (A+B)x^4 + (4A+3B+C)x^3 + (10A+5B+3C+D)x^2 + (12A+3B+5C+D+E)x + (9A+3C+E)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= 4A + 3B + C \\ 2 &= 10A + 5B + 3c + D \\ 3 &= 12A + 3B + 5C + D + E \\ -6 &= 9A + 3C + E \end{aligned}$$

Rješenje ovoga linearnog sustava (v. §2.1.4) je $A = -2$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 3$, $E = 3$. Prema tomu (v. i Primjer 4.2.7(d)),

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{-2}{x+1}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{3x+3}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$-2\ln|x+1| + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+3}dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$-2\ln|x+1| + \ln(x^2+2x+3) + \int \frac{dx}{2((\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1)} + \frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+3)^{-1}}{-1} =$$

$$= \ln\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} + \sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2(x^2+2x+3)} + c.$$

(Neka čitatelj provjeri ovaj ishod deriviranjem!)

(ii) **Integriranje kompozicije trigonometrijske i racionalne funkcije.**

Ovaj tip neodređenog integrala se obično označuje s

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

gdje je R opća oznaka za razlomački izraz. U trivijalnom slučaju $\int \sin x dx$ i $\int \cos x dx$ dobivamo dva tablična integrala (8) i (9). Nadalje, po Teoremu 4.2.5 (v. i Primjer 4.2.7(d)) dobivamo

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + c;$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c.$$

U općem slučaju se integral $\int R(\sin x, \cos x)dx$ svodi na integral racinalne funkcije, tj. na $\int \frac{p(t)}{q(t)}dt$, p i q polinomi, koji se onda rješava tehnikom iz prethodnoga razmatranja (pod (i)). Najopćenitija zamjenska funkcija jest

$$x \mapsto \psi(x) = \tan\frac{x}{2} \equiv t \quad (x \equiv \varphi(t) = 2\arctan t).$$

Ona povlači:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ (\tan x = \frac{2t}{1-t^2},\ \cot x = \frac{1-t^2}{2t})\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{22}$$

Ako je funkcija R "parna", tj. ako je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

moguće je to svođenje provesti zamjenskom funkcijom

$$\psi = \tan, \quad \text{tj.} \quad t = \tan x \quad (x = \arctan t)$$

koja povlači:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ (\cot x = \frac{1}{t}),\ dx = \frac{dt}{1+t^2}. \tag{23}$$

Napokon, u najjednostavnijim slučajevima

$$\int R(\sin x)\cos x dx \quad \text{i} \quad \int R(\cos x)\sin x dx$$

rabimo, redom, zamjenske funkcije $\psi = \sin$ i $\psi = \cos$, tj.

$$t = \sin x,\ dt = \cos x dx, \tag{24}$$

$$t = \cos x,\ dt = -\sin x dx \tag{24'}$$

Primjer 4.2.10 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} \overset{(22)}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{t^2+1}{t^3+3t}dt = \cdots =$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{3}\int \frac{2tdt}{t^2+3} = \frac{1}{3}\ln|t(t^2+3)| + c = \frac{1}{3}\ln|\tan\frac{x}{2}\cdot(\tan^2\frac{x}{2}+3)| + c.$$

Budući da funkcija sin ima samo prebrojivo diskretnih nultočaka, promatrani se integral može izračunati i ovako:

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} \overset{(24')}{=}$$

$$\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \cdots \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \cdots =$$

$$\frac{1}{6}\ln|\frac{(t+2)^2(t-1)}{(t+1)^3}| + c = \frac{1}{6}\ln|\frac{(\cos x+2)^2(\cos x-1)}{(\cos x+1)^3}| + c.$$

Napomena 4.2.1 (a) Primijetimo da se izračunavanjem neodređenog integrala različitim metodama (ili samo različitm zamjenskim funkcijama) mogu dobiti "različite" primitivne funkcije. Ali, kao što znamo, one se mogu razlikovati u najviše prebrojivo mnogo točaka i do na aditivnu konstantu. To npr. znači da su na svakom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, na kojemu su oba rezultata iz Primjera 4.2.10 definirana, ona i međusobno *jednaka do na aditivnu konstantu.*

(b) Posve slično integriranju kompozicije trigonometrijske i racionalne funkcije, integrira se i kompozicija hiperbolne i racionalne funkcije,

$$\int R(\sinh x, \cosh x).$$

(iii) **Integriranje nekih iracionalnih funkcija**.

Primitivna funkcija za iracionalnu funkciju nije, općenito, elementarna funkcija, tj. neodređeni integral $\int f(x)dx$ iracionalne funkcije f *nije*, općenito, *elementarno rješiv.* Ovdje ćemo razmatrati samo neke elementarno

rješive tipove neodređenih integrala iracionalnih funkcija. Najprije promotrimo najjednostavnije tipične slučajeve. Prvi tip je integral

$$\int R(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, x^{\frac{m_k}{n_k}})dx, \quad m_i, n_i, k \in \mathbb{N},\ i = 1, \cdots, k.$$

(R je, kao i do sada, opća oznaka za racionalni izraz.) Ovaj se integral svodi na integral racionalne funkcije zamjenskom funkcijom (v. i Primjer 4.2.6(a))

$$t \mapsto \varphi(t) = t^n \equiv x, \quad n = V(n_1, \cdots, n_k).$$

(V označuje najmanji zajednički višekratnik, v. §1.4.6, Zadatak 5.) Istom se tehnikom izračunava i drugi tipični integral (poopćenje prvoga)

$$\int R((\tfrac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_k}{n_k}})dx, \quad m_i, n_i, k \in \mathbb{N},\ i = 1, \cdots, k,$$

stavljajući

$$\tfrac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad n = V(n_1, \cdots, n_k).$$

Primjer 4.2.11 $\int \frac{8-\sqrt{\frac{64x-1}{x}}}{\sqrt[3]{(\frac{64x-1}{x})^2}}dx = [n = 6;\ \frac{64x-1}{x} = t^6;\ x = \frac{1}{64-t^6};$
$dx = \frac{6t^5dt}{(64-t^6)^2}] = \int \frac{8-t^3}{t^4} \cdot \frac{6t^5dt}{(64-t^2)^2} = -6\int \frac{tdt}{(t-2)(t+2)^2(t^2+2t+4)(t^2-2t+4)^2} =$
$-6\int(\frac{A_1}{t-2} + \frac{A_2}{t+2} + \frac{A_3}{(t+2)^2} + \frac{B_1t+C_1}{t^2+2t+4} + \frac{B_2t+C_2}{t^2-2t+4} + \frac{B_3t+C_3}{(t^2-2t+4)^2}) = \cdots$ (v. (i)).

Sada se pozabavimo integralom

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx.$$

Zamjenskom funkcijom $x \mapsto \psi(x) = \frac{2ax+b}{\sqrt{|b^2-4ac|}} \equiv t$ svodimo ga na jedan od ovih:

(a) $\int R(t, \sqrt{1-t^2})dt$; (b) $\int R(t, \sqrt{t^2-1})dt$; (c) $\int R(t, \sqrt{t^2+1})dt$.

Proslijediti možemo na nekoliko načina. Primjerice, zamjenama

(a) $t = \sin z$; (b) $t = \frac{1}{\sin z}$; (c) $t = \tan z$

dobivamo integrale racionalnih funkcija (od) trigonometrijskih funkcija - (ii), a tzv. *Eulerovim zamjenama*

(a) $\sqrt{1-t^2} = z(1-t)$; (b) $\sqrt{t^2-1} = t+z$; (c) $\sqrt{t^2+1} = t+z$

odmah dobivamo integrale racionalnih funkcija - (i).

Sljedeći tipični integral što ga promatramo jest

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}dx,$$

pri čemu je p bilo koji polinom, a q reducirani kvadratni polinom zadan bilo kojim od pravila $1-x^2$, x^2-1, x^2+1. Poznate činjenice iz diferencijalnoga računa jamče da se pripadna primitivna funkcija može odrediti rješavanjem jednadžbe

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}dx = (A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0)\sqrt{q(x)} + B\int \frac{dx}{\sqrt{q(x)}},$$

gdje je n stupanj od p, po nepoznanicama (neodređenim koeficijentima) A_0, $\cdots$, A_{n-1}, B. Očito, polazni integral se tada svodi na tablični integral $\int \frac{dx}{\sqrt{q(x)}}$. Postavljena jednadžba se rješava tako da joj se obje strane deriviraju, pomnože s $\sqrt{q(x)}$ te izjednače koeficijenti uz iste potencije dobivenih polinoma.

Ovomu tipu pripada i integral

$\int \frac{p(x)}{x^m \cdot \sqrt{q(x)}} dx, \quad m \in \mathbb{N},$

jer se zamjenom $x = \frac{1}{t}$ na njega svodi.

Primjer 4.2.12 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+6x+10}} = \int \frac{dx}{x+\sqrt{(x+3)^2+1}} =$

$[x+3 = t;\ x = t-3;\ dx = dt] = \int \frac{dt}{t-3+\sqrt{t^2+1}} =$

$[\sqrt{t^2+1} = t+z;\ t = \frac{1-z^2}{2z};\ dt = -\frac{z^2+1}{2z^2}dz] =$

$\int \frac{-\frac{z^2+1}{2z^2}dz}{\frac{1-z^2}{2z}-3+\frac{1-z^2}{2z}+z} = \cdots = \frac{1}{6}\int(1+\frac{z+3}{z(3z-1)})dz = \cdots =$

$\frac{1}{6}(z+\frac{10}{3}\ln|3z-1| - \ln|z|) + c,$

gdje je $z = \sqrt{t^2+1} - t = \sqrt{x^2+6x+10} - x - 3.$

Primjer 4.2.13 $\int x^2\sqrt{4x^2+9}dx = \int \frac{x^2(4x^2+9)}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \int \frac{4x^4+9x^2}{\sqrt{4x^2+9}}dx =$

$(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{4x^2+9} + E\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$

Deriviranjem dobivamo

$x^2\sqrt{4x^2+9} =$

$(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{4x^2+9} + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{4x}{\sqrt{4x^2+9}} + \frac{E}{\sqrt{4x^2+9}},$

pa množenjem s $\sqrt{4x^2+9}$ i sređivanjem slijedi

$4x^4+9x^2 = 16Ax^4+12Bx^3+(27A+8C)x^2+(18B+4D)x+(9C+E).$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobivamo linearni sustav s jedinstvenim rješenjem: $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \frac{9}{32}$, $D = 0$, $E = -\frac{81}{32}$.

Prema tomu,

$\int x^2\sqrt{4x^2+9}dx = (\frac{x^3}{4}+\frac{9x}{32})\sqrt{4x^2+9} - \frac{81}{32}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \cdots =$

$\frac{1}{32}(8x^3+9x)\sqrt{4x^2+9} - \frac{81}{64}\ln|2x+\sqrt{4x^2+9}| + c.$

Razmotrimo, napokon, tzv. **binomni integral**, tj.

$$\int x^s(a+bx^r)^p dx, \quad p,r,s \in \mathbb{Q}. \tag{25}$$

Općenito, on nije elementarno rješiv. Skup svih elementarno rješivih binomnih integrala karakterizira ovaj teorem:

Teorem 4.2.7 *Binomni integral* (25) *je elementarno rješiv onda i samo onda, ako je barem jedan od brojeva* p, $\frac{s+1}{r}$, $\frac{s+1}{r}+p$ *cijeli broj.*

Dokaz. Dokazati nužnost je vrlo zahtjevno, a i zašlo bi izvan okvira ovih skripata. Stoga ćemo dokazati samo (bitno jednostavniju) dovoljnost. Primijenimo prvo supstituciju $t = x^r$, što povlači

$\int x^s(a+bx^r)^p dx = [x = t^{\frac{1}{r}};\ dx = \frac{1}{r}t^{\frac{1}{r}-1}dt] = \frac{1}{r}\int t^{\frac{s}{r}}(a+bt)^p t^{\frac{1}{r}-1}dt =$

$\frac{1}{r}\int(a+bt)^p t^{\frac{s+1}{r}-1}dt = \frac{1}{r}\int(\frac{a+bt}{t})^p t^{\frac{s+1}{r}+p-1}dt.$

Ako je p cijeli broj onda zamjena $t = z^n$, n - (najmanji) nazivnik od $\frac{s+1}{r}$, svodi taj integral na integral racionalne funkcije; ako je, pak, $\frac{s+1}{r}$ cijeli broj onda zamjena $a+bt = z^n$, n - (najmanji) nazivnik od p, svodi taj integral na integral racionalne funkcije; ako je, napokon, $\frac{s+1}{r}+p$ cijeli broj onda zamjena $\frac{a+bt}{t} = z^n$, n - (najmanji) nazivnik od p, vodi k integralu racionalne funkcije. ■

Primjer 4.2.14 $\int \sqrt[3]{3x - x^3}dx =$
$\int x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}}dx = [p = \frac{1}{3},\ r = 2,\ s = \frac{1}{3};\quad t = x^2,\ x = \sqrt{t},\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}] =$
$\frac{1}{2}\int(\frac{3-t}{t})^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1}dt = [\frac{s+1}{r} + p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{Z}] = \frac{1}{2}\int(\frac{3-t}{t})^{\frac{1}{3}}dt =$
$[\frac{3-t}{t} = z^3,\ t = \frac{3}{z^3+1},\ dt = \frac{-9z^2dz}{(z^3+1)^2}] = -\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz =$
$\frac{9}{2}\int(\frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2-z+1} + \frac{Ez+F}{(z^2-z+1)^2})dz = \cdots$ (v. (i)).

4.2.4 Integriranje funkcijskog reda

Pod **integralom** (konvergentnog) **funkcijskog reda** $\sum f_n$ smatramo neodređeni integral (ako postoji) pripadne sume $x \mapsto s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Budući da, općenito, s nije elementarna funkcija, to je izračunavanje integrala $\int s(x)dx \equiv \int(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx$ vrlo netrivijalni zadatak. Ipak, u posebnom slučaju jednoliko konvergentnog reda $\sum f_n$ (v. §3.2.6) neprekidnih funkcija f_n, integral funkcijskoga reda se dopušta integriranje "član po član". Ako su pritom preslikavanja f_n elementarno integrabilna, zadatak postaje i praktično rješiv. Dokažimo prvo odgovarajući teorem.

Teorem 4.2.8 *Ako su $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ preslikavanja, $n \in \mathbb{N}$, i funkcijski red $\sum f_n$ jednoliko konvergira prema funkciji $s : [a, b] \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, onda s dopušta primitivnu funkciju na $[a, b]$ i ona se može dobiti integriranjem "član po član", tj.*

$$\int s(x)dx \equiv \int(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)dx + c.$$

Posebice, za potencijski red $\sum a_nx^n$ na njegovu konvergencijskom intervalu vrijedi

$$\int(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int x^ndx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + c.$$

Dokaz. U općemu slučaju se lako zaključi da s dopušta primitivnu funkciju. (Neprekidnost svih funkcija f_n i jednolika konvergencija povlače neprekidnost funkcije s (v. Korolar 3.3.5), pa se smiju primijeniti Teoremi 4.3.2 i 4.3.4 što ćemo ih dokazati u idućemu odjeljku.) Dokazati valjanost same formule o integrabilnosti "član po član", u općemu je slučaju poprilično složeno. Zato ćemo ovdje razmatrati samo poseban slučaj potencijskog reda. Slično dokazivanju Teorema 4.1.14, prvo se dokaže da red $\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ ima isti kovergencijski polumjer ρ kao i polazni red $\sum a_nx^n$. Nadalje, lako se vidi da konvergencija brojevnoga reda $\sum a_n\rho^n$ ($\sum a_n(-\rho)^n$) povlači konvergenciju brojevnoga reda $\sum\frac{a_n}{n+1}\rho^{n+1}$ ($\sum\frac{a_n}{n+1}(-\rho)^{n+1}$). Prema tomu, funkcijski red $\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ konvergira u svim točkama u kojima konvergira potencijski red $\sum a_nx^n$. Po Teoremu 4.1.14 je $(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1})' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

na konvergencijskomu intervalu $\langle -\rho, \rho\rangle$. Dakle, funkcija $S : \langle -\rho, \rho\rangle \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, jest primitivna funkcija funkcije $s : \langle -\rho, \rho\rangle \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na intervalu $\langle -\rho, \rho\rangle$. ■

Primjer 4.2.15 Razvijmo u potencijski red (ne rabeći Maclaurinovu formulu) funkciju $\arctan|_{[-1,1]} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.
Prisjetimo se, prvo, sume geometrijskoga reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \equiv 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Drugo, derivacija $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$, pa je

$$\arctan' x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Prema tomu,

$$\arctan x = \int \arctan' x dx + c = \int (\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}) dx + c \overset{\text{T.4.2.8}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx + c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Budući da je $\arctan 0 = 0$, to je $c = 0$. Osim toga, primijetimo da funkcijski red $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konvergira i u točkama $x = -1$ i $x = 1$. Postavlja se pitanje, konvergira li on u tim točkama, redom, prema funkcijskim vrijednostima $\arctan(-1)$ $(= -\frac{\pi}{4})$ i $\arctan 1$ $(= \frac{\pi}{4})$ ili prema nekim drugim točkama (?). Nu, temeljem Korolara 3.3.7 i činjenice da je funkcija arctan preslikavanje (neprekidna, posebice u točkama -1 i 1), smijemo napokon zaključiti da je

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Integriranjem funkcijskih, posebice potencijskih, redova mogu se izračunati mnogi elementarno nerješivi integrali.

Primjer 4.2.16 Izračunajmo neodređeni integral funkcije
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$; (b) $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Zadatak 4.2.9 (a) Budući da je (v. Primjer 4.1.16)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R},$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \equiv$$

$$1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}.$$

Prema tomu,

$$\int e^{-x^2} dx = \int (\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}) dx \overset{\text{T.4.2.8}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + c.$$

(b) Sjetimo se da je (v. Primjer 4.1.16)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R},$$

pa je

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \equiv$$

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Uočimo da funkcijski red na desnoj strani konvergira i u točki $x = 0$ i to prema broju 1. Budući da je i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (v. Primjer 3.3.3), to funkcijski red $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ konvergira prema (neprekidnoj) funkciji

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Po Definiciji 4.2.1, funkcije f i g imaju istu primitivnu funkciju na $\mathbb{R}$. Slijedi,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int f(x)dx = \int g(x)dx = \int (\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}) dx \overset{\text{T.4.2.8}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + c.$$

4.2.5 Vježbe

1. Odrediti onu primitivnu funkciju F za funkciju sin koja u točki $x = \pi$ ima vrijednost 7.
Rješenje: $\int \sin x dx = -\cos x + c$, pa iz $F(\pi) = 7$ slijedi $c = 7 + \cos \pi = 6$. Dakle, $F(x) = -\cos x + 6$.
2. Primjenom parcijalne integracije dokazati sljedeće rekurzivne formule:
(a) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx, \quad n \in \mathbb{N}$;
(b) $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx, \quad n \in \mathbb{N}$.
3. Izračunati neodređeni integral funkcije $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\cos x}$.
4. Provjeriti točnost ove formule (pod uvjetom $|a| \neq |b|$):
$\int (\cos ax \cdot \cos bx) dx = \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + c.$
Koja se formula dobiva u slučaju $|a| = |b|$?
5. Provjeriti točnost ovoga računa:
$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$
6. Smije li se funkcijski red $\sum \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ integrirati "član po član" na $\mathbb{R}$?
7. Izračunati integral funkcijskoga reda $\sum f_n$, $f_n(x) = \frac{1}{n^4+x^2}$.
8. Izračunati $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (*nije* elementarno rješiv!).

4.3 ODREĐENI INTEGRAL

Pojam određenog integrala je, povijesno, tijesno povezan s problemom izračunavanje ploštine "krivocrtnog" ravninskog lika. On (*ne* i njegov *naziv*), dakle, davno prethodi pojmu neodređenog integrala. Temeljnu ideju (na konkretnim primjerima) nalazimo već kod starogrčkoga genija Arhimeda.

Sam naziv je došao mnogo poslije i tek kad se shvatila duboka povezanost tih dvaju pojmova, koju su, dakako, otkrili I. Newton i G.W. Leibniz. Grubo govoreći, *konkretno* izračunavanje površine "krivocrtnog" ravninskog lika, kao i mnštvo srodnih problema u matematici, fizici i tehnici, svodi se na izračunavanje vrijednosti neodređenog integrala (primitivne funkcije) - odatle naziv *određeni integral*, iako na prvi pogled, po definicijama, ta dva pojma nemaju "ništa" zajedničko.

4.3.1 Pojam i osnovna svojstva određenog integrala

Za točno definiranje određenog integrala trebamo, prvo, malo tehničke pripreme. Najprije ćemo taj pojam definirati za neke omeđene (realne) funkcije definirane na *segmentu* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. U tu svrhu, svaki konačni skup $D \equiv \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset [a,b]$ sa svojstvom $\{a,b\} \subseteq D$, $n \in \mathbb{N}$, nazvat ćemo **rastavom** (ili **razdiobom**) promatranoga segmenta $[a,b]$. Jednostavnosti radi, pretpostavljat ćemo da navedeni zapis poštuje uređaj na $\mathbb{R}$, tj. da je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Neka $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}([a,b])$ označuje skup svih rastava D segmenta $[a,b]$. Primijetimo da je relacija $\subseteq$ ("biti podskup") relacija parcijalnog uređaja na $\mathcal{D}$. Ako su $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ i $D_1 \subseteq D_2$, kažemo da D_2 **profinjuje** (ili da je **profinjenje od**) D_1. Uočimo da je parcijalno uređeni skup $(\mathcal{D}, \subseteq)$ **usmjeren**, tj. da za svaki par $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ postoji neki $D \in \mathcal{D}$ koji profinjuje D_1i D_2. (Takav je, primjerice, $D = D_1 \bigcup D_2$.)

Primjer 4.3.1 Skup $D_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}.1\}$ je rastav segmenta $[0,1]$, *a* skup $D_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ je drugi rastav toga segmenta. Njihova unija $D_1 \bigcup D_2 \equiv D = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}.1\}$ je treći rastav koji profinjuje oba prethodna.

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Svakom rastavu $D \equiv \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$ možemo pridijeliti broj, tzv. **integralnu sumu** (funkcije f),

$$S(f; D; \xi_1, \cdots, \xi_n) \equiv S_\xi(f; D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

pri čemu su točke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, odabrane po volji, a ξ je pokrata za uređeni n-slog (ξ_i). Jasno, drugačijim odabirom točaka ξ_i dobivamo, za istu funkciju i isti rastav, novu integralnu sumu.

Definicija 4.3.1 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Reći ćemo da je funkcija f* ***integrabilna*** *(u Riemannovu smislu ili R-**integrabilna**) ako postoji broj $J(f) \equiv J \in \mathbb{R}$ takav da, za svaki $\epsilon > 0$, postoji neki rastav D_0 segmenta $[a,b]$ sa svojstvom da, za svaki rastav D što profinjuje D_0 i svaku integralnu sumu $S_\xi(f; D)$, bude $|S_\xi(f; D) - J| < \epsilon$. Ili, simbolički, f je integrabilna ako*

$$(\exists J \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D})(\forall S_\xi(f; D))$$
$$D \supseteq D_0 \Rightarrow |S_\xi(f; D) - J| < \epsilon.$$

Broj J nazivamo (Riemannovim) ***određenim integralom*** *funkcije f.*

Za funkciju $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je ***integrabilna na segmentu*** $[a,b] \subseteq X$ *ako je njezino suženje $f \equiv g|_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Uobičajilo se određeni integral $J \equiv J(f)$ označavati kao*

$$\int_a^b f(x)dx \quad \textit{ili} \quad \int_{[a,b]} f(x)dx \quad \textit{ili, kraće,} \quad \int_{[a,b]} f.$$

(Poslije ćemo se uvjeriti da ta oznaka ima svoj puni smisao!) *Pritom se kaže da je a (b)* ***donja*** (***gornja***) *integralova granica, a segment $[a,b]$ -* ***integracijsko područje****.*

Primijetimo da nije sasvim očito je li Definicija 4.3.1 posve korektna. Naime, nije izravno vidljivo da je broj J jedinstven. Zato ćemo to sada provjeriti. Pretpostavimo da i broj K ima svojstvo što ga ima broj J iz Definicije 4.3.1. Tada, za svaki $\epsilon > 0$, postoji neki dostatno fini rastav D sa svojstvom $(\forall S_\xi(f;D)) \quad |S_\xi(f;D) - J| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |S_\xi(f;D) - K| < \frac{\epsilon}{2}$. Slijedi da je, za svaki $\epsilon > 0$, $|K - J| < \epsilon$, dakle, $K = J$ (v. §1.4.6, Zadatak 20.).

Izravno iz Definicije 4.3.1 slijedi da za svaku funkciju $f : [a,a] \to \mathbb{R}$ određeni integral iščezava, tj.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

U svrhu prepoznavanja integrabilnih funkcija, ustanovljuju se odgovarajući kriteriji. Ovdje ćemo ustanoviti samo dva: jedan nužni i dovoljni i jedan dovoljni. Neka je, dakle, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija i neka je $D = \{x_0, \cdots, x_n\}$ bilo koji rastav segmenta $[a,b]$. Tada postoje brojevi

$$m_i \equiv \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$M_i \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \text{te}$$
$$s(f;D) \equiv \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$S(f;D) \equiv \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \cdots, n.$$

Broj $s(f;D)$ ($S(f;D)$) nazivamo **donjom** (Darbouxovom) **sumom** (**gornjom sumom**) funkcije f za dani rastav D. Nadalje, postoje brojevi

$$m \equiv \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \quad M \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

i pritom je očito da za svaki rastav D i svaku integralnu sumu $S_\xi(f;D)$ vrijedi

$$m(b-a) \le s(f;D) \le S_\xi(f;D) \le S(f;D) \le M(b-a).$$

Primijetimo i da $D_1 \subseteq D_2 \in \mathcal{D}([a,b])$ povlači

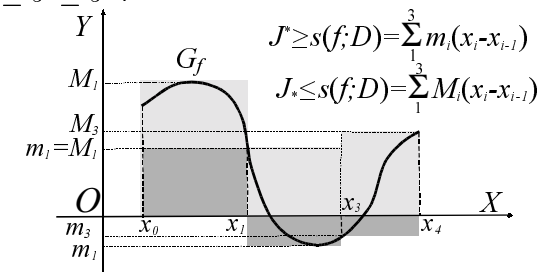
$$s(f;D_1) \le s(f;D_2) \le S(f;D_2) \le S(f;D_1).$$

Uočimo da postoje i brojevi (v. Teorem 1.4.7)

$$J_*(f) \equiv \sup\{s(f;D) \mid D \in \mathcal{D}([a,b])\},$$
$$J^*(f) \equiv \inf\{S(f;D) \mid D \in \mathcal{D}([a,b])\}.$$

$J_*(f) \equiv J_*$ nazivamo **donjim** (Riemannovim) **integralom**, a $J^*(f) \equiv J^*$ **gornjim** (Riemannovim) **integralom** funkcije f. Pritom je (v. i crtež dolje), za svaki rastav D,

$J^* - J_* \leq S(f;D) - s(f;D)$, i, očito,
$J_* \leq J \leq J^*$.



Teorem 4.3.1 *Omeđena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna ako i samo ako je $J_* = J^*$. Pritom je $J = J_* = J^*$.*

Dokaz. Neka je omeđena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna. Treba dokazati da je $J_*(f) = J^*(f)$. Odaberimo bilo koji $\delta > 0$. Po pretpostavci postoji (jedinstveni) broj $J \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$(\forall \epsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D}([a,b]))(\forall S_\xi(f;D))$
$\quad D \supseteq D_0 \Rightarrow |S_\xi(f;D) - J| < \epsilon$.

To i prethodno razmatranje povlače da, za svaki $D \supseteq D_0$, smijemo integralnu sumu $S_\xi(f;D)$ zamijeniti pripadnom donjom $s(f;D)$ ili gornjom $S(f;D)$ sumom. Dakle,

$|s(f;D) - J| < \epsilon$ i $|S(f;D) - J| < \epsilon$.

Sada, odabravši $\epsilon = \frac{\delta}{2}$, dobivamo

$|J_* - J^*| \leq |s(f;D) - S(f;D)| \leq |s(f;D) - J| + |J - S(f;D)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$,

pa mora biti $J_* = J^*$, dakle i $J_* = J^* = J$.

Obratno, neka za omeđenu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vrijedi $J_*(f) = J^*(f)$. Dokazat ćemo da je f integrabilna, tj. da je $J(f) = J_*(= J^*)$. Odaberimo bilo koji $\epsilon > 0$. Po definiciji za J_* i J^*, postoje rastavi $D_*, D^* \in \mathcal{D}([a,b])$ takvi da je

$J_* - \frac{\epsilon}{3} < s(f;D_*)$ i $J^* + \frac{\epsilon}{3} > S(f;D^*)$.

Neka je $D_0 = D_* \bigcup D^*$ pa je D rastav od $[a,b]$ koji profinjuje D_* i D^*. Budući da se profinjenjem donja (gornja) suma ne može smanjiti (povećati), to za svaki finiji rastav $D \supseteq D_0$ vrijedi

$J_* - \frac{\epsilon}{3} < s(f;D) \leq J^* + \frac{\epsilon}{3}$, dakle,

$S(f;D) - s(f;D) < J^* + \frac{\epsilon}{3} - (J_* - \frac{\epsilon}{3}) < s(f;D_*) = \frac{2\epsilon}{3}$.

Prema tomu, dobili smo da $J_* = J^*$ povlači sljedeće:

$(\forall \epsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D}([a,b]))$ $\quad D \supseteq D_0 \Rightarrow |s(f;D) - S(f;D)| < \frac{2\epsilon}{3}$.

Budući da je svaka integralna suma između ($\leq$) pripadne donje i gornje sume, to je i

$|s(f;D) - S_\xi(f;D)| < \frac{2\epsilon}{3}$.

Napokon, da postoji traženi broj $J = J(f)$ i da je $J = J_*(= J^*)$ slijedi iz

$|S_\xi(f;D) - J^*| = |S_\xi(f;D) - J_*| \leq$
$|S_\xi(f;D) - s(f;D)| + |s(f;D) - J_*| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. ■

Teorem 4.3.2 *Ako je omeđena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na skupu $[a, b] \setminus A$, gdje je $A \subset [a, b]$ prebrojiv, onda je f integrabilna funkcija.*

Dokaz. U punoj općenitosti, dokaz iskazanoga teorema probija okvir ovih skripata. (Trebalo bi, naime, definirati pojmove kao što su Jordanova i Lebesgueova mjera i usvojiti neke složenije topološke činjenice, a to se sve sustavno obrađuje na višim godinama matematičkoga studija.) Ovdje ćemo dokazati samo posebni slučaj toga teorema, ali još uvijek dovoljno općenit da pokrije vrlo široku klasu realnih funkcija (obuhvaćajući, dakako, sve elementarne i mnoge neelementarne funkcije):

Svaka po dijelovima monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna.

Najprije primijetimo da po dijelovima monotonost povlači omeđenost realne funkcije f na segmentu $[a, b]$ (v. §3.1.2). Naime, ako je f po dijelovima monotona, onda postoji rastav

$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$

takav da su suženja $f|_{[a_{i-1},a_i]}$ monotone (dakle i omeđene) funkcije, $i = 1, \cdots, n$. Dokaz posebnoga slučaja našega teorema raščlanjujemo na dokaze ovih dviju tvrdnja:

(i) Monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna;

(ii) Ako su suženja od $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na podsegmente $[a, c]$ i $[c, b]$ integrabilne funkcije, onda je i f integrabilna funkcija i vrijedi:

$\int\limits_{[a,b]} f(x)dx = \int\limits_{[a,c]} f(x)dx + \int\limits_{[c,b]} f(x)dx.$

Dokaz za (i). Pretpostavimo da je funkcija f uzlazna. Tada je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za svaki $x \in [a, b]$. Aka je $D = \{x_0, \cdots, x_n\}$ rastav od $[a, b]$, onda je $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$ za svaki $x \in [x_{i-1}, x_i]$ i svaki $i = 1, \cdots, n$. Neka je, u skladu s prethodnim oznakama, $m_i \equiv f(x_{i-1})$ i $M_i \equiv f(x_i)$ $(m_{i+1} = M_i)$, pa je

$s(f; D) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ i $S(f; D) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}$.

Stoga je

$$|s(f; D) - S(f; D)| = S(f; D) - s(f; D) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leq$$

$$\Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \tfrac{b-a}{k}(f(b) - f(a)),$$

pri čemu je $\Delta x = \max\{\Delta x_i \mid i = 1, \cdots, n\} \leq \frac{b-a}{k}$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Ovo povlači da za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i odgovarajući rastav D_0 segmenta $[a, b]$, takvi da je

$|s(f; D) - S(f; D)| < \epsilon.$

Po tomu zaključujemo da su za funkciju f donji i gornji Riemannov integral jednaki, $J_* = J^*$. Sada Teorem povlači prvu tvrdnju u slučaju uzlazne funkcije f. Posve slično se tvrdnja dokazuje kad je funkcija f silazna.

Dokaz za (ii). Budući da su suženja $f|_{[a,c]}$ i $f|_{[c,b]}$ integrabilne funkcije, za svaki $\epsilon > 0$ postoje rastavi $D_1 = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k = c\}$ od

$[a,c]$ i $D_2 = \{x_k = c, x_{k+1}, \cdots, x_{k+n-1}, x_{k+n} = b\}$ od $[c,b]$ takvi da je, s uobičajenim oznakama,

$$|s(f|[a,c];D_1) - S(f|[a,c];D_1)| = \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\Delta x_i < \tfrac{\epsilon}{2},$$

$$|s(f|[c,b];D_2) - S(f|[c,b];D_2)| = \sum_{i=k+1}^{k+n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Primijetimo da je $D_1 \bigcup D_2 \equiv D$ rastav od $[a,b]$, pa zbrajanjem relacija odozgor dobivamo nejednakost

$$(\star) \quad |J_* = J^*| \leq |s(f;D) - S(f;D)| = \sum_{i=1}^{k+n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon.$$

Po Teoremu 4.3.1., to znači da je funkcija f integrabilna, tj. postoji $J \equiv \int\limits_a^b f(x)dx$. Nadalje, očito je da vrijede i ove tri nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{k} m_i\Delta x_i \leq \int\limits_a^c f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{k} M_i\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=k+1}^{k+n} m_i\Delta x_i \leq \int\limits_c^b f(x)dx \leq \sum_{i=k+1}^{k+n} M_i\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{k+n} m_i\Delta x_i \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{k+n} M_i\Delta x_i.$$

Iz njih, po $(\star)$, lako zaključujemo da je, za svaki $\epsilon > 0$,

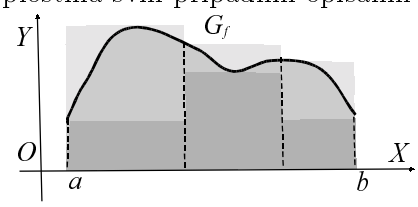
$$|\int\limits_a^b f(x)dx - (\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx)| < \epsilon,$$

što, konačno, dokazuje tvrdnju (ii). ■

Uobičajena geometrijska interpretacija određenog integrala jest ova: Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, omeđeno (i nenegativno) preslikavanje. Po Teoremu 4.3.1 slijedi da je funkcija f integrabilna, a po Teoremu 4.3.2 - da je

$$J = \int\limits_a^b f(x)dx = J_* = J^*.$$

Označimo slovom P ploštinu pseudotrapeza određenoga krivuljom (grafom) $y = f(x)$ i pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$. Svaku donju sumu $s(f;D)$, $D \in \mathcal{D}([a,b])$, smijemo shvatiti zbrojem ploština svih (pseudotrapezu) upisanih pravokutnika, određenih rastavom D, a svaku gornju sumu $S(f;D)$ - zbrojem ploština svih pripadnih opisanih provokutnika (v. crtež dolje).



Očito je

$$(\forall D \in \mathcal{D})\ s(f;D) \leq P \leq S(f;D),$$

što onda povlači $J_* \leq P \leq J^*$. Slijedi, zbog $J_* = J^*$, formula za površinu

$$P = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Primijetimo da ima smisla definirati i

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad a < b.$$

Pritom se kaže da određeni integral zamjenom svojih granica mijenja predznak.

Sljedeći teorem slijedi izravno iz Definicije 4.3.1 (usp. i opis gore).

Teorem 4.3.3 *Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, integrabilna na segmentu $[a, b] \subseteq X$, onda je*

(i) *f integrabilna i na svakom podsegmentu $[c, d] \subseteq [a, b]$;*

(ii) $\int_c^d f(x)dx = \int_c^r f(x)dx + \int_r^d f(x)dx, \quad c, d, r \in [a, b]$;

(iii) *$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$, pri čemu je $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, a $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.*

Sada ćemo iskazati i dokazati tzv. *Osnovni teorem integralnoga računa*, koji onda izravno vodi k tzv. *Newton-Leibnizovoj formuli* što izračunavanje određenog integrala svodi na određivanje primitivne funkcije, tj. pripadnoga neodređenog integrala.

Teorem 4.3.4 *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna onda je funkcija*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

derivabilna u svakoj točki x_0 u kojoj je funkcija f neprekidna i pritom je $F'(x_0) = f(x_0)$. Ako je skup svih prekidnih točaka funkcije f prebrojiv, onda je F primitivna funkcija za f.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna u točki x_0, tj. da

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a, b]) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Prema tomu, na svakom segmentu $[x_0 - |\Delta x|, x_0 + |\Delta x|]$, $|\Delta x| < \delta$, po Teoremu 4.3.3(iii) vrijedi

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_0) + \epsilon \quad (\text{neovisno o } \operatorname{sgn} \Delta x).$$

Po Teoremu 4.3.3(ii) je tada

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) \leq f(x_0) + \epsilon, \quad \text{tj.}$$

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{\Delta x}(F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) \leq f(x_0) + \epsilon.$$

To povlači da za $|\Delta x| \to 0$, dakle i $\epsilon \to 0$, postoji granična vrijednost

$$F'(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Da bismo dokazali i drugu tvrdnju, tj. da je F primitivna funkcija za f, dostatno je dokazati da je F preslikavanje. U tu svrhu, promatrajmo bilo

koju točku $x_0 \in [a,b]$. Po Teoremu 3.3.6, dovoljno je potvrditi da je $\lim\limits_{x_0} F = F(x_0)$. Zaista,

$$\lim_{x_0} F = \lim_{x \to x_0} \int_a^x f(t)dt = \lim_{\Delta x \to 0} \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \lim_{\Delta x \to 0} (\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt)$$
$$= \int_a^{x_0} f(t)dt + \lim_{\Delta x \to 0} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt = F(x_0).$$

Naime, po Teoremu 4.3.3(iii) je $m_0 \Delta x \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq M_0 \Delta x$ (za neke $m_0 \geq \inf f$ i $M_0 \leq \sup f$ na $[a,b]$), pa $\Delta x \to 0$ povlači $\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \to 0$. ■

Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna i neprekidna u svim točkama osim, možda, u prebrojivo mnogo njih. Tada je, po upravo dokazanom teoremu, funkcija

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

primitivna za funkciju f. Primijetimo da je $F(a) = 0$ pa je $F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Pokažimo da to vrijedi i za svaku inu primitivnu funkciju.

Teorem 4.3.5 *Neka je skup prekidnih točaka integrabilne funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ prebrojiv. Tada vrijedi Newton-Leibnizova formula:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{2}$$

pri čemu je $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ bilo koja primitivna funkcija za f.

Dokaz. Neka je F bilo koja primitivna funkcija za f. Označimo s F_1 primitivnu funkciju za f iz dokaza Teorema 4.3.4, tj. $F_1(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Po Teoremu 4.2.1, funkcije F i F_1 se razlikuju do na aditivnu konstantu, tj. $F(x) = F_1(x) + c$ za svaki $x \in [a,b]$. Prema tomu, $\int\limits_a^b f(x)dx = F_1(b) = F_1(b) - F_1(a) = (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F(b) - F(a)$. ■

Pomoću Newton-Leibnizove formule, koju zapisujemo i u oblicima

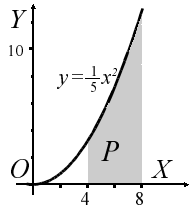
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b,$$

možemo lako izračunati određeni integral svake funkcije kojoj umijemo naći neodređeni integral, odnosno, primitivnu funkciju.

Primjer 4.3.2 Izračunajmo određeni integral $J = \int\limits_{-1}^5 (3x^2 - 2x + 5)dx$.

Po dobivenoj formuli i svojstvima neodređenog integrala slijedi:
$J = (x^3 - x^2 + 5x)\Big|_{-1}^5 = (5^3 - 5^2 + 5 \cdot 5) - ((-1)^3 - (-1)^2 + 5(-1)) = 125 - (-7) = 132.$

Primjer 4.3.3 Izračunajmo ploštinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $y = \frac{x^2}{5}$ i pravcima $y = 0$, $x = 4$ i $x = 8$ (v. crtež).



$P = \int\limits_4^8 \frac{x^2}{5}dx = \frac{1}{5}\int\limits_4^8 x^2dx = \frac{1}{5}[\frac{x^3}{3}]_4^8 = \frac{1}{15}(8^3 - 4^3) = \frac{448}{15}$ (kvadratnih jedinica).

Primjer 4.3.4 Izračunajmo integral $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

Najprije izračunajmo pripadni neodređeni integral:
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = [x = t^2;\ dx = 2tdt;\ t = \sqrt{x}] = \int \frac{2t}{t-1}dt = 2\int(1 + \frac{1}{t-1})dt =$
$2(t + \ln|t-1|) + c = 2(\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1|) + c.$
Sada, primjenom Newton-Leibnizove formule, dobivamo:
$\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = 2(\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1|)\Big|_4^9 = 2((3 + \ln 2) - (2 + \ln 1)) = 2(1 + \ln 2).$

Primijetimo da se provedeni postupak može skratiti. Naime, kad god se za izračunavanje pripadnog neodređenog integrala rabi neka zamjenska funkcija, treba u tu zamjenu uključiti i integralove granice (i "zaboraviti" polaznu varijablu). U našemu primjeru bismo tako dobili

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}[x = t^2;\ dx = 2tdt;\ t = \sqrt{x};\ x_1 = 4 \Rightarrow t_1 = 2;\ x_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 3] =$$
$$\int\limits_2^3 \frac{2t}{t-1}dt = \cdots = [2(t + \ln|t-1|)]_2^3 = \cdots = 2(1 + \ln 2).$$

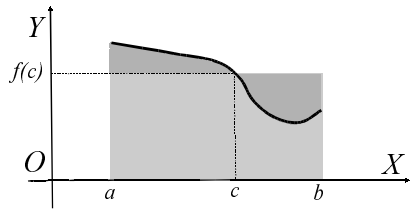
Promatrajmo neprekidnu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, kojoj je $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija. Tada je, po Teoremu 4.3.4, funkcija F derivabilna pa na nju smijemo primijeniti Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti (Teorem 4.1.9):

$$(\exists x_0 \in \langle a,b\rangle)\ F(b) - F(a) = F'(x_0)(b-a), \quad \text{tj.}$$
$$(\exists x_0 \in \langle a,b\rangle)\ \int\limits_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

Time smo dobili tzv. *teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa.*

Teorem 4.3.6 *Za svako preslikavanje $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, postoji barem jedna točka $c \in \langle a,b\rangle$ takva da je*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3}$$



Napomena 4.3.1 Definicija određenog integrala $\int\limits_{[a,b]} f \equiv \int\limits_a^b f(x)dx$ omeđene funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, dopušta definirati i određeni integral suženja te funkcije na bilo koji od intervala $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ ili $\langle a,b\rangle$ i to na isti način, tj.

$$\int\limits_{[a,b\rangle} f = \int\limits_{\langle a,b]} = \int\limits_{\langle a,b\rangle} f \overset{\text{def.}}{=} \int\limits_{[a,b]} f.$$

Napomena 4.3.2 Određeni integral omeđene funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, kojoj je definicijsko područje X konačna unija disjunktnih (do na "rubne" točke) segmenata ili intervala, definira se kao određeni integral trivijalnoga proširenja

$$\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \\ 0, & x \in [a,b] \setminus X \end{cases},$$

te funkcije na neki (bilo koji) segment $[a,b]$ što sadrži X. Prema tomu,

$$(X = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i],\ b_i \le a_{i+1}) \Rightarrow \int\limits_X f = \int\limits_{[a_1,b_n]} \tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{[a_i,b_i]} \tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{[a_i,b_i]} f.$$

4.3.2 Neki približni integracijski postupci.

Čest je slučaj da nismo u mogućnosti ekspilicite izračunati intrgral $\int f(x)dx$, dakle, "ni" pripadni određeni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ (kad postoji). (Izračunati konkretan određeni integral po definiciji je, općenito, "nemoguća" zadaća!) Osim toga, ponekad se zbog složenosti ili mukotrpnosti samog izračunavanja zadovoljavamo i relativno lako dobivenim netočnim rezultatom, ako je dostatno blizu točnoga rezultata. Kažemo da se u takvim slučajevima određeni integral procjenjuje, grublje ili finije, već prema potrebi. Jednu grubu procjenu daje formula

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

iz Teorema 4.3.3(iii).

Primjer 4.3.5 Procijenimo integral $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

Funkcija $f : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ je integrabilna jer je neprekidna. Po Teoremu 3.3.12, funkcija f poprima na segmentu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ svoju najmanju i najveću vrijednost,

tj. $m \equiv \inf f = \min f$, $M \equiv \sup f = \max f$ (na $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$). Primijetimo da je f silazna funkcija. Naime (v. T.4.1.2), $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) \leq 0$, $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Slijedi da f ekstremne vrijednosti poprima na "rubu", tj. $\min f = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$, $\max f = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Napokon, po Teoremu 4.3.3(iii.) dobivamo procjenu

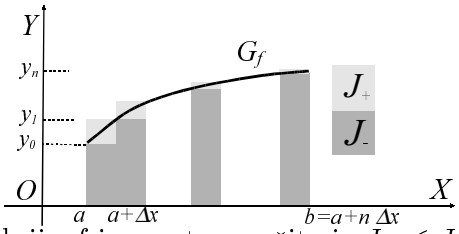
$$\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \text{ tj. } \frac{1}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bolje (finije) procjene određenog integrala (pseudotrapezove ploštine) postižu se posebno prilagođenim postupcima - numeričkim metodama, bit kojih se sastoji u dobro pogođenom odabiru jednostavnih ravninskih likova što sveukupno približno prekrivaju promatrani psedotrapez. Sada ćemo upoznati neke od tih postupaka.

(a) **Aproksimacija pravokutnicima**. Integralne sume

$$J_- = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \quad \text{i} \quad J_+ = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{4}$$

to bolje aproksimiraju integral $J = \int_a^b f(x)dx$ što je pripadni *ekvidistantni* rastav D finiji. Ako je funkcija f neprekidna, pozitivna i uzlazna, približna vrijednost J_- jest zbroj ploština svih pravokutnika s bazama duljine Δx upisanih u pseudotrapez $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, a približna vrijednost J_+ - zbroj ploština svih pravokutnika opisanih tomu pseudotrapezu (v. crtež).



Ako je funkcija f i monotona, očito je $J_- \leq J \leq J_+$ ili $J_+ \leq J \leq J_-$.

(b) **Trapezna formula**. Ako se sve susjedne točke $T_i = (x_i, y_i)$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, spoje dužinama, jednadžbe tih dužina (na pripadnim pravcima) jesu

$$y - y_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \cdots, n.$$

Time se dobiva poligonalna crta koja približno "prati" funkcijski graf G_f. Slijedi da se traženi integral $J = \int_a^b f(x)dx$ može aproksimirati određenim integralom funkcije kojoj je graf upravo ta poligonalna crta. Dakle,

$$J \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\Delta x} (\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-1}) + y_{i-1})dx = \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i-1}) \quad \text{ili}$$

$$J \approx \Delta x(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i) \equiv J_T \tag{5}$$

Dobiveni izraz za približnu vrijednost J_T nazivamo **trapeznom formulom** jer je aproksimacija dobivena upisivanjem trapeza (jednakih visina Δx) čim su y_{i-1} i y_i istog predznaka (v. idući crtež). Primijetimo da je

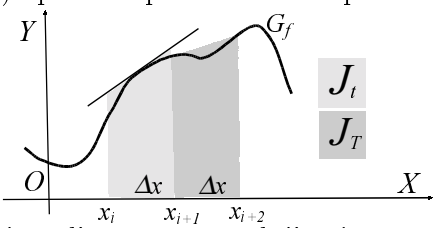
$$J_T = \frac{J_- + J_+}{2}$$

pa, prema tomu, trapezna formula, tj. J_T bolje aproksimira integral J od aproksimacija J_- ili J_+ pravokutnicima.

(c) **Tangentna formula**. Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Ako se svaki dio grafa G_f nad segmentom $[x_{i-1}, x_i]$, zamijeni pripadnim dijelom tangente u točki

$$T_{i-\frac{1}{2}} = (\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}, y_{i-\frac{1}{2}}), \quad y_{i-\frac{1}{2}} = f(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}), \quad i = 1, \cdots, n,$$

dobiva se još jedna aproksimacija za $J = \int\limits_a^b f(x)dx$, ovaj put trapezima (visine Δx) opisanim promatranomu pseudotrapezu (v. crtež dolje).

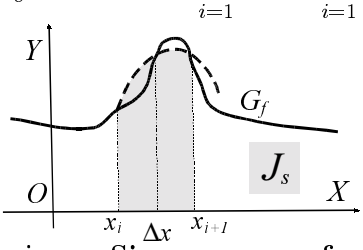


Budući da je ordinata $y_{i-\frac{1}{2}}$ srednjica i-toga trapeza, $i = 1, \cdots, n$, izravno se dobiva približna formula

$$J \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} \equiv J_t. \tag{6}$$

(d) **Simpsonova formula**. Aproksimirajmo sada svaki dio grafa G_f nad podsegmentom $[x_{i-1}, x_i]$ parabolinim lukom što prolazi točkama T_{i-1}, $T_{i-\frac{1}{2}}$ i T_i, $i = 1, \cdots, n$ (v. crtež dolje). (Budući da je ovdje parabolina os usporedna s Y-osi, jednadžba te parabole jest $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, pa je posve određena bilo kojim trima svojim točkama.) Izračunaju li se i zbroje određeni integrali pripadnih kvadratnih polinoma, dobiva se približna vrijednost

$$J \approx \tfrac{\Delta x}{6}(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}) \equiv J_S. \tag{7}$$



Izraz J_S nazivamo **Simpsonovom formulom**. Zanimljivo je da vrijedi

$$J_S = \tfrac{1}{3}(J_T + 2J_t),$$

što pokazuje da Simpsonova formula daje najbolju (od promatranih) aproksimaciju određenog integrala $J = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Potpunosti radi, navest ćemo (bez dokaza) i procjene pogrješaka $R_\pm$,

R_T, R_t i R_S redom razmatranih postupaka. Ako funkcija f ima neprekidnu i omeđenu četvrtu derivaciju $f^{(4)}$ i $M_4 = \sup\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a,b]\}$, onda je procjena pogrješke Simpsonovom formulom

$$|R_S| \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)(\Delta x)^4 = \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4} \tag{8}$$

Pogrješka aproksimacijom pravokutnicima jest

$$|R_\pm| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)\Delta x = \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \tag{9}$$

pri čemu f ima neprekidnu i omeđenu derivaciju f' i $M_1 = \sup\{|f'(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Napokon, ima li funkcija f neprekidnu i omeđenu drugu derivaciju f'' i $M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in [a,b]\}$, onda je

$$|R_T| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)(\Delta x)^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \quad \text{i} \tag{10}$$

$$|R_t| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)(\Delta x)^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}. \tag{11}$$

Relacije (8)-(11) potvrđuju da je, zaista, najbolja aproksimacija integrala J broj J_S pa zatim brojevi J_t, J_T i J_- (ili J_+) redom. Netočnost ovisi o $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Ako $n \to \infty$ onda $\Delta x \to 0$, pa pogotovo $(\Delta x)^k \to 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. To ponovno pokazuje da, za $n \to \infty$, R_S najbrže teži k nula jer ovisi o $(\Delta x)^4$.

Primjer 4.3.6 Izračunajmo približno integral $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ Simpsonovom formulom, tako da pogrješka bude manja od $0,1$.

Zahtjev $|R_S| < 0,1$ uvjetuje odabrati takav $n \in \mathbb{N}$ da bude

$$\frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4} = \frac{M_4}{2880n^4} < 10^{-1}, \quad \text{tj.} \quad n > \sqrt[4]{\frac{M_4}{288}}.$$

Budući da je

$$(e^{x^2})^{(4)} = 4(4x^3 + 2x^2 + 6x + 1)e^{x^2};$$

$$(e^{x^2})^{(5)} = 8(4x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 3x + 3)e^{x^2} > 0,$$

to je funkcija $(e^{x^2})^{(4)}$ pozitivna, neprekidna i uzlazna na $[0,1]$, pa poprima najveću vrijednost u točki $x = b = 1$. Dakle, $M_4 = 4(4+2+6+1)e^{1^2} = 52e$. Slijedi da treba uzeti neki

$$n > \sqrt[4]{\frac{M_4}{288}} = \sqrt[4]{\frac{M_4}{288}} \approx 0,84,$$

pa već n=1 zadovoljuje. Sada Simpsonova formula daje

$$J \approx J_S = \frac{b-a}{6}(y_0 + y_1 + 4y_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{6}(e^0 + e^1 + 4e^{0,25}) \approx \frac{1+2,718+4\cdot 1,284}{6} \approx 1,5,$$

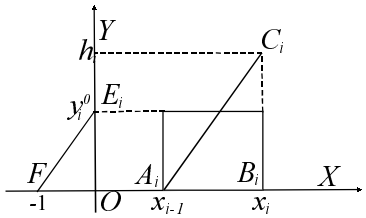
dakle, $J = 1,5 \pm 0,1$ ili $J \in \langle 1,4; 1,6\rangle$. (Neka čitatelj provjeri sljedeći podatak: Ako je $n = 10$ onda se dobiva $J \in \langle 1,4626; 1,4628\rangle$.)

Osim numeričkoga približnog integriranja, postoji i **grafičko** približno **integriranje**, koje, jasno, nema alternative ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadana samo grafički. Stoga je praktičarima važno ovladati i tom tehnikom. Sam postupak počinje izborom pogodnog, ali što grubljeg, rastava $D = \{x_0, \cdots, x_n\}$ koji dopušta približno (ploštinski) zamijeniti svaki pseudotrapez nad $[x_{i-1}, x_i]$ *jednim* pravokutnikom nad $[x_{i-1}, x_i]$ visine $y_i^o = f(x_i^o)$, $x_i^o \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$. Gledano cjelovito, funkcijin graf G_f se zamijenjuje stubastom "krivuljom" određenom gornjim osnovicama dobivenih

pravokutnika. Prema tomu, približna vrijednost određenog integrala $J = \int\limits_a^b f(x)dx$ će biti

$$J \approx J_G = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} y_i^o dx = \sum_{i=1}^{n} y_i^o (x_i - x_{i-1}).$$

Opišimo i samu tehniku grafičkoga integriranja. Promatrajmo i-ti pravokutnik, tj. onaj nad $[x_{i-1}, x_i]$ visine y_i^o. Trokutu s vrhovima $O = (0,0)$, $E_i = (0, y_i^o)$, $F = (-1, 0)$ pridružimo trokut s vrhovima $A_i = (x_{i-1}, 0)$, $B_i = (x_i, 0)$, $C_i = (x_i, h_i)$, pri čemu se h_i dobiva iz uvjeta da trokuti OE_iF i $A_iB_iC_i$ budu slični (v. crtež).

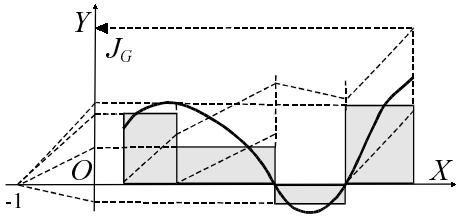


Ta sličnost povlači $d(F, O) : y_i^o = (x_i - x_{i-1}) : h_i$ pa je $h_i = y_i^o(x_i - x_{i-1})$. To znači da je h_i mjerni broj (kvadratnih) jedinica za površinu promatranoga i-tog pravokutnika. Slijedom toga, zbroj

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = J_G \approx J.$$

Korisno je i sam zbroj $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ odrediti grafički. U tu svrhu se trokut $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ zamijenjuje sukladnim trokutom $A'_{i+1}B'_{i+1}C'_{i+1}$ usporednih stranica, pri čemu je $A'_{i+1} = C'_i$, $i = 1, \cdots, n-1$, i $C'_1 = C_1$. Tada je, naime, ordinata h'_{i+1} točke C'_{i+1} jednaka zbroju $\sum\limits_{j=1}^{i+1} h_j$ pa je, u konačnici, $h'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ (v. sljedeći primjer).

Primjer 4.3.7 Neka čitatelj prouči primjer grafičkoga integriranje na crtežu dolje.



Napomena 4.3.3 Primijetimo da poligonalna crta $A_1C_1C'_2 \cdots C'_n$ aproksimira graf primitivne funkcije $x \mapsto F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$. Pritom su "prijelomne" točke C_1, C'_2, ..., C'_n to bliže odgovarajućim točkama na grafu G_F što je bolje aproksimiran integral $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ integralom $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} y_i^o dx$, $i = 1, \cdots, n$. tj.

što je bolja aproksimacija promatranih pseudotrapeza pripadnim pravokutnicima.

4.3.3 Nepravi integral

Sjetimo se da smo određeni integral definirali za omeđene realne funkcije na segmentu, a potom proširili i na njihova suženja na intervalima. Sada ćemo pokušati taj pojam proširiti, kod god bude imao smisla, i na neomeđene funkcije, kao i na funkcije s neomeđenim definicijskim područjem. U svakom od tih slučajeva, govorit ćemo o **nepravom integralu**.

Najprije ćemo razmotriti najednostavniji slučaj. Neka je, za svaki $\epsilon > 0$, suženje $f|_{[a,b-\epsilon]}$ (neomeđene) funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, $a \leq b - \epsilon < b$, i neka je $\lim\limits_{b} f = \infty$ (bilo $-\infty$ bilo $+\infty$). Označimo

$$J_d(f,\epsilon) \equiv J_d(\epsilon) = \int\limits_a^{b-\epsilon} (f|_{[a,b-\epsilon]})(x)dx.$$

Tada pripadni nepravi integral funkcije f definiramo kao graničnu vrijednost

$$\int\limits_{[a,b]} f \equiv \int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\epsilon\to 0} J_d(\epsilon). \tag{12}$$

Pritom kažemo da nepravi integral $\int\limits_{[a,b]} f$ **konvergira** čim navedena granična vrijednost postoji ($\neq \pm\infty$), a da **divergira** čim ta granična vrijednost ne postoji. Primijetimo da je, zapravo, $J_d(\epsilon) = F(b-\epsilon) - F(a)$ čim je F primitivna funkcija za f. Uočimo i da vrijednost $f(b)$ ne igra nikavu ulogu. Drugim riječima, posve je svejedno je li definicijsko područje funkcije f segment $[a,b]$ ili interval $[a,b\rangle$. Pridodajmo i opći *kriterij za konvergenciju* (dokaz je jednostavan) ovakvoga nepravog integrala:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall a_0, b_0 \in \langle b-\delta, b\rangle) \quad |\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)dx| < \epsilon.$$

Slično postupamo i u slučaju integrabilnosti na svakom podsegmentu $[a+\epsilon, b]$ pod "smetnjom" $\lim\limits_{a} f = \infty$. Označivši

$$J_l(f,\epsilon) \equiv J_l(\epsilon) = \int\limits_{a+\epsilon}^{b} (f|_{[a+\epsilon,b]})(x)dx,$$

definiramo

$$\int\limits_{[a,b]} f \equiv \int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\epsilon\to 0} J_l(\epsilon). \tag{13}$$

Primijetimo da je ovdje, zapravo, $J_l(\epsilon) = F(b) - F(a+\epsilon)$ čim je F primitivna funkcija za f. Pripadni kriterij za konvergenciju je isti kao u prethodnom slučaju, s tim da se odabiru $a_0, b_0 \in \langle a, a+\delta\rangle$.

Treći slučaj nastupa kad je "smetnja" u nekoj točki $c \in \langle a, b\rangle$, $\lim\limits_{c\pm 0} f = \infty$ (bilo slijeva ili zdesna u c). Tada se problem svodi na dva prethodna slučaja, tj. promatraju se suženja od f na $[a,c]$ i na $[c,b]$, pa ako pripadni nepravi integrali konvergiraju onda i nepravi integral $\int\limits_{[a,b]} f$ konvergira. Pripadna

formula se, u slučaju $\lim\limits_{c-0} f = \infty$ i $\lim\limits_{c+0} f = \infty$, tj. $\lim\limits_{c} f = \infty$, može zapisati ovako:

$$\int\limits_{[a,b]} f \equiv \int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx. \tag{14}$$

Napokon, sada je očito kako postupiti u "općem" slučaju, tj. kad postoji (najviše) *konačno* mnogo točaka $c_i \in [a,b]$ u kojima je $\lim\limits_{c_i \pm 0} f = \infty$, $i = 1, \cdots, n$.

Razmotrimo sada mogućnost integriranja na neomeđenom definicijskom području. Pretpostavimo, prvo, da je, za svaki $b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$, suženje $f|_{[a,b]}$ funkcije $f : [a, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Označimo

$$J(f,b) \equiv J(b) = \int\limits_a^b (f|_{[a,b]})(x)dx.$$

Nepravi integral funkcije f tada definiramo kao graničnu vrijednost

$$\int\limits_{[a,\cdot\rangle} f \equiv \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{b\to+\infty} J(b). \tag{15}$$

Kao i prije, kažemo da nepravi integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergira ako postoji ($\neq \pm\infty$) pripadna granična vrijednost, a u protivnom da divergira. Jasno, ako je F primitivna fuunkcija od f, onda je $J(b) = F(b) - F(a)$. Pripadni *kriterij za konvergenciju* se lako dokaže, a glasi ovako:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists a_0 \geq a)(\forall b_0 \geq a_0) \quad |\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)dx| < \epsilon.$$

Analogno postupamo u slučaju funkcije $f : \langle\cdot, b] \to \mathbb{R}$ kojoj je integrabilno svako suženje $f|_{[a,b]}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Označivši, dakle,

$$J(f,a) \equiv J(a) = \int\limits_a^b (f|_{[a,b]})(x)dx,$$

definiramo nepravi integral funkcije f kao graničnu vrijednost

$$\int\limits_{\langle\cdot,b]} f \equiv \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{a\to-\infty} J(a). \tag{16}$$

Dakako, $J(a) = F(b) - F(a)$ čim je F primitivna funkcija za f. Odgovarajući kriterij za konvergenciju je u biti isti, s tim da se traži neki $b_0 \leq b$ i onda uzme bilo koji $a_0 \leq b_0$. Napokon, ako je funkciji $f : \langle\cdot, b_0] \bigcup [a_0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $b_0 \leq a_0$, integrabilno svako suženje $f|_{([a,b_0]\cup[a_0,b])}$, onda se nepravi integral funkcije f svodi na dva prethodna neprava integrala. (U podslučaju $b_0 = a_0$, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, smijemo odabrati bilo koju točku $d \in \mathbb{R}$ i promatrati pripadna suženja na $\langle\cdot, d]$ i na $[d, \cdot\rangle$.) Pripadnu formulu možemo zapisati ovako:

$$\int\limits_{\langle\cdot,b_0]\cup[a_0,\cdot\rangle} f \equiv \int\limits_{-\infty}^{b_0} f(x)dx + \int\limits_{a_0}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def.}}{=}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^{b_0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a_0}^b f(x)dx. \tag{17}$$

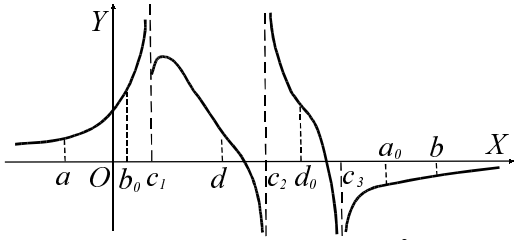
Preostaje najopćenitiji slučaj: neomeđena funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, s neomeđenim definicijskim područjem X. I ovdje pretpostavljamo obstojnost

najviše konačno mnogo točaka $c_i \in X$ u kojima je $\lim\limits_{c_i \pm 0} f = \infty$, $i = 1, \cdots, n$, i integrabilnost svakoga suženja $f|_{[a,b]}$ pri čemu (nijedna) $c_i \notin [a,b] \subseteq X$. To povlači da se nepravi integral funkcije f može definirati pomoću konačno mnogo graničnih vrijednosti oblika (12)-(15). Primjerice, za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s jedinom točkom c u kojoj je $\lim\limits_{c} f = \infty$, pripadni nepravi integral $\int\limits_{\mathbb{R}} f$ definiramo izrazom

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b_0} f(x)dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{b_0}^{c-\epsilon} f(x)dx +$$
$$+ \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{c+\delta}^{a_0} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a_0}^{b} f(x)dx,$$

pri čemu je $a \leq b_0 < c < a_0 \leq b$, i a_0, b_0 fiksni.

Primjer 4.3.8 Neka je dana funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ kojoj je graf G_f na donjem crtežu. Definirajmo nepravi integral funkcije f.



Ovdje je važno uočiti da je $X = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{c_1 - 0} f = +\infty$, $\lim\limits_{c_2 - 0} f = -\infty$, $\lim\limits_{c_2 + 0} f = +\infty$ i $\lim\limits_{c_3 \pm 0} f = -\infty$. U skladu s prethodnim razmatranjem, odaberimo točke a, a_0, b, b_0, i d_0 tako da bude $a \leq b_0 < c_1$, $c_1 < d < c_2$, $c_2 < d_0 < c_3 < a_0 < b$, pa nepravi integral funkcije f ima ovaj zapis:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \quad & \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b_0} f(x)dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{b_0}^{c_1-\epsilon} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{d} f(x)dx + \\ & \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{d}^{c_2-\delta} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{c_2+\eta}^{d_0} f(x)dx + \lim_{\mu \to 0} \int\limits_{d_0}^{c_3-\mu} f(x)dx + \\ & + \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{c_3+\rho}^{a_0} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a_0}^{b} f(x)dx.\end{aligned}$$

Primijetimo da može nastupiti i ovakav slučaj (v. Primjer 4.3.10(b)): Nepravi integrali

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{d}^{c_2-\epsilon} f(x)dx \quad \text{i} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{c_2+\epsilon}^{d_0} f(x)dx$$

divergiraju, a ipak postoji granična vrijednost

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int\limits_{d}^{c_2-\epsilon} f(x)dx + \int\limits_{c_2+\epsilon}^{d_0} f(x)dx \Big).$$

Može se, naime, pritom dogoditi i da bude

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int\limits_{d}^{c_2-\epsilon} f(x)dx + \int\limits_{c_2+\epsilon}^{d_0} f(x)dx \Big) = F(d_0) - F(d)$$

čim je F primitivna funkcija za f, pa bi se smjelo uvjetno reći da "postoji određeni integral" $\int\limits_{d}^{d_0} f(x)dx$. Slično, moguće je da nepravi integrali

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{c_2+\epsilon}^{d_0} f(x)dx) \quad \text{i} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{d_0}^{c_3-\epsilon} f(x)dx)$$

divrgiraju, a da postoji granična vrijednost

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\int\limits_{c_2+\epsilon}^{d_0} f(x)dx + \int\limits_{d_0}^{c_3-\epsilon} f(x)dx) = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{c_2+\epsilon}^{c_3-\epsilon} f(x)dx.$$

To je temeljni razlog za *različito označavanje* svake granične vrijednosti u nepravom integralu. U svezi s ovim, definira se tzv. **glavna vrijednost** nepravog integrala. Primjerice, za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ s jedinom "integracijskom smetnjom" u točki $c \in \langle a,b\rangle$, $\lim\limits_{c-0} f = -\infty(+\infty)$ i $\lim\limits_{c+0} f = +\infty(-\infty)$, glavnom vrijednošću pripadnoga nepravog integrala nazivamo graničnu vrijednost

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\int\limits_{a}^{c-\epsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx) \equiv V.P.(\int\limits_{a}^{b} f(x)dx).$$

Ako pak funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ima jedine "integracijske smetnje" na rubu, tj. $\lim\limits_{a} f = -\infty(+\infty)$ i $\lim\limits_{b} f = +\infty(-\infty)$, onda se glavna vrijednost pripadnoga nepravog integrala definira kao

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)dx \equiv V.P.(\int\limits_{a}^{b} f(x)dx).$$

Napokon, za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrabilnu na svakom segmentu, glavnom vrijednošću pripadnog nepravog integrala nazivamo graničnu vrijednost

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx \equiv V.P.(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx).$$

Primjer 4.3.9 Istražimo konvergira li nepravi integral $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Najprije odredimo točan zapis toga nepravog integrala. Definicijsko područje X funkcije $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ jest skup $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = \langle 0,1\rangle \bigcup \langle 1,\cdot\rangle$. Budući da je $\lim\limits_{0} f = +\infty = \lim\limits_{1} f$ i da su 0, 1 i neomeđeno integracijsko područje jedine "smetnje", naš nepravi integral ima ovaj zapis:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\epsilon}^{d} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{d}^{1-\delta} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{1+\eta}^{a} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x},$$

pri čemu je $\epsilon, \delta, \eta > 0$, $0 < d < 1$ i $1 < a \leq b$. Primijetimo da je

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + c$$

pa je $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{\ln x}$, primitivna funkcija za f. Budući da je $\lim\limits_{1\pm 0} F = \pm\infty$, to promatrani nepravi integral divergira. Neka se čitatelj uvjeri (kako izravnim računom tako i primjenom kriterija za konvergenciju) da prvi i četvrti nepravi integral (pribrojnik) u zapisu gore konvergiraju.

Primjer 4.3.10 Istražimo konvergira li nepravi integral:

(a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$.

(a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int\limits_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}[2\sqrt{x}]_\epsilon^1 = 2\lim\limits_{\epsilon\to 0}(1-\sqrt{\epsilon}) = 2.$

(b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x^3} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}[\frac{-1}{2x^2}]_{-1}^{-\epsilon} + \lim\limits_{\delta\to 0}[\frac{-1}{2x^2}]_\delta^1 = (-\infty)+(+\infty),$

pa ovaj nepravi integral divergira. (Neka čitatelj provjeri konvergenciju (divergenciju) tih nepravih integrala i pomoću danoga kriterija!) S druge strane, primijetimo da je

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\int\limits_a^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int\limits_\epsilon^b \frac{dx}{x^3}) = \lim_{\epsilon\to 0}([\frac{-1}{2x^2}]_a^{-\epsilon} + [\frac{-1}{2x^2}]_\epsilon^b) = \lim_{\epsilon\to 0}(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}),$$

za svaki $a < 0$ i svaki $b > 0$. Posebice, za $a = -1$ i $b = 1$, dobivamo njegovu glavnu vrijednost

$$V.P.(\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}) = \lim_{\epsilon\to 0}(\int\limits_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int\limits_\epsilon^1 \frac{dx}{x^3}) = 0.$$

4.3.4 Nekoliko primjena određenog integrala

U ovomu pododjeljku ćemo pokazati kako se određeni integral primijenjuje na rješavanje nekih, pretežito geometrijskih, zadaća. Na početku trebamo malo detaljnije upoznati neke pojmove u svezi s krivuljom (v. §2.3.4; (18)-(30)), premda sama definicija neće, a na ovoj razini ni ne može, biti sasvim matematički korektna. Dakako, da će graf G_f neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabilne svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka, biti i dalje osnovni primjer ravninske krivulje.

Definicija 4.3.2 *Neka je u ravnini σ dan pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ (v. §2.2.2). Reći ćemo da je skup $\Gamma \subseteq \sigma \equiv \mathbb{R}^2$ (**ravninska**) **krivulja** ako postoje interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i uređeni par (ϕ, ψ) neprekidnih funkcija $\phi, \psi : I \to \mathbb{R}$, takvi da je $\Gamma = \{(\phi(t), \psi(t)) \mid t \in I\}$. Zapis $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ nazivamo **parametarskim jednadžbama**, a surjekciju $r : I \to \Gamma$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, - **neprekidnom parametrizacijom** krivulje Γ. (Da bismo bili posve korektni, treba pridodati uvjet o konačnosti tzv. singularnog skupa $\{t \in I \mid r^{-1}[\{r(t)\}] \neq t\}$!)*

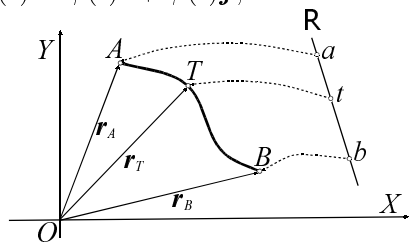
*Reći ćemo da je krivulja Γ **jednostavna** ako se funkcije ϕ i ψ mogu odabrati tako da funkcija r bude bijektivna. Ako je I segment $[a, b]$ i $r(b) = r(a)$, onda za Γ kažemo da je **zatvorena** krivulja. Jednostavnu krivulju Γ nazivamo (ravninskim) **lukom** i često označujemo s $\overset{\frown}{AB}$, pri čemu je $A = r(a)$ i $B = r(b)$, govoreći pritom da su točke A i B **krajevi** (ili **rub**) od $\overset{\frown}{AB}$. Ako je bijektivnost funkcije r narušena samo u točkama a i b, tj. $r(a) = r(b)$, onda kažemo da je Γ **jednostavno zatvorena** krivulja.*

*Reći ćemo da je krivulja Γ **glatka** ako se funkcije ϕ i ψ mogu odabrati tako da budu neprekidno derivabilne i da bude $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \neq 0$ u svakoj*

točki $t \in I$. U tom slučaju kažemo da je $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, $t \in I$, ***glatka parametrizacija*** *krivulje Γ. Ako uvjetu $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \neq 0$ nije udovoljeno u najviše konačno mnogo točaka $t_1, \cdots, t_n \in I$, onda kažemo da je krivulja Γ* ***po dijelovima glatka****. (Napomenimo da uvjet $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \neq 0$ znači obstojnost krivuljine tangente u točki $r(t) \in \Gamma$!)*

Shvatimo li koordinate točke $T = (\phi(t), \psi(t)) \in \Gamma$, $t \in I$, komponentama radijus-vektora $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_T$ te točke (v. crtež dolje), dobivamo **vektorsku parametarsku jednadžbu** krivulje Γ:

$\Gamma \ldots \boldsymbol{r}(t) = \phi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j}, \quad t \in I.$



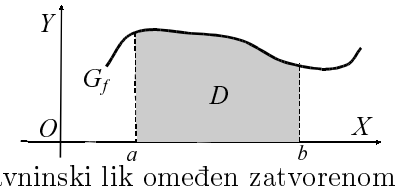
Primjer 4.3.11 Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ preslikavanje, derivabilno svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka. Tada su $y = f(t)$, $x = i_{[a,b]}(t) = t$, $t \in [a, b]$, ($\phi = f$, $\psi = i_{[a,b]}$ - inkluzija) parametarske jednadžbe po dijelovima glatkoga luka (grafa) $\Gamma = G_f$. (Funkcija $r : [a, b] \to G_f$, $r(t) = (f(t), t)$, je bijekcija!) Pripadna vektorska jednadžba je $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}, \quad t \in [a, b]$. Dakako da je i $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, jednadžba te krivulje, ali u pravokutnim (Kartezijevim) koordinatama.

Primjer 4.3.12 Neka je u ravnini σ, pored Kartezijeva $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, dan i polarni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\phi})$ (v. §2.3.5). Neka je $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ preslikavanje, derivabilno svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka. Tada je $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, polarna jednadžba po dijelovima glatke krivulje (grafa) $\Gamma \equiv G_g = \{(\rho, \varphi) \mid \rho = g(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]\}$ u pripadnomu polarnom sustavu. Kao što znamo, parametarske jednadžbe te krivulje jesu $x = g(\varphi)\cos\varphi$, $y = g(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Primjerice, elipsa $\mathcal{E} \ldots x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (v. §2.3.4 (20)), je glatka jednostavno zatvorena krivulja, dok je astroida $\mathcal{A} \ldots x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (v. §2.3.4 (28)), po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. (Uvjetu $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$ nije udovoljeno u točkama $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$.)

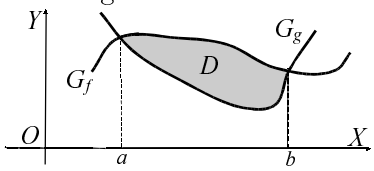
Napomena 4.3.4 (Glatkoj) krivulji se može pridijeliti više (glatkih) parametrizacija. Npr. kružnici $\mathcal{K} \ldots x^2 + y^2 = 4$ su $x = 2\cos(nt)$, $y = 2\sin(nt)$, $t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$, parametarske jednadžbe za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nije teško dokazati da, za svaki luk $\overset{\frown}{AB}$, $A \neq B$, svaka parametrizacija čuva rub, tj. $r[\{a, b\}] = \{A, B\}$ (premda nije nužno $r(a) = A$ i $r(b) = B$).

Napomena 4.3.5 "Dodavanjem jedne dimenzije" se Definicija 4.3.2 prirodno proširuje na definiciju prostorne krivulje (v. §6.3.1).

(a) **Ploština ravninskog lika** (**kvadratura**). U pododjeljku 4.4.1 smo pokazali da se određeni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$, f neprekidna i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a,b]$, smije interpretirati kao ploština pseudotrapeza što ga određuje krivulja $y = f(x)$ nad segmentom $[a,b]$ (v. (1) i Teorem 4.3.5 (2)).

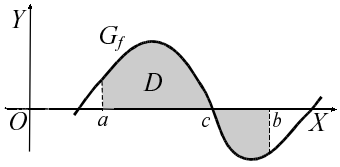


Ako je ravninski lik omeđen zatvorenom krivuljom ili se prostire i na donju poluravninu, onda za izračunavanje njegove ploštine rabimo dva ili više određenih integrala, tj. "snalazimo se" od slučaja do slučaja. Primjerice, ploština ravninskoga lika D na crtežu dolje jest



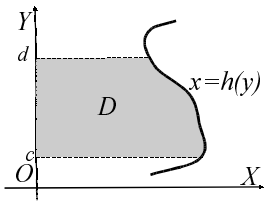
$$P(D) = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx,$$

dok za ploštinu ravninskoga lika D na ovoj skici treba staviti



$$P(D) = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^b g(x)dx.$$

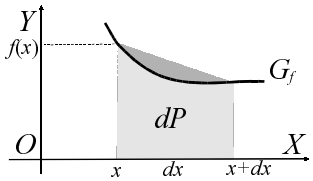
Kad je krivulja zadana "inverznom" funkcijom, tj. jednadžbom $x = h(y)$, $y \in [c,d]$ (v. crtež dolje)), ploština pripadnoga pseudotrapeza D se izračuna po formuli



$$P(D) = \int\limits_c^d h(y)dy.$$

Napomena 4.3.6 Označimo li u formuli za ploštinu, $P(D) = \int\limits_a^b f(x)dx$, umnožak $f(x)dx$ kao dP, smijemo pisati $P(D) = \int\limits_{[a,b]} dP$. Geometrijski se broj dP smije interpretirati kao ploština "infinitezimalnog" ("neizmjerno

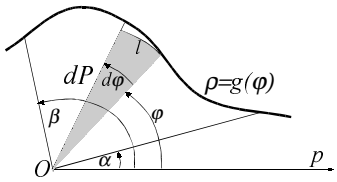
malog") pseudotrapeza nad segmentom $[x, x+dx]$, koji se onda smije aproksimirati trapezom s osnovicama $f(x)$ i $f(x) + \Delta f(x)$ i visinom dx (v.crtež). Zaista,



$$\frac{f(x)+f(x)+\Delta f(x)}{2}dx = f(x)dx + \frac{\Delta f(x)dx}{2} \approx f(x)dx = dP$$

pri čemu smo umnožak $\Delta f(x)dx$ dvaju neizmjerno malih brojeva zanemarili u zbroju s $f(x)dx$. Stoga se o $dP = f(x)dx$ govori kao o "ploštinskom elementu" ravninskoga lika D. "Zbrajanjem" (tj. integriranjem) svih ploštinskih elemenata nad segmentom $[a, b]$ dobivamo traženu ploštinu $P(D)$. Na isti način ćemo, poslije, svaki podintegralni izraz pomoću kojega izračunavamo ploštinu (duljinu, obujam (volumen), ...) zvati analognim imenom. Često se formalnim izračunavanjem tih "elemenata" vrlo lako dolazi do korisnih formula za izračunavanje traženih veličina. (Ipak, ispravnost tako dobivene formule treba potvrditi korektnim dokazom!)

Neka je ravninska krivulja Γ zadana u polarnim koordinatama jednadžbom $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha_0, \beta_0]$.



Izračunajmo ploštinu pseudotrokuta određenoga krivuljom Γ i pravcima $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$. Za "ploštinski element" uzimamo pripadni kružni isječak od φ do $\varphi + d\varphi$ polumjera $g(\varphi)$, tj.

$$dP = \frac{l\rho}{2} = \frac{\rho \cdot d\varphi \cdot \rho}{2} = \frac{g(\varphi)^2 d\varphi}{2},$$

gdje su l i ρ opće oznake, redom, za lučnu duljinu i polumjer. Slijedi

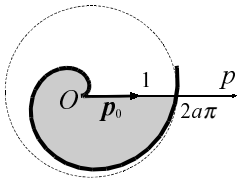
$$P(D) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi)^2 d\varphi. \tag{18}$$

Isti rezultat bismo dobili i strogim izvodom, tj. pomoću pripadnih donjih i gornjih suma:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leq P(D) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

za svaki rastav $\{\varphi_0, \cdots, \varphi_n\}$ segmenta $[\alpha, \beta]$ (pod pretpostavkom da je funkcija $g^2|_{[\alpha,\beta]}$ integrabilna!).

Primjer 4.3.13 Izračunajmo ploštinu ravninskoga lika D omeđenoga polarnom osi i prvim "zavojem" Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$, $a > 0$.



$$P(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3a^2}{3}.$$

(Uočimo da je $P(D) = \frac{\pi(2\pi a)^2}{3}$, što je trećina ploštine kruga s polumjerom $2\pi a$!)

(b) **Duljina ravninskog luka** (**rektifikacija**). Neka je ravninski luk $\Gamma \equiv \overset{\frown}{AB}$ (dopuštamo i $B = A$) zadan parametarskim jednadžbama $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a,b]$, pri čemu je $A = (\phi(a), \psi(a))$ i $B = (\phi(b), \psi(b))$. Označimo s $\mathcal{D} = \mathcal{D}([a,b])$ skup svih rastava segmenta $[a,b]$. Bijekcija (do na rub) $r : [a,b] \to \overset{\frown}{AB}$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, pridružuje svakom rastavu $D = \{t_0, \cdots, t_n\} \in \mathcal{D}$ točkovni skup $\{M_0, \cdots, M_n\}$ na Γ, $M_0 = A = r(t_0 = a)$, $\cdots$, $M_n = B = r(t_n = b)$. Točke M_i dijele luk Γ na n podlukova $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, \cdots, n$. Spojimo li svaki par susjednih točaka, M_{i-1} i M_i, dužinom, dobivamo poligonalnu crtu "upisanu" luku Γ. Pridijelimo sada svakom rastavu D broj

$$L(r; D) = \sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1}, M_i),$$

pri čemu $d(M_{i-1}, M_i)$ označuje duljinu pripadne dužine, tj. $\left\|\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\right\|$.

Definicija 4.3.3 *Reći ćemo da ravninski luk $\Gamma \equiv \overset{\frown}{AB}$, zadan jednadžbom $r : [a,b] \to \overset{\frown}{AB}$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, $t \in [a,b]$,* ***ima duljinu*** *(ili da je* ***rektifikabilan****), ako je skup $\{L(r; D) \mid \mathcal{D} = \mathcal{D}([a,b])\} \subseteq \mathbb{R}$ omeđen. Tada broj $\sup\{L(r; D) \mid \mathcal{D} = \mathcal{D}([a,b])\}$ nazivamo* ***duljinom*** *luka Γ i označujemo s $L(\Gamma)$.* (Treba napomenuti da ova definicija nije posve korektna! Naime, trebalo bi prije dokazati da promatrani supremum ne ovisi o odabranoj parametrizaciji r, što bi nas odvelo izvan zadanih okvira.)

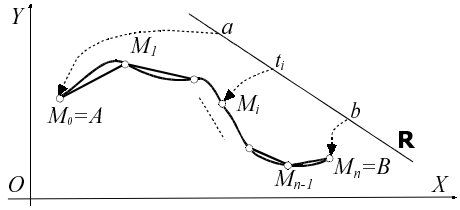
Usredotočimo se sada na efektivno izračunavanje duljine po dijelovima glatkog ravninskog luka.

Teorem 4.3.7 *Neka je $\Gamma \equiv \overset{\frown}{AB}$ po dijelovima glatki ravninski luk zadan pripadnom parametrizacijom $r : [a,b] \to \Gamma$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, $t \in [a,b]$. Tada je njegova duljina*

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt. \tag{19}$$

Dokaz. Po Definiciji 4.3.2, funkcije $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ su neprekidno derivabilne svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka i pritom je $\phi'(t)^2 +$

$\psi'(t)^2 \neq 0$. Neka je $D = \{t_0, \cdots, t_n\}$ bilo koji rastav od $[a,b]$ i neka je $M_i = r(t_i) \equiv (x_i, y_i)$, $i = 0, \cdots, n$, $M_0 = A$, $M_n = B$ (v. crtež).



Po Definiciji 4.3.3, rastavu D pridijeljujemo broj $L(r;D)$,

$$0 \leq L(r;D) = \sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} \overset{(T.4.1.9)}{=}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\phi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}))^2 + (\psi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}))^2} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\phi'(\tau_i)^2 + \psi'(\tilde{\tau}_i)^2}(t_i - t_{i-1}),$$

pri čemu su $\tau_i, \tilde{\tau}_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, $i = 1, \cdots, n$. Neka je $m_{\phi'} = \min\{|\phi'(t)| \mid t \in [a,b]\}$, a $M_{\phi'} = \max\{|\phi'(t)| \mid t \in [a,b]\}$, te neka su slično definirani i brojevi $m_{\psi'}$ i $M_{\psi'}$. (Svi oni postoje jer su funkcije ϕ' i ψ', pa onda i $|\phi'|$ i $|\psi'|$ neprekidne na segmentu $[a,b]$.) Slijedi da je

$$L(r;D) \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}(t_i - t_{i-1}) =$$
$$\sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = (b-a)\sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2},$$

što znači da je skup $\{L(r;D) \mid \mathcal{D} \in \mathcal{D}([a,b])\} \subseteq \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$ omeđen, pa po Definiciji 4.3.3 luk Γ ima duljinu $L(\Gamma) = \sup\{L(r;D) \mid \mathcal{D} \in \mathcal{D}([a,b])\}$. Posve slično se može pokazati da je $(b-a)\sqrt{m_{\phi'}^2 + m_{\psi'}^2}$ donja međa promatranoga skupa. Dokažimo da se traženi supremum može izračunati po formuli (19)! Pretpostavimo, na trenutak, da je luk Γ gladak. Odaberimo po volji točku $M_t = (\phi(t), \psi(t))$ na Γ, $t \in [a,b\rangle$, pa promatrajmo "podluk" $\widehat{AM_t}$ i njegovu duljinu označimo s $L(t)$. (Lako se vidi da svaki "podluk" ima duljinu čim luk ima duljinu.) Nadalje, za po volji mali $\Delta t > 0$, $t + \Delta t \in [a,b]$, promatrajmo točku $M_{t+\Delta t}$ na Γ. Rabeći oznake za priraste, smijemo pisati $L(t + \Delta t) = L(t) + \Delta L(t)$ pri čemu $\Delta L(t)$ označuje lučnu duljinu za $\widehat{M_t M_{t+\Delta t}}$. Označimo, jednostavnosti radi, minimume i maksimume od $|\phi'|$ i $|\psi'|$ na $[t, t+\Delta t]$ opet s $m_{\phi'}$, $M_{\phi'}$, $m_{\psi'}$ i $M_{\psi'}$. Po prije dokazanom slijedi

$$\Delta t\sqrt{m_{\phi'}^2 + m_{\psi'}^2} \leq \Delta L(t) \leq \Delta t\sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}, \quad \text{tj.}$$
$$\sqrt{m_{\phi'}^2 + m_{\psi'}^2} \leq \frac{\Delta L(t)}{\Delta t} \leq \sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}.$$

Budući da su funkcije $|\phi'|$ i $|\psi'|$ neprekidne, to je $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |m_{\phi'}| = |\phi'(t)| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} |M_{\phi'}|$ i $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |m_{\psi'}| = |\psi'(t)| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} |M_{\psi'}|$. Posve slično se zaključuje na segmentu $[t - \Delta t, t]$ za $t \in \langle a, b]$. Prema tomu,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta L(t)}{\Delta t}=\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2},\quad \text{tj.}\quad L'(t)=\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}.$$

Primijetimo da je $L(0)=0$, pa Teoremu 4.3.4 povlači

$$L(t)=\int_a^t\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt.$$

Budući da je $M_b=B$, to je $L(\Gamma)=L(b)$ pa je u slučaju glatke krivulje teorem dokazan. Ako je krivulja po dijelovima glatke, onda je izvod za formulu (19) "problematičan" u najviše konačno točaka, a to, kao što znamo, ne narušava valjanost dobivene integralne formule. (Smije se reći i da je duljina po dijelovima glatke krivulje jednaka (konačnom) zbroju duljina svojih maksimalnih glatkih dijelova.) ■

Pozivajući se na prijašnji dogovor (v. Napomenu 4.3.6), smijemo "podluk" nad segmentom $[t,t+dt]$ smatrati "lučnim elementom" i pisati

$$dL=\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt.$$

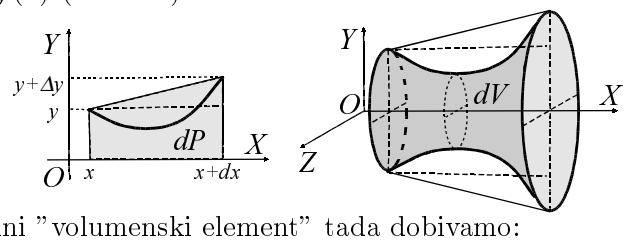
Ako je ravninski luk Γ zadan jednadžbom $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, pri čemu je funkcija f neprekidno derivabilna, onda iz parametrizacije $x=t$, $y=f(t)$, $t\in[a,b]$, dobivamo

$$L(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx. \tag{20}$$

Ako je, pak, luk Γ zadan (jednadžbom) u polarnim koordinatama $\rho=g(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, g neprekidno derivabilna, onda parametrizacija $x=g(\varphi)\cos\varphi$, $y=g(\varphi)\sin\varphi$, daje $(x')^2+(y')^2=g(\varphi)^2+g'(\varphi)^2$. Slijedi,

$$L(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{g(\varphi)^2+g'(\varphi)^2}d\varphi. \tag{21}$$

(c) **Obujam rotacijskog tijela (kubatura)**. Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna funkcija. Tada graf G_f posve određuje pseudotrapez nad segmentom $[a,b]$. Vrtnjom oko X-osi taj pseudotrapez oblikuje geometrijsko tijelo koje nazivamo **rotacijskim tijelom**. Za dostatno mali dx, pripadni njegov dio određen segmentom $[x,x+dx]\subseteq[a,b]$ aproksimirat ćemo krnjim stošcem visine dx i baznih polumjera $f(x)$ i $f(x+dx)=f(x)+\Delta f(x)$ (v. crtež)



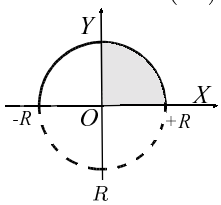
Za pripadni "volumenski element" tada dobivamo:

$$dV=\tfrac{\pi dx}{3}(f(x)^2+f(x)(f(x)+\Delta f(x))+(f(x)+\Delta f(x))^2)=$$
$$\tfrac{\pi dx}{3}(3f(x)^2+3f(x)\cdot\Delta f(x)+(\Delta f(x))^2)\approx\pi f(x)^2dx,$$

gdje smo pribrojnike $3f(x)\cdot\Delta f(x)$ i $(\Delta f(x))^2$ ispustili jer su zanemarivo mali prema $3f(x)^2$. (Ovo povlači da smo za promatrani "volumenski element" smjeli odabrati i valjak visine dx i baznog polumkera $f(x)$!) Prema tomu, traženi obujam (zapremina) rotacijskoga tijela jest

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \tag{22}$$

Primjer 4.3.14 Izračunajmo kuglinu zapreminu.
Svaku kuglu smijemo smatrati rotacijskim tijelom, pri čemu podrazumijevamo da se odgovarajući polukrug vrti oko svoga promjera. Za rješenje ove zadaće, promatrajmo kružnicu $\mathcal{K}$ ... $x^2 + y^2 = R^2$. Dostatno je promatrati samo funkciju $x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$ (pripadnu četvrtinu kruga, v. crtež). Po formuli (22) dobivamo



$$V = 2 \cdot \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi [R^2 x - \tfrac{x^3}{3}]_0^R = \tfrac{4\pi R^3}{3}.$$

Ako je krivulja Γ zadana parametarskim jednadžbama $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, i ako je $\psi \geq 0$ i ϕ neprekidno derivabilna, onda je obujam pripadnoga rotacijskog (oko X-osi, nad [a,b]) tijela dan formulom (izravno iz (22))

$$V = \pi \int_a^b \psi(t)^2 \phi'(t) dt. \tag{23}$$

Ako je, pak, krivulja Γ zadana polarnom jednadžbom $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, g neprekidno derivabilna, onda parametrizacija $x = g(\varphi)\cos\varphi$, $y = g(\varphi)\sin\varphi$, daje $dx = (g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi)d\varphi$. Slijedi,

$$V = \int_\alpha^\beta g(\varphi)^2 (g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi)\sin^2\varphi d\varphi. \tag{23'}$$

Napokon, po analgiji s formulom (23), za obujam pripadnoga rotacijskog tijela što nastaje vrtnjom oko Y-osi dobivamo

$$V_Y = \pi \int_a^b \phi(t)^2 \psi'(t) dt = \pi \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} (\phi\psi^{-1})^2(y) dy. \tag{24}$$

(d) **Ploština rotacijske plohe** (**komplanacija**). Pod pretpostavkama iz prethodnoga razmatranja (u (c)), promatrajmo sada samo plašt (bez osnovica) pripadnoga rotacijskog tijela, tzv. **rotacijsku plohu**. Da bismo joj izračunali ploštinu P, izračunajmo prvo njezin "ploštinski element" dP. Opet ćemo za aproksimiranje uzeti krnji stožac, tj. njegov plašt. Dakle, radi se o plaštu krnjega stošca baznih polumjera $f(x)$ i $f(x) + \Delta f(x)$ i visine dx. Njegova izvodnica je $s = \sqrt{(dx)^2 + (\Delta f(x))^2}$ pa je

$$dP = \pi(2f(x) + \Delta f(x))ds) \approx 2\pi f(x) ds,$$

pri čemu smo pribrojnik $\Delta f(x) ds$ ispustili jer zanemariv prema $2f(x)ds$. Sada u skladu s Napomenom 4.3.6 i koristeći (20) dobivamo

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \tag{25}$$

U slučaju po dijelovima glatkog luka zadanog odgovarajućom parametrizacijom $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, dobivamo ($f(x) \geq 0$)

$$P = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt, \tag{26}$$

a ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama, tj. $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, onda je

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta |g(\varphi) \sin\varphi| \sqrt{g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2} d\varphi. \tag{27}$$

Primjer 4.3.15 Izračunajmo loptinu (sferinu) ploštinu. Kao i u primjeru 4.3.14, dostatno je promatrati kružničin dio $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$, i primijeniti formulu (25). Nu, budući da je taj račun mnogo jednostavniji u polarnim koordinatama, primijenit ćemo formulu (27). (Polu)kružnica ima tada jednadžbu $\rho = R$, $\varphi \in [0, \pi]$, pa je tražena ploština

$$P = 2\pi \int_0^\pi R \sin\varphi \sqrt{R^2 + 0^2} d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 4\pi R^2.$$

Napomena 4.3.7 O plohi, općenitije, i njezinoj ploštini bit će više riječi u §6.4.1-3.

(e) **Težište ravninskog lika**. Promatrajmo pseudotrapez određen neprekidnom i nenegativnom funkcijom $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ne pojašnjavajući detaljnije fizičke razloge, recimo da se momenti (s obzirom na X-os i Y-os) toga lika definiraju izrazima

$$M_X = \tfrac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx; \quad M_Y = \int_a^b x f(x) dx.$$

To povlači da se koordinate njegova težišta ("masenoga središta") $T = (\xi, \eta)$, $\xi = \frac{M_Y}{P}$ i $\eta = \frac{M_X}{P}$, mogu izračunati po formulama

$$\xi = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b f(x)^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}. \tag{28}$$

Primjer 4.3.16 Odredimo težište za polukrug.

Jednostavnosti radi, neka je polukrug određen (polu)kružnicom $x \mapsto y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$. Zbog simetričnosti je $\xi = 0$. Da bismo izračunali η, izračunajmo prvo moment M_X.

$$M_X = \tfrac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx = \tfrac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \tfrac{1}{2} [R^2 x - \tfrac{x^3}{3}]_{-R}^R = \tfrac{2}{3} R^3.$$

Budući da je pripadna ploština $P = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi R^2$, to je $\eta = \frac{4}{3\pi} \cdot R \approx 0,4244R$.

Pridodajemo, bez dokaza, i odgovarajuće formule za momente u polarnim koordinatama:

$$M_X = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta g(\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi; \quad M_Y = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta g(\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi.$$

Pomoću njih i (18) se lako izračunavaju težišne koordinate ravninskih likova zadanih u polarnom sustavu.

Napomena 4.3.8 Formule (28) su uporabljive i za određivanje težišta tvarnih tijela koja su *homogena* (jednolike gustoće) *i relativno tanka, tj. kojima* je jedna dimenzija ("debljina") zanemariva prema drugim dvjema ("dužini" i "širini"). To su, primjerice, raznovrsne tanke ploče, ravni limovi i sl. Naime, masa takvog tijela je (kao što znamo iz fizike) razmjerna ploštini pripadnog lika pa se isti faktor (gustoća) pojavljuje u brojnicima i nazivnicima ne mijenjajući formule (28). Primijetimo, nadalje, da množeći formule (28) faktorom $2\pi P$ i primijenjujući formulu (22) dobivamo tzv. *Guldinov teorem*

$$2\pi\eta P = V,$$

tj. obujam odgovarajuæega rotacijskog (oko X-osi) tijela jednak je umnošku pripadne ploštine i opsega kružnice što ju opisuje težište.

4.3.5 Vježbe.

1. Izračunati donju i gornju sumu za suženje f kvadriranja $x \mapsto x^2$ na segmentu $[-1, 2]$ s obzirom na rastav:

(a) $D = \{-1, 0, 2\}$; (b) $D = \{-1, 0, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

Rješenje za (a): Budući da je $m_1 = f(0)$, $m_2 = f(0)$, $M_1 = f(-1)$, $M_2 = f(2)$, to je

$$s(f; D) = \sum_{i=1}^{2} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0(0 - (-1)) + 0(2 - 0) = 0,$$

$$S(f; D) = \sum_{i=1}^{2} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1(0 - (-1)) + 4(2 - 0) = 9.$$

2. Izračunati integral $\int_{-1}^{2} x^2 dx$ te ga usporediti s ishodima u zadatku 1.

3. Procijeniti integral $J = \int_2^8 \frac{x}{\ln x} dx$ pomoću Teorema 4.3.3(iii).

$[16, 2 < J < 23, 1.]$.

4. Približno izračunati integral $J = \int_1^7 \sqrt{2x^2 - \sin x} dx$ trapeznom formulom kad je $n = 6$, odnosno, kad je $n = 12$. $[J_T \approx 33, 72$ za $n = 6$; $J_T \approx 33, 74$ za $n = 12.]$

5. Istražiti konvergira li nepravi integral:

(a) $\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{1-x^4}$; (b) $\int_0^\pi \cot x dx$ $(V.P. = ?)$.

Rješenje za (a): $\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{1-x^4} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{1-x^4} = \cdots =$

$\lim\limits_{a\to-\infty} ([\frac{1}{4}\ln|\frac{x+1}{x-1}| + \frac{1}{2}\arctan x]_a^{-\sqrt{3}}) = \cdots = \frac{\ln(2-\sqrt{3})}{4} + \frac{\pi}{12}$.

6. Provjeriti konvergenciju i izračunati $\int\limits_0^{+\infty} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^4})dx$ (usp. 4.2.5, Zadatak 7.).

7. Razviti u Maclaurinov red funkciju

$F : [0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$, $F(0) = 0$,

pa znajući da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ izračunati $F(1)$.

8. Izračunati $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ s točnošću do na 10^{-5} (v. Primjer 4.2.16(b)).

9. Neka je $\Gamma = \widehat{AB}$ parabolin luk: $y = x^2$, $A = (-1, y_1)$, $B = (1, y_2)$. Pokazati da su $r_{1,2} : [e^{-1}, e] \twoheadrightarrow \Gamma$, $r_1(t) = (\ln t, \ln^2 t)$ i $r_2(t) = (-\ln t, \ln^2 t)$, parametrizacije za Γ i da je $r_1(e^{-1}) = A = r_2(e)$ i $r_1(e) = B = r_2(e^{-1})$. Jesu li te parametrizacije glatke?

10. Izračunati ploštinu ravninskoga lika D omeđenoga krivuljom $y = (1-x^2)\ln(1-x)$ i pozitivnim dijelom X-osi.

Rješenje: Krivulja je definirana nad intervalom $[0, 1\rangle$ i $y < 0$ za svaki $x \neq 0$, a $y = 0$ za $x = 0$. Nadalje, $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\ln(1-x) = \cdots = 0$, pa je lik D posve određen i njegova ploština je

$P(D) = -\int\limits_0^1 (1-x^2)\ln(1-x)dx.$

Međutim, budući da je podintegralna funkcija definirana $[0, 1\rangle$, taj integral treba riješavati kao nepravi integral. Dakle,

$P(D) = \lim\limits_{\epsilon\to0}(-\int\limits_0^{1-\epsilon} (1-x^2)\ln(1-x)dx) \overset{\text{parc. integracija}}{=}$

$-\lim\limits_{\epsilon\to0}([(x-\frac{x^3}{3})\ln(1-x)]_0^{1-\epsilon} + \frac{1}{3}\int\limits_0^{1-\epsilon} \frac{x^3-3x}{x-1}dx) = \cdots =$

$-\lim\limits_{\epsilon\to0}((\frac{\epsilon^3}{3} - \epsilon^2 + \frac{2}{3})\ln\epsilon - \frac{\epsilon^3}{9} + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{7}{18} - \frac{2}{3}\ln\epsilon) = \frac{7}{18}$ (kvadratnih jedinica).

11. Izračunati duljinu L lančanice $y = a\cosh\frac{x}{a}$ od točke $A = (0, a)$ do točke $B = (a \operatorname{arch}\frac{h}{a}, h)$, ($a$ i h su konstante, $\frac{h}{a} \geq 1$). [$L = \sqrt{h^2 - a^2}$.]

12. Izračunati obujam rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom lika omeđenoga:

(a) astroidom $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, oko Y-osi;

(b) kružnicom $(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2$, $|q| \geq R$, oko X-osi (torus).

[(a) $V_Y = \frac{32}{105}\pi a^2$; (b) $V = 2\pi^2 R^2 q$ (provjeriti ishod Guldinovim teoremom).]

13. Izračunati ploštinu rotacijske plohe nastale vrtnjom kardioide $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$ oko polarne osi. [$P = \frac{128}{5}\pi a^2$.]

14. Izračunati integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - a^2\sin^2 x}dx$, $a \in \langle 0, 1\rangle$ konstanta (*eliptički*

integral druge vrste).
Rješenje: Taj integral nije elementarno rješiv. Izračunat ćemo ga razvojem podintegralne funkcije u (binomni) red:

$$(1-a^2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-a^2\sin^2 x)^n,\ a^2\sin^2 x \leq 1, \text{ (v. Primjer 4.1.19).}$$

Budući da je

$$|\binom{\frac{1}{2}}{n}(-a^2\sin^2 x)^n| \leq |\binom{\frac{1}{2}}{n}a^{2n}|$$

i budući da red $\sum \binom{\frac{1}{2}}{n}a^{2n}$ apsolutno konvergira, Weierstrassov kriterij (Teorem 3.2.17) povlači jednoliku konvergenciju promatranoga funkcijskog reda. Sada Teorem T.4.2.8. (u verziji za određeni integral) dopušta integriranje "član po član", tj.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-a^2\sin^2 x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (\binom{\frac{1}{2}}{n}(-a^2)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xdx).$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xdx = \cdots = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n \geq 1,$$

pri čemu je $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)$, a $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot(2n)$. Uvrštenjem i sređivanjem napokon proizlazi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-a^2\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2}(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{2n-1}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^2).$$

Poglavlje 5

ANALIZA REALNIH FUNKCIJA VIŠE VARIJABLA

5.1 FUNKCIJE IZ $\mathbb{R}^m$ U $\mathbb{R}$

Funkciju smo definirali u §1.3. U §3.1 i §3.2 te u poglavlju 4 temeljitije smo proučili realne funkcije jedne realne varijable. U ovomu poglavlju ćemo promatrati realne funkcije više realnih varijabla, tj. funkcije definirane na podskupovima $X \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (m puta, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) s vrijednostima u $\mathbb{R}$. Te se funkcije najčešće skraćeno nazivaju skalarnim funkcijama. Započet ćemo nekim načinima zadavanja tih funkcija, a onda i za njih definirati pojmove granične vrijednosti i neprekidnosti. Poslije će slijediti definiranje i proučavanje diferencijabilnosti i integrabilnosti tih funkcija.

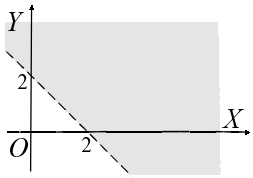
5.1.1 Zadavanje skalarnih funkcija

Svaku funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, nazivamo **realnom funkcijom od m realnih varijabla** (ili, kraće, **skalarnom funkcijom**). Kad god bude trebalo istaknuti varijabline koordinate, pisat ćemo (rabeći gornje indekse) $x = (x^1, \cdots, x^m)$ ili, kraće, $x = (x^i)$, pri čemu ćemo paziti da gornji indeks ne pobrkamo s eksponentom. Kao u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ tako i općenito u $\mathbb{R}^m$ uvodimo provokutni (Kartezijev) koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ (v. §2.2.2), s tim da ćemo u slučajevima $m \leq 3$ rabiti prijašnje oznake $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ za pripadne bazne vektore $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_m$, a x, y, z za koordinate x^1, x^2, x^3. Također ćemo i u općem slučaju vektor $x \in \mathbb{R}^m$, tj. uređeni m-slog $(x^1, \cdots, x^m)$, nazivati točkom (*m-dimenzionalnoga prostora* $\mathbb{R}^m$) i često pisati $T \equiv (x^1, \cdots, x^m)$.

Kao i funkciju jedne (realne) varijable, funkciju više varijabla možemo zadati *analitički, tablično, grafički, parametarski, implicitno, ...* (v. §3.1.1).

Za analitičko zadavanje vrijedi ista napomena o definicijskom području kao i za funkciju jedne varijable. Naime, ako dani analitički zapis (formula) određuje funkcijsko pravilo f, onda se definicijskim područjem smatra skup X svih onih $x \in \mathbb{R}^m$ kojima to pravilo pridjeljuje jedinstvene realne brojeve $f(x) \in \mathbb{R}$.

Primjer 5.1.1 (a) Formula $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definira funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = z$. Naime, $x^2 + y^2 \geq 0$ za svaki par $x, y \in \mathbb{R}$ pa drugi korijen određu $f(x, y)$ na cijelom $\mathbb{R}^2$;
(b) Zapis $z = \ln(x + y - 2)$ definira funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \ln(x + y - 2)$, pri čemu je definicijsko područje X određeno funkcijom ln, tj. nejednadžbom $x + y - 2 > 0$. Dakle, $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x + 2\}$ (v. crtež);



(c) Analitički izraz $z = \frac{5}{xy}$ određuje funkciju $f : X \to \mathbb{R}$,$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \neq y\}$, $f(x, y) = \frac{5}{xy}$;
(d) Pravilo $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ definira funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = u$, pri čemu je definicijsko područje X određeno funkcijom arcsin, tj. nejednadžbama $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$. Dakle, $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$.

Ako je funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ skup $X \subseteq \mathbb{R}^m$ konačan i ne prevelikog kardinalnog broja, onda se ona može zadati tablično (premda je takvo zadavanje dobro pregledno samo kad je $m = 2$). Primjerice,

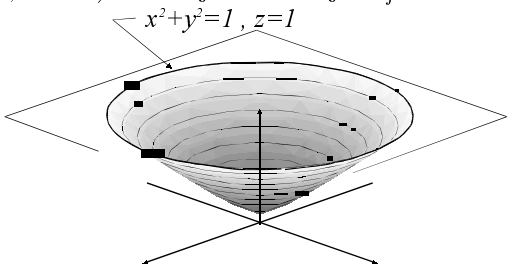
$y \diagdown x$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	z_{11}	z_{21}	$\cdots$	z_{n1}
y_2	z_{12}	z_{22}	$\cdots$	z_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_n	z_{1n}	z_{2n}	$\cdots$	z_{nn}

, $\quad f(x_i, y_j) = z_{ij}$, $\quad X = \{(x_i, y_j) \mid i, j = 1, \cdots, n\}$

Funkcijski graf G_f za $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je podskup od $\mathbb{R}^{m+1}$. Stoga je nacrtati ga (djelomično) moguće samo za $m \leq 2$. U slučaju $m = 2$, što ga ovdje razmatramo, crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove. To su, najčešće, presjeci G_f odabranim ravninama u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom XY-ravninom), dobivene presjeke nazivamo **razinskim krivuljama** funkcije f (ili grafa G_f). Po tomu, svaki broj $z_0 \in f[X]$ određuje jednu razinsku krivulju jednadžbom $f(x, y) = z_0$. Dakle, na svakoj razinskoj krivulji su funkcijske vrijednosti nepromijenjive. Slično se u slučaju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $G_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim plohama** (ili **nivo-plohama**)

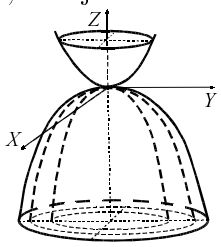
funkcije f. Pritom svaka jednadžba $f(x,y,z) = u_0$, $u_0 \in f[X]$, određuje točno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijske vrijednosti jednake u_0.

Primjer 5.1.2 Funkcijski graf G_f iz Primjera 5.5.1(a), za $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, crtamo ističući njegove presjeke ravninom $x = 0$ (zrake: $z = y$, $z \geq 0$, $x = 0$; $z = -y$, $z \geq 0$, $x = 0$), ravninom $y = 0$ (zrake: $z = x$, $z \geq 0$, $y = 0$; $z = -x$, $z \geq 0$, $y = 0$) i ravninom $z = 1$ (razinska krivulja (kružnica) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$). Primijetimo da je G_f stožasta ploha (v. §2.3.4(37)).



Napomena 5.1.1 Često se neki skup razinskih krivulja promatrane funkcije $(x,y) \mapsto f(x,y)$ crta u odabranoj ravnini $z = z_0$, primjerice, sve se one projiciraju u XY-ravninu $z = 0$. Tada se po njihovu razmještaju može zaključiti ponešto i o samoj funkciji. Tako se npr. prikazuju razinske krivulje - *izohipse* što na zemljopisnim kartama povezuju točke iste nadmorske visine, odnosno, iste podmorske dubine, kao i *izobare* - što na sinoptičkim (meteorološkim) kartama povezuju točke jednakoga zračnog tlaka. Štoviše, za zorno prikazivanje razinskih ploha ni nema druge mogućnosti osim da ih crtamo u istom prostoru.

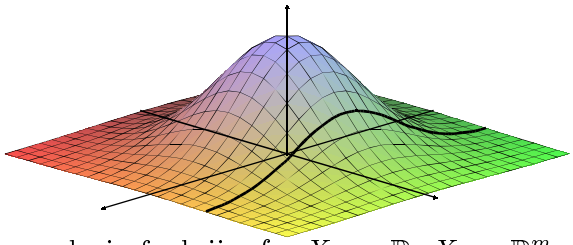
Primjer 5.1.3 Razinske plohe za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid z = 0\}$, $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z}$, su paraboloidi (bez "tjemena") $z = -\frac{1}{u_0}(x^2+y^2)$, $u_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, dok je za $z = 0$ "nivo-ploha" Z-os bez ishodišta (v. crtež).



Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, se može zadati i implicitno ili parametarski pod uvjetima sličnim onima što su postavljeni za funkcije iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ (v. §3.1.1). Mi se ne ćemo sada na tomu zadržavati. Implicitno zadanim funkcijama ćemo se posebno pozabaviti u §5.2.

Na kraju ovoga pododjeljka pokažimo kako se neka globalna svojstva (v. Definiciju 3.1.1) prenose na skalarne funkcije. Promatrajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^m$, pa uočimo bilo koju točku $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m) \in X$.

Učvrstimo li sve njezine koordinate osim i-te, $i \in \{1, \cdots, m\}$, dobivamo skup $X_{x_0,i} = \{x \in X \mid x^j = x_0^j,\ j \neq i\} \subseteq X$, što je presjek skupa X pravcem $\mathbb{R}$ kroz točku x_0, usporednim i-tomu faktoru u $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Primijetimo da je u $X_{x_0,i}$ varijabilna samo i-ta koordinata pa se na njega smije gledati kao na podskup od $\mathbb{R}$. Označimo $f|_{X_{x_0,i}} \equiv f_{x_0,i} : X_{x_0,i} \to \mathbb{R}$ pa to suženje smijemo tretirati kao funkciju jedne realne varijable (v. crtež u slučaju $m = 2$).



Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^m$, **omeđena** ako postoji broj $M \in \mathbb{R}^+$ takav da je $|f(x)| \leq M$ za svaki $x \in X$. Primijetimo da je za omeđenu funkciju f svako njezino suženje $f_{x,i}$ (za svaki $x \in X$ i svaki $i = 1, \cdots, m$) omeđena funkcija. Reći ćemo da je funkcija f **uzlazna** (**silazna**, **strogo uzlazna**, **strogo silazna**, **monotona**, **strogo monotona**, **po dijelovima monotona**) **po varijabli** x^i, $i \in \{1, \cdots, n\}$, ako je, za svaku točku $x \in X$, pripadno suženje $f_{x,i} : X_{x,i} \to \mathbb{R}$ uzlazna (silazna, strogo uzlazna, strogo silazna, monotona, strogo monotona, po dijelovoma monotona) funkcija. Na isti način se mogu prenijeti i ostala svojstva realnih funkcije jedne varijable.

Napomena 5.1.2 Ponekad je za neku svrhu korisno fiksirati manje od $m-1$ koordinate, tj. ostaviti slobodnim dvije ili više koordinata i promatrati pripadna suženja funkcije f. Primjerice, ako su slobodne i-ta i j-ta koordinata, a preostale su jednake odgovarajućima u točki x_0, dobivamo suženje $f_{x_0,i,j} : X_{x_0,i,j} \to \mathbb{R}$, pri čemu na njega smijemo gledati kao na funkciju dviju varijabla jer je

$$f_{x_0,i,j}(x, y) = f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^{j-1}, y, x_0^{j+1}, \cdots, x_0^m).$$

5.1.2 Granična vrijednost i neprekidnost

U §3.2.1 smo razmatrali realni niz i pripadna svojstva. Slično se postupa u $\mathbb{R}^m$ s tim da prije treba definirati što u $\mathbb{R}^m$ znači "biti blizu", tj. što će biti "mala okolina" po volji odabrane točke. Poslužit ćemo se standardnom euklidskom udaljenošću među točkama, tj.

$$d(x, y) = (\sum_{i=1}^{m} (x^i - y^i)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x^i),\ y = (y^i) \in \mathbb{R}^m,$$

koja se u slučaju $m = 1$ svodi na udaljenost $d(x, y) = |x - y|$ u $\mathbb{R}$.

Definicija 5.1.1 *Za bilo koju točku $x_0 \in \mathbb{R}^m$ i bilo koji broj $\epsilon > 0$, skup*

$$K(x_0; \epsilon) \equiv \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x_0, x) < \epsilon\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

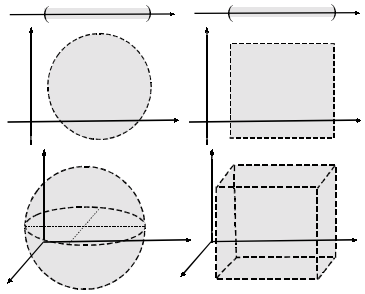
nazivamo (otvorenom) ***kuglom*** *polumjera ϵ oko točke x_0. Reći ćemo da je skup $U \subseteq \mathbb{R}^m$* ***okolina*** *točke $x_0 \in U$ ako postoji neki $\epsilon > 0$ takav da je kugla $K(x_0;\epsilon) \subseteq U$. Za skup $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ćemo reći da je* ***otvoren*** *ako je on unija neke množine (otvorenih) kugala.*

Primijetimo da je u slučaju $m = 1$ kugla $K(x_0;\epsilon) = \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\rangle$ (otvoreni) interval u $\mathbb{R}$. Nadalje, razvidno je da $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$ povlači $K(x_0;\epsilon_2) \subseteq K(x_0;\epsilon_1)$, kao i da za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K(x_0;\frac{1}{n}) \subseteq K(x_0;\epsilon)$. Napokon, očito je da je svaka kugla otvoren skup i da je svaki otvoreni skup okolina svake svoje točke.

Ponekad je u $\mathbb{R}^m$ pored kugala korisno promatrati i podskupove što ih nazivamo (otvorenim) *kvadrima*, a definiraju se ovako:

$$Q(x_0;\epsilon) \equiv \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_0^i - x^i| < \epsilon,\ i = 1, \cdots, m\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

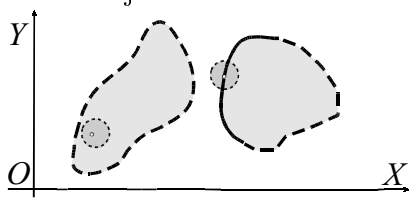
Uočimo da je, u slučaju $m = 1$, $Q(x_0;\epsilon) = K(x_0;\epsilon)$. Na crtežu dolje prikazane su tipične kugle i kvadri u slučajevima $m = 1, 2, 3$.



Vrlo je važna sljedeća razvidna činjenica: U svaku se kuglu može upisati neki kvadar i obratno, tj.

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ Q(x_0;\delta) \subseteq K(x_0;\epsilon);$$
$$(\forall\delta > 0)(\exists\eta > 0)\ K(x_0;\eta) \subseteq Q(x_0;\delta).$$

To povlači da se u uvjetima za okolinu i otvoreni skup smijemo poslužiti i kvadrima. Na crtežu dolje su primjeri otvorenoga i neotvorenoga skupa u $\mathbb{R}^2$. Onaj otvoreni jest okolina svake svoje točke, dok neotvoreni sadrži točaka kojima on nije okolina.



Definicija 5.1.2 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Reći ćemo da je točka x_0* ***gomilište*** *skupa X ako svaka okolina od x_0 siječe skup $X \setminus \{x_0\}$. Za skup X kažemo da je* ***zatvoren*** *ako sadrži sva svoja gomilišta. Reći ćemo da je točka $x \in X$* ***unutrašnja točka*** *skupa X ako postoji okolina od x koja je podskup od X. Ako za točku $x \in X$ postoji neka okolina koja ne siječe skup $X \setminus \{x\}$ onda kažemo da je x* ***izolirana točka*** *skupa X. Napokon, reći ćemo da je skup X* ***omeđen*** *ako postoji neka kugla koja ga sadrži.*

Nije teško pokazati da je svaka točka $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m$ ili gomilište od X ili njegova izolirana točka, te da je svaka unutrašnja točka gomilište. Primijetiti treba da skup može imati gomilišta koja *nisu* njegovi elementi. Nadalje, može se dokazati da je svaki zatvoren skup u $\mathbb{R}^m$ komplement nekog otvorenog skupa i obratno. Dakako da *nije* istina da skup mora biti otvoren ili zatvoren!

Definicija 5.1.3 *Reći ćemo da je točka $x_0 \in \mathbb{R}^m$* ***granična vrijednost*** *(ili* ***limes****) niza (x_n) u $\mathbb{R}^m$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

(Nejednakost $d(x_n, x_0) < \epsilon$ je, očito, ekvivalentna uvjetu $x_n \in K(x_0; \epsilon)$.) U tom slučaju govorimo da niz (x_n) ***konvergira*** *prema točki x_0 i pišemo $(x_n) \to x_0$. Ako niz ne konvergira, kažemo da* ***divergira****.*

Kao i za realne nizove i ovdje se lako vidi da niz može imati najviše jednu graničnu vrijednost, pa se tada smije pisati i $\lim(x_n) = x_0$. Važna je činjenica da se nizovna konvergencija u $\mathbb{R}^m$ može svesti na konvergenciju realnih nizova. U tu svrhu neka čitatelj dokaže ovaj teorem:

Teorem 5.1.1 *Niz (x_n) u $\mathbb{R}^m$, $x_n = (x_n^1, \cdots, x_n^m)$, konvergira prema $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$ onda i samo onda, ako svaki koordinatni niz (x_n^i) u $\mathbb{R}$ konvergira prema $x_0^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$.*

Primjer 5.1.4 Točka $x_0 = (1, -1, 0)$ je granična vrijednost niza (x_n) u $\mathbb{R}^3$, $x_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{1-n^2}{1+n^2}, \frac{n}{n+n^2})$, jer je, po koordinatama, $\lim(\frac{n+1}{n}) = 1$, $\lim(\frac{1-n^2}{1+n^2}) = -1$ i $\lim(\frac{n}{n+n^2}) = 0$ (v. §3.2.2).

I graničnu vrijednost skalarne funkcije definiramo slično onoj za funkciju iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Definicija 5.1.4 *Neka su dani funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, i gomilište x_0 od X. Reći ćemo da je broj $u_0 \in \mathbb{R}$* ***granična vrijednost*** *funkcije f* ***u točki*** *x_0 ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \setminus \{x_0\}) \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - u_0| < \epsilon.$$

(Primijetimo da se uvjet provjerava u točkama $x \in K(x_0; \epsilon)$, $x \neq x_0$!) U tom slučaju pišemo $\lim\limits_{x_0} f = u_0$ ili $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$.

Definicija 5.1.4 poopćuje, dakle, Definiciju 3.3.2. Analogno se poopćuje i Definicija 3.3.1 (granična vrijednost kad $x \to \infty$). Kao i za realne funkcije jedne varijable tako i za skalarne funkcije, istraživanje graničnih vrijednosti se može svesti na istraživanje graničnih vrijednosti realnih nizova (v. Teorem 3.3.4).

Teorem 5.1.2 *Broj $u_0 \in \mathbb{R}$ je granična vrijednost funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, u točki x_0, $\lim\limits_{x_0} f = u_0$, onda i samo onda ako, za svaki niz (x_n) u X koji konvergira prema x_0 u $\mathbb{R}^m$, $\lim(x_n) = x_0$, pripadni niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema u_0 u $\mathbb{R}$, $\lim(f(x_n)) = u_0$.*

Ovaj teorem vrijedi i za granične vrijednosti kad $x \to \infty$.

Primjer 5.1.5 (a) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, nema granične vrijednosti u točki $(0,0)$. Naime, promatramo li nizove $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$ i $((\frac{1}{n}, 0))$ u $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, razvidno je da oba konvergiraju prema točki $(0,0)$, dok s druge strane, pripadni nizovi funkcijskih vrijednosti $(\frac{(\frac{1}{n})^2-(\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2+(\frac{1}{n})^2}) = (0)$ i $(\frac{(\frac{1}{n})^2-0^2}{(\frac{1}{n})^2+0^2}) = (1)$ konvergiraju redom prema (različitim) brojevima 0 i 1.

(b) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, ima u točki $(0,0)$ graničnu vrijednost 0, $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$. Zaista, budući da je $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, to je $\lim\limits_{(0,0)} |f| = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x^2y}{2xy}| = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x}{2}| = 0$, pa je i $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$.

Sljedeći teorem (*o uzastopnim limesima*) iskazujemo i dokazujemo, jednostavnosti radi, za funkcije dviju varijabla. On se, dakako, prirodno poopćuje na funkcije od m varijabla.

Teorem 5.1.3 *Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, ima u točki (x_0, y_0) graničnu vrijednost $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f$. Ako postoji $\delta > 0$ takav da je $K((x_0,y_0);\delta) \subseteq X \bigcup \{(x_0,y_0)\}$ i da u svakoj točki $(x,y_0) \in K((x_0,y_0);\delta)$, $x \neq x_0$, i u svakoj točki $(x_0,y) \in K((x_0,y_0);\delta)$, $y \neq y_0$, postoji, redom, granična vrijednost $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, onda je*

$$\lim_{y\to y_0} (\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim_{(x_0,y_0)} f = \lim_{x\to x_0} (\lim_{y\to y_0} f(x,y)).$$

(*Granične vrijednosti na lijevoj i desnoj strani gornjih jednakosti nazivamo* uzastopnim graničnim vrijednostima *po varijablama.*)

Dokaz. Dokažimo jednakost na lijevoj strani! Označimo $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = u_0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \phi(y)$, $(x,y) \in K((x_0,y_0);\delta) \setminus \{(x_0,y_0)\}$. Po Definiciji 5.1.4, postoji neki $\delta_1 > 0$ takav da je $|f(x,y) - u_0| < \delta$ čim je $(x,y) \in K((x_0,y_0);\delta_1) \setminus \{(x_0,y_0)\}$. Ne smanjujući općenitost, smijemo pretpostaviti da je $\delta_1 \leq \delta$, tj. $K((x_0,y_0);\delta_1) \subseteq K((x_0,y_0);\delta)$. Tada je po definiciji limesa, za svaki promatrani y, $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x,y) - u_0| = |\phi(y) - u_0| \leq \epsilon$ i $\phi(y) \in \mathbb{R}$. Slijedi da se, puštajući $\delta_1 \to 0$, tj. $y \to y_0$, razlika $|\phi(y) - u_0|$ može učiniti po volji malom. Prema tomu, $\lim\limits_{y_0} \phi = u_0$, što onda daje $\lim\limits_{y\to y_0} (\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to y_0} \phi(y) = u_0 = \lim\limits_{(x_0,y_0)} f$.
Posve slično se dokazuje jednakost u tvrdnji na desnoj strani. ■

Valja istaknuti da se pretpostavka (u Teoremu 5.1.3) o obstojnosti graničnih vrijednosti $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ ne smije ispustiti (v. §5.1.3 Vježbe,

Zadatak 5.). Nadalje, treba primijetiti da ne vrijedi obrat ovoga teorema. Naime, obstojnost i jednakost uzastopnih graničnih vrijednosti još ne jamči obstojnost granične vrijednosti (v. §5.1.3 Vježbe, Zadatak 6.).

Definirajmo sada neprekidnost skalarne funkcije.

Definicija 5.1.5 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$,* ***neprekidna u točki*** *$x_0 \in X$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

(Ekvivalentno je zahtijevati $f[X \bigcap K(x_0; \delta)] \subseteq \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$.) Reći ćemo da je funkcija f ***neprekidna na skupu*** *$A \subseteq X$ ako je neprekidna u svakoj točki $x \in A$. Napokon, ako je f neprekidna na skupu $A = X$, onda za f kažemo da je* ***neprekidna*** *funkcija (ili* ***preslikavanje****). U protivnim slučajevima govorimo o* ***prekidnoj*** *funkciji (u točki; na skupu).*

Sljedeći teorem poopćuje Teorem 3.3.6, a dokaz mu je izravna posljedica odgovarajućih definicija.

Teorem 5.1.4 *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je neprekidna u točki x_0 onda i samo onda, ako je $f(x_0) = \lim\limits_{x_0} f$.*

Pozabavimo se sada pojmovima varijablinog i funkcijskog prirasta (usp. §3.3.3) za skalarne funkcije. Promatrajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, i točke $x_0, x \in X$. Razliku točkovnih koordinata

$$x^i - x_0^i = \Delta_{x_0} x^i \equiv \Delta x^i$$

nazivamo **prirastom** i**-te varijable** u točki x_0, $i = 1, \cdots, m$. Jednostavnosti radi, često ćemo činjenicu $(\forall i = 1, \cdots, m)$ $\Delta x^i \to 0$, zapisivati kao $\Delta x \to 0$. Razliku funkcijskih vrijednosti

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)(x) \equiv \Delta f(x)$$

nazivamo **funkcijskim prirastom** (ili **totalnom diferencijom**) u točki x_0. Kao i prije, $\Delta f(x_0)$ smijemo smatrati kako funkcijom od x tako i funkcijom od Δx zapisujući pritom njihove vrijednosti samo s $\Delta f(x)$. Dakle, za $(x^1, \cdots, x^m) = (x_0^1 + \Delta x^1, \cdots, x_0^m + \Delta x^m)$ je

$$\Delta f(x^1, \cdots, x^m) = f(x_0^1 + \Delta x^1, \cdots, x_0^m + \Delta x^m) - f(x_0^1, \cdots, x_0^m).$$

Primijetimo da se u ovim terminima Teorem 5.1.4 može izreći i ovako: Funkcija f je neprekidna u točki x_0 ako i samo ako je $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$, što je jednako zapisu istoga svojstva za funkcije jedne varijable. Izrecimo to i u strogom obliku:

Korolar 5.1.1 *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je neprekidna u točki $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m)$ onda i samo onda, ako njezin prirast $\Delta f(x)$ u x_0 teži k nuli čim prirasti svih varijabla Δx^i u x_0, $i = 1, \cdots, m$, istodobno teže k nuli.*

Primjer 5.1.6 Istražimo (ne)prekidnost funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \frac{1+xy}{1-xy}$. Definicijsko područje je skup $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy =$

1}. Za graničnu vrijednost funkcijskog prirasta u po volji odabranoj točki $(x_0, y_0) \in X$ dobivamo:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f(x) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{1+(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)}{1-(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)} - \frac{1+x_0 y_0}{1-x_0 y_0}\right) = \cdots = 0.$$

Slijedom Korolara 5.1.1, funkcija f je neprekidna.

Primjer 5.1.7 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Razvidno je da je f neprekidna na skupu $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Istražimo sada je li f neprekidna i u točki $(0,0)$. Primijetimo da je, u točki $(0,0)$,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \ (\text{"="}\ \tfrac{0}{0}).$$

Pogledajmo kako se ta granična vrijednost ponaša na nizovima $(x_n) \to 0$ i $(y_n = kx_n) \to 0$, $k \in \mathbb{R}$ konstanta. Uvrštenjem dobivamo niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n, y_n))$, $\lim(f(x_n, y_n)) = \lim(\frac{kx_n^2}{x_n^2+k^2x_n^2}) = \lim_n(\frac{k}{1+k^2}) = \frac{k}{1+k^2}$. Budući da dobivena granična vrijednost ovisi o odabranoj konstanti k to funkcija f nema granične vrijednosti u točki $(0,0)$ (v. Teorem 5.1.2). Po Teoremu 5.1.4, f je prekidna u točki $(0,0)$.

Napomena 5.1.3 Navest ćemo bez dokaza nekoliko važnih svojstava neprekidnih skalarnih funkcija, analognih onima za funkcije jedne varijable (usp. §3.3.3). Neka je, dakle, dana funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$.

(i) Ako je f neprekidna u točki x_0 i $f(x_0) < 0$ $(f(x_0) > 0)$ onda postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(x) < 0$ $(f(x) > 0)$ za svaki $x \in X \bigcap K(x_0; \epsilon)$.

(ii) Neka je $A \subseteq X$ zatvoren i omeđen. Ako je funkcija f neprekidna na A onda postoje brojevi $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leq f(x) \leq M$ za svaki $x \in A$, tj. $f|_A$ je omeđena funkcija. Štoviše, $f|_A$ poprima svoju najmanju (minimum) i svoju najveću (maksimum) vrijednost, tj. postoje $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ za svaki $x \in A$.

(iii) Zbroj $f + g$, razlika $f - g$, umnožak $f \cdot g$ i količnik $\frac{f}{g}$ (kad god su definirani) neprekidnih skalarnih funkcija jesu neprekidne skalarne funkcije.

5.1.3 Vježbe

1. Odrediti definicijsko područje X skalarne funkcije zadane propisom

(a) $f(x,y,z) = \frac{\ln(xy)}{\ln x}\sqrt{xyz}$; $[X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\})$.]

(b) $f(x^1, \cdots, x^m) = \arccos(\sum_{i=1}^{m} (x^i)^2)$. $[X = \bar{K}(0;1) \equiv \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\}$.]

2. Odrediti jednadžbe razinskih krivulja za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x-y|$, što prolaze točkama $T_1 = (1,1,z_1)$, $T_2 = (2,3,z_2)$ i $T_3 = (-1,-3,z_3)$. Nacrtati "te" krivulje u XY-ravnini.

3. Je li funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \frac{x^4-y^2z^2}{x^4+y^2z^2}$, omeđena?

Rješenje: Definicijsko područje promatrane funkcije je skup $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Budući da je $x^4 + y^2z^2 \geq x^4 - y^2z^2$ za svaki $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, to je

$$|f(x,y,z)| = |\tfrac{x^4-y^2z^2}{x^4+y^2z^2}| \leq 1, \quad (x,y,z) \in X,$$

pa je funkcija f omeđena.

4. Istražiti granične vrijednosti funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$, u točkama (x_0, x_0) i $(x_0, -x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Budući da je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \tfrac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \tfrac{1}{x^2xy+y^2},$$

to je $\lim\limits_{(x_0,x_0)} f = \frac{1}{x_0^2}$ i $\lim\limits_{(x_0,-x_0)} f = \frac{1}{3x_0^2}$ čim je $-x_0 \neq 0$, dok u točki $(0,0)$ funkcija f nema granične vrijednosti ($\lim\limits_{(0,0)} f = +\infty$).

5. Pokazati da funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y}$, ima graničnu vrijednost u točki $(0,0)$, ali da pripadne uzastopne granične vrijednosti u toj točki ne postoje. Obrazložiti!

6. Pokazati da za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = |\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}|$, postoje uzastopne granične vrijednosti u točki $(0,0)$, koje su i međusobno jednake, ali da f nema granične vrijednosti u toj točki.

7. Istražiti (ne)prekidnost funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sin xyz}{x}, & (x,y,z) \neq (0,a,a) \\ a^2, & (x,y,z) = (0,a,a) \end{cases},$$

$a \in \mathbb{R}$ konstanta. [Funkcija f je neprekidna.]

5.2 DIFERENCIRANJE SKALARNIH FUNKCIJA

Izravno i formalno poopćenje derivabilnosti (u točki) s funkcija jedne varijable na funkcije više varijabla nije moguće, jer je varijabla bitno promijenila karakter. Naime, umjesto realnog broja x sada se promatra vektor $x = (x^1, \cdots, x^m)$, pa odgovarajući količnik $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ("vektor dijeli broj") više nema smisla. Međutim, učvrste li se sve osim jedne koordinate, promatrana funkcija (suženje) postaje, zapravo, funkcijom jedne varijable pa se smije govoriti o njezinoj (ne)derivabilnosti. To onda vodi k pojmu parcijalne derivacije po varijabli-koordinati.

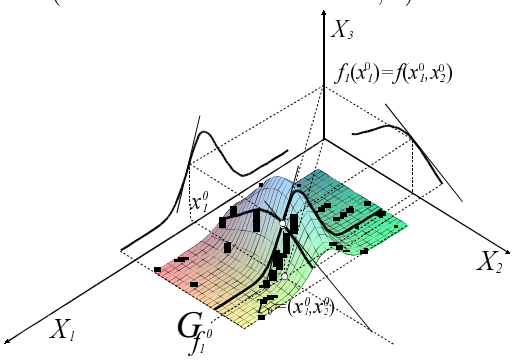
5.2.1 Parcijalne derivacije

Promatrajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, po volji odabranu točku $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m) \in X$ i bilo koju koordinatu $i \in \{1, \cdots, m\}$. Neka je

$$X_{x_0,i} = \{x = (x^1, \cdots, x^m) \in X \mid x^j = x_0^j, \forall j \neq i\} \subseteq X.$$

Očito je $X_{x_0,i} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku x_0. Suženje $f|_{X_{x_0,i}} \equiv f_{x_0,i} : X_{x_0,i} \to \mathbb{R}$ smijemo smatrati funkcijom jedne varijabla jer se mijenja samo

koordinata x^i (v. crtež za $m = 2$ i $i = 1, 2$).



Postoji li derivacija funkcije $f_{x_0,i}$ u točki x_0^i ($\in X_{x_0,i} \subseteq \mathbb{R}$), reći ćemo da funkcija f **ima parcijalnu derivaciju po varijabli** x^i **u točki** x_0. Derivaciju (broj) $f'_{x_0,i}(x_0^i)$ tada nazivamo **parcijalnom derivacijom** funkcije f **po varijabli** x^i **u točki** x_0 i označujemo s $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}$ (čita se: "de ef po de iks-i u iks-nula "). Dakle, po definiciji je

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x_0^i + \Delta x^i, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^m) - f(x_0^1, \cdots, x_0^m)}{\Delta x^i}, \; i = 1, \cdots, m.$$

Ako funkcija f ima u točki x_0 parcijalnu derivaciju po svakoj varijabli x^i, $i = 1, \cdots, m$, onda kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki** x_0. Ako je f derivabilna u svakoj točki $x \in X$, nazivamo ju **derivabilnom** funkcijom.

Po samoj definiciji, *parcijalno deriviranje po odabranoj varijabli skalarne funkcije* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, *u praksi se svodi na standardno deriviranje držeći konstantnima sve varijable osim one odabrane.*

Primjer 5.2.1 Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(x, y) = \sin(x + y^2)$. Odrediti obje parcijalne derivacije funkcije f u bilo kojoj točki (x, y). Budući da je f po svojim varijablama kompozicija derivabilnih elementarnih funkcija, to ona ima obje parcijalne derivacije u svakoj točki, tj. f je derivabilna funkcija. Pritom je $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos(x + y^2)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cos(x + y^2) \cdot 2y$.

Primjer 5.2.2 Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, zadana pravilom $f(x, y, z) = x + \ln(xy + \sqrt{z})$. Odrediti sve tri parcijalne derivacije funkcije f u svakoj točki (x, y, z) u kojoj one postoje. Zbog istoga razloga kao i u Primjeru 5.2.1 i zbog uvjeta (na X) $xy + \sqrt{z} > 0$ i $z \geq 0$, funkcija f jest derivabilna. Za parcijalne derivacije u bilo kojoj točki $(x, y, z) \in X$ dobivamo: $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 1 + \frac{y}{xy+\sqrt{z}}$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{x}{xy+\sqrt{z}}$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}(xy+\sqrt{z})}$.

Neka je $A_i \subseteq X$ skup svih točaka $x \in X$ u kojima funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, ima parcijalnu derivaciju po varijabli x^i, $i \in \{1, \cdots, m\}$. Tada je dobro definirana funkcija

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} : A_i \to \mathbb{R}, \quad (\frac{\partial f}{\partial x^i})(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i},$$

koju nazivamo **parcijalnom derivacijom** funkcije f **po varijabli** x^i (na podskupu $A_i \subseteq X$). Pritom ima smisla istraživati neprekidnost (u točki) te funkcije, pa se onda govori o **neprekidno parcijalno derivabilnoj** funkciji f **po varijabli** x^i (**u točki**). Ako je $A \equiv \bigcap_{i=1}^m A_i \subseteq X$ i $A \neq \emptyset$ onda su na A definirane sve funkcije - parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x^i} : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, tj. f je derivabilna na skupu A. Reći ćemo da je funkcija f **neprekidno derivabilna u točki** $x_0 \in A$ (**na skupu** $B \subseteq A$) čim su su sve te funkcije $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, \cdots, m$, neprekidne u x_0 (na skupu B).

Sjetimo se da za realne funkcije jedne varijable derivabilnost povlači neprekidnost (v. Teorem 4.1.1). Sada ćemo pokazati za funkcije više varijabla to, općenito, *ne* vrijedi.

Primjer 5.2.3 Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana propisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je prekidna u točki $(0,0)$ (v. Primjer 5.1.7). Ona je, međutim, derivabilna u točki $(0,0)$. Naime, $f(x,0) = 0$ pa je $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = 0$ i, posebice, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$. Slično je i $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

5.2.2 Diferencijal

Promatrajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, i po volji odabranu točku $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m) \in X$. Neka je $x = (x^1, \cdots, x^m) \in X$ bilo koja točka. Označimo kao i prije $x^i - x_0^i \equiv \Delta x^i$, $i = 1, \cdots, m$. Za bilo koji indeks i promatrajmo pripadnu funkciju (jedne varijable) $f_{x_0,i} : X_{x_0,i} \to \mathbb{R}$. Ako je ta funkcija diferencijabilna, ekvivalentno, derivabilna u točki x_0^i, onda pripadni diferencijal

$$df_{x_0,i}(x_0^i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$df_{x_0,i}(x_0^i)(x^i) \equiv df_{x_0,i}(x^i) = f'_{x_0,i}(x_0^i)dx^i \equiv \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}dx^i \tag{1}$$

(v. §4.1.3) nazivamo **parcijalnim diferencijalom** funkcije f **po varijabli** x^i **u točki** x_0. Ovdje nas zanima teže pitanje: Ima li smisla diferencijal funkcije f u točki x_0 i kako bi ga trebalo definirati? Postupit ćemo po sličnosti s diferencijalom za funkcije jedne varijable (v. Definiciju 4.1.2), s tim da će ulogu lineane funkcije na $\mathbb{R}$ (određene nekom konstantom a) sada prirodno preuzeti neki linearni funkcional iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}$.

Definicija 5.2.1 *Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$,* ***diferencijabilna u točki*** *$x_0 \in X$, ako postoji linearni funkcional $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ takav da je*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + r(x - x_0),$$

pri čemu funkcija $x - x_0 \mapsto r(x - x_0)$ ima svojstvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

("ostatak" $r(x - x_0)$ teži k 0 bitno brže od $\|x - x_0\|$).

Lako se dokaže da je linearni funkcional A jedinstven čim postoji. (Ključna je činjenica pritom da, za svaki linearni funkcional $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, iz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{C(x)}{\|x\|} = 0$ slijedi $C = c_0$.) Tada taj A označujemo s $df(x_0)$ i nazivamo **diferencijalom** funkcije f **u točki** x_0. Jednostavni račun pokazuje da je pripadni vektorski zapis

$$df(x_0) \equiv [\ \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} \quad \cdots \quad \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^m}\ ] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Gledamo li na diferencijal $df(x_0)$ kao na vektor u prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$ svih linearnih funkcionala s bazom (d^i) (dualnom kanonskoj bazi (e_i) u $\mathbb{R}^m$), dobivamo zapis

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} d^i, \quad \text{a za njegove vrijednosti}$$

$$df(x_0)(x) \equiv df(x) = \sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} d^i(x) = \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} x^1 + \cdots + \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^m} x^m = (df(x_0)|x) \tag{2}$$

u svakoj točki $x = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Držeći se klasičnoga označavanja s varijablom $\Delta x = dx = x - x_0$ tako dobivamo zapis

$$df(x_0)(dx) \equiv df(x) = \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^m} dx^m = (df(x_0)|dx) \tag{2$'$}$$

Razvidno je da je diferencijal od f u x_0 (ako postoji) posve određen pripadnim parcijalnim diferencijalima u x_0^i, odnosno, parcijalnim derivacijama $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}$, $i = 1, \cdots, m$.

Reći ćemo da je funkcija f **diferencijabilna na skupu** $A \subseteq X$ ako je diferencijabilna u svakoj točki $x \in A$. U slučaju $A = X$ govorimo o **diferencijabilnoj** funkciji f.

Po definiciji slijedi da se funkcijin prirast $\Delta f(x)$, $x = x_0 + dx$, diferencijabilne (u točki x_0) funkcije f može po volji blizu aproksimirati njezinim diferencijalom (vrijednošću) $df(x)$, čim su svi varijablini prirasti $\Delta x^i = dx^i$ dostatno mali.

Jasno je da diferencijabilnost (u točki) povlači derivabilnost (u točki). Pokazat ćemo da obratno *ne* vrijedi. (Sjetimo se da su to za funkcije jedne varijable ekvivalentna svojstva!)

Primjer 5.2.4 U Primjeru 5.1.5 smo pokazali da funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \tfrac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

ima graničnu vrijednost $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$. To povlači da je funkcija

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

neprekidna u točki $(0,0)$. Osim toga, $g(x,0) = f(x,0) = 0$ pa je $\frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = 0$, te $g(0,y) = f(0,y) = 0$ pa je i $\frac{\partial g(0,0)}{\partial y} = 0$. Slijedi da je funkcija g i derivabilna u točki $(0,0)$. Međutim, funkcija g *nije* diferencijabilna u točki $(0,0)$. Pokažimo to pobliže! Označimo prvo $\rho = \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Kad bi g bila diferencijabilna u $(x_0,y_0) = (0,0)$, moralo bi vrijediti

$$0 = \lim_{(dx,dy)\to(0,0)} \frac{r(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|} =$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta g(0+dx,0+dy)-(\frac{\partial g(0,0)}{\partial x}dx+\frac{\partial g(0,0)}{\partial y}dy)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta g(dx,dy)}{\rho}.$$

Budući da je $g(0,0) = 0$, to je $\Delta g(dx,dy) = g(dx,dy)$. Nadalje, $\rho \to 0$ točno onda kad $dx \to 0$ i $dy \to 0$. Slijedi,

$$\lim_{(dx,dy)\to(0,0)} \frac{r(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Uvrštenjem konvergentnoga niza $((\frac{1}{n},\frac{k}{n})) \to (0,0)$, k - konstanta, (v. Teoreme 5.1.2 i 5.1.1), dobili bismo

$$\lim_{(dx,dy)\to(0,0)} \frac{r(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|} = \lim\left(\frac{(\frac{1}{n})^2\frac{k}{n}}{((\frac{1}{n})^2+(\frac{k}{n})^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (= 0 \Leftrightarrow k = 0)$$

pa funkcija $\frac{r(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|}$ nema (v. Teorem 5.1.2) granične vrijednosti u točki $(0,0)$. Prema tomu, funkcija g nije diferencijabilna u točki $(0,0)$.

Teorem 5.2.1 *Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, diferencijabilna u točki x_0 onda je f i neprekidna u x_0.*

Dokaz. Po pretpostavci je, za $x = x_0 + dx$,

$$\Delta f(x) = (\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^m}dx^m) + r(dx),$$

pri čemu je $\lim\limits_{dx\to 0} \frac{r(dx)}{\|dx\|} = 0$, $\|dx\| = \sqrt{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2}$. Pogotovo je $\lim\limits_{dx\to 0} r(dx) = 0$ Jasno, $dx \to 0$, tj. $x \to x_0$, točno onda kad $\|dx\| \to 0$, odnosno, kad $dx^i \to 0$ za svaki $i = 1, \cdots, m$. Prema tomu,

$$\lim_{dx\to 0} \Delta f(x) = \lim_{dx\to 0}(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^m}dx^m) + \lim_{dx\to 0} r(dx) = 0.$$

Sada po Korolaru 5.1.1 slijedi da je f neprekidna u točki x_0. ■

Osnovna pravila za diferenciranje, što smo ih bili izveli za funkcije jedne varijable, ostaju valjana i za funkcije više varijabla kad god imaju smisla:

(i) $d(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda df(x_0) + \mu dg(x_0)$;

(ii) $d(\lambda f - \mu g)(x_0) = \lambda df(x_0) - \mu dg(x_0)$;

(iii) $d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)$;

(iv) $d(\dfrac{f}{g})(x_0) = \dfrac{g(x_0) \cdot df(x_0) - f(x_0) \cdot dg(x_0)}{g(x_0)^2}$;

(v) $d(\phi \circ g)(x_0) = d\phi(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Dokažimo npr. (iii) i (v)! Za (iii), neka su funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, diferencijabilne u točki x_0. Tada je, za $x = x_0 + dx$,

$$\begin{aligned}
&(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = f(x_0 + dx)g(x_0 + dx) - f(x_0)g(x_0) = \\
&(f(x_0 + dx) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0)(g(x_0 + dx) - g(x_0)) + \\
&(f(x_0 + dx) - f(x_0))(g(x_0 + dx) - g(x_0)) = \\
&g(x_0)(df(x_0)(dx) + r_1(dx)) + f(x_0)(dg(x_0)(dx) + r_2(dx)) + \\
&(df(x_0)(dx) + r_1(dx))(dg(x_0)(dx) + r_2(dx) = \\
&g(x_0) \cdot df(x_0)(dx) + g(x_0) \cdot r_1(dx) + f(x_0) \cdot dg(x_0)(dx) + f(x_0) \cdot r_2(dx) + \\
&(df(x_0)(dx) + r_1(dx))(dg(x_0)(dx) + r_2(dx)).
\end{aligned}$$

Diferencijabilnost funkcija f i g u toèki x_0 izravno povlači
$\lim\limits_{dx\to 0} \frac{g(x_0)r_1(dx)}{\|dx\|} = 0 = \lim\limits_{dx\to 0} \frac{f(x_0)r_2(dx)}{\|dx\|}$,
dok iz linearne ograđenosti linearnog funkcionala A (tj. $\|A(h)\| \leq \lambda \|h\|$) slijedi i
$\lim\limits_{dx\to 0} \frac{(df(x_0)(dx)+r_1(dx))(dg(x_0)(dx)+r_2(dx))}{\|dx\|} = \cdots = 0.$

Za (v), neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u točki x_0, a funkcija $\phi : Y \to \mathbb{R}$, $f[X] \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, diferencijabilna u toèki $y_0 = f(x_0)$. Tada je, za $x = x_0 + dx$ i $y = f(x) \equiv f(x_0) + dy$,

$(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x_0) = \phi(f(x)) - \phi(f(x_0)) = \phi(y) - \phi(y_0) =$
$d\phi(y_0)(dy) + r_2(dy) = d\phi(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + r_2(f(x) - f(x_0)) =$
$d\phi(f(x_0))(df(x_0)(dx) + r_1(dx)) + r_2(f(x) - f(x_0)) =$
$d\phi(f(x_0))(df(x_0)(dx)) + d\phi(f(x_0))(r_1(dx)) + r_2(f(x) - f(x_0)) =$
$(d\phi(f(x_0)) \circ df(x_0))(dx) + (d\phi(f(x_0)) \circ r_1)(dx)) + r_2(f(x) - f(x_0)).$

Neprekidnost linearne funkcije povlači
$\lim\limits_{dx\to 0} \frac{(d\phi(f(x_0))\circ r_1)(dx)}{\|dx\|} = d\phi(f(x_0))(\lim\limits_{dx\to 0} \frac{r_1(dx)}{\|dx\|}) = d\phi(f(x_0))(0) = 0.$
Napokon, po Teoremu 5.2.1 je funkcija f neprekidna u točki x_0, pa to s graničnim uvjetom na funkciju r_2 povlači $\lim\limits_{dx\to 0} \frac{r_2(f(x)-f(x_0))}{\|dx\|} = \cdots = 0.$

Sljedeći teorem donosi jedan od dovoljnih uvjeta za diferencijabilnost skalarne funkcije.

Teorem 5.2.2 *Neka za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, i točku $x_0 \in X$ postoji ϵ-kugla $K(x_0; \epsilon) \subseteq X$ na kojoj je f derivabilna i neprekidno derivabilna u x_0. Tada je f diferencijabilna u x_0.*

Dokaz. Teorem 5.2.2 ćemo dokazati u slučaju $m = 2$. U slučaju $m \geq 3$ bismo dokazivali sasvim analogno. Neka, dakle, funkcija $(x, y) \mapsto f(x, y)$ udovoljava uvjetima Teorema 5.2.2. Tada za funkcijin prirast u točki (x, y), $(x, y) = (x_0, y_0) + (dx, dy)$, $\|(dx, dy)\| < \epsilon$, dobivamo (v. Teorem 4.1.9):

$\Delta f(x) = (f(x_0+dx, y_0+dy) - f(x_0, y_0+dy)) + (f(x_0, y_0+dy) - f(x_0, y_0))$
$= \frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx, y_0+dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0+\vartheta_2 dy)}{\partial y} dy, \quad \vartheta_{1,2} \in \langle 0, 1\rangle.$

Lagrangeov teorem smo primijenili na funkciju $x \mapsto g_1(x) = f(x, y_0 + dy)$, $x \in [x_0, x_0+dx]$ kad je $dx > 0$ ili $x \in [x_0+dx, x_0]$ kad je $dx < 0$, i na funkciju $y \mapsto g_2(y) = f(x_0, y)$, $y \in [y_0, y_0 + dy]$ kad je $dy > 0$ ili $y \in [y_0 + dy, y_0]$ kad je $dy < 0$. Slijedi,

$\Delta f(x) - (\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} dy) =$
$= (\frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx, y_0+dy)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x})dx + (\frac{\partial f(x_0, y_0+\vartheta_2 dy)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})dy.$

Budući da su funkcije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne u točki (x_0, y_0), to je
$\lim\limits_{(dx,dy)\to(0,0)} \frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx, y_0+dy)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ i $\lim\limits_{dy\to 0} \frac{\partial f(x_0, y_0+\vartheta_2 dy)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.$
Napokon,
$\lim\limits_{(dx,dy)\to(0,0)} |\frac{r(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|}| = \lim\limits_{(dx,dy)\to(0,0)} |\frac{\Delta f(x)-(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy)}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}| \leq$

$$\lim_{(dx,dy)\to(0,0)}\left(\left|\frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx,y_0+dy)}{\partial x}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right|\frac{|dx|}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}\right)+$$
$$\lim_{(dx,dy)\to(0,0)}\left(\left|\frac{\partial f(x_0,y_0+\vartheta_2 dy)}{\partial y}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right|\frac{|dy|}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}\right)\leq$$
$$\left|\frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx,y_0+dy)}{\partial x}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right|+\lim_{(dx,dy)\to(0,0)}\left|\frac{\partial f(x_0,y_0+\vartheta_2 dy)}{\partial y}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right|=0,$$

pa je i $\lim\limits_{(dx,dy)\to(0,0)}\frac{r(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|}=0$. Time je teorem dokazan. ■

Sjetimo se da je, za funkcije iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, geometrijsko značenje diferencijalove vrijednosti bio pripast do pripadne tangente. Slično je, za funkcije dviju varijabla, diferencijalova vrijednost prirast do pripadne tangencijalne ravnine. Pojasnit ćemo to pobliže. Neka je funkcija $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subseteq\mathbb{R}^2$, derivabilna na ϵ-kugli $K((x_0,y_0);\epsilon)\subseteq X$ i neprekidno derivabilna u točki (x_0,y_0). Po Teoremu 5.2.2, funkcija f je diferencijabilna u (x_0,y_0), dakle,

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy \quad \text{i} \quad \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f(x,y)-df(x_0,y_0)}{\rho}=0,$$

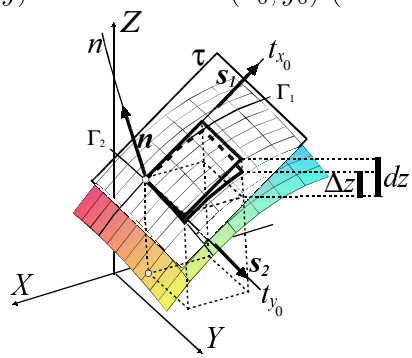
pri čemu je $(x,y)=(x_0+dx,y_0+dy)\in K((x_0,y_0);\epsilon)$ i $\rho=\|(dx,dy)\|$. Označimo li $z_0=f(x_0,y_0)$ i $z=f(x,y)$, uvrštenjem $z-z_0=\Delta f(x,y)$ dobivamo jednadžbu tzv. **tangencijalne ravnine** promatrane funkcije f u točki (x_0,y_0) (odnosno, njezinoga grafa G_f u točki (x_0,y_0,z_0)):

$$\tau\cdots z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \tag{3}$$

Naime, na dostatno maloj okolini od (x_0,y_0) graf G_f i ravnina τ imaju samo (x_0,y_0,z_0) kao zajedničku točku i pritom je $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-z}{\rho}=0$. Stoga τ lokalno dobro aproksimira G_f, tj.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\Delta f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+df(x,y)=z_0+(z-z_0)=z$$

čim je (x,y) dostatno blizu (x_0,y_0) (v. crtež)



Svaki pravac u tangencijalnoj ravnini τ, koji prolazi točkom (x_0,y_0,z_0), nazivamo **tangentom plohe** G_f. Primjerice, pravac

$$t_{x_0}\cdots\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}$$

je tangenta za G_f usporedna s koordinatnom ZX-ravninom, dok je pravac

$$t_{y_0}\cdots\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}$$

tangenta za G_f usporedna s koordinatnom YZ-ravninom. Budući da oba prolaze točkom (x_0,y_0,z_0), to je za potvrđivanje njihove pripadnosti ravnini τ dostatno pokazati da je $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n}=0$ i $\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n}=0$, gdje su $\boldsymbol{s}_1$ i $\boldsymbol{s}_2$ re-

dom njihovi smjerovni vektori, a $\boldsymbol{n}$ je normalni vektor tangencijalne ravni ne τ. No, to očito slijedi iz $\boldsymbol{s}_1 = [1\ 0\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}]$, $\boldsymbol{s}_2 = [0\ 1\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}]$, $\boldsymbol{n} = [-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\ -\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\ 1]$.
Primijetimo da su pravci t_{x_0} i t_{y_0} ujedno tangente, redom, na krivulje

$$\Gamma_1 \cdots \begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases} \quad G_f \bigcap \{(x, y_0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \quad \text{i}$$

$$\Gamma_2 \cdots \begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases} \quad G_f \bigcap \{(x_0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\},$$

a parcijalne derivacije $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ i $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ su, redom, tangensi priklonih kutova α i β tih tangenata prma X-osi i Y-osi

Pridodajmo još i "recept" o diferencijalovoj primijeni u približnom računu (usp. §4.1.3). Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, diferencijabilna u točki $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m)$. Neka je točka $x = (x^1, \cdots, x^m) \in X$ relativno blizu točke x_0, tj. $x - x_0 = dx$ i $\|dx\| \equiv \rho = \sqrt{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2}$ relativno malen. Budući da je $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\Delta f(x) - df(x)}{\rho} = 0$, to praktično znači da je $\Delta f(x) \approx df(x)$ čim je ρ dostatno malen. Prema tomu, vrijednost $f(x) = f(x_0 + dx) = f(x_0) + \Delta f(x)$ je tada približno jednaka $f(x_0) + df(x)$.

Primjer 5.2.5 Kvadru su izmjereni bridovi a, b, c (do na mjerne pogrješke): $a = 3 \pm 0,04$ (m), $b = 2 \pm 0,02$ (m) i $c = 2,5 \pm 0,03$ (m). Koliki je, približno, obujam toga kvadra i kolike su pogrješke (apsolutna, relativna i postotna) pri aproksimiranju diferencijalom?
Traženi obujam se računa po formuli $V = abc$ (skalarna funkcija triju varijabla). Uzmemo li $a_0 = 3$ (m), $b_0 = 2$ (m) i $c_0 = 2,5$ (m) dobivamo $V_0 = 15$ (m^3). Pritom smo pogriješili za, najviše, $\Delta V = V_1 - V_0$, pri čemu je $V_1 = a_1 b_1 c_1$, $a_1 = 3 + 0,04 = 3,04$ (m), $b_1 = 2,02$ (m), $c_1 = 2,53$ (m). Dakle, najveća apsolutna pogrješka jest $\Delta V = 15,536224 - 15 \approx 0,536$ (m^3), odnosno, $V = V_0 \pm \Delta V \approx 15 \pm 0,536$ (m^3). Ako bismo prirast ΔV u promatranoj točki aproksimirali diferencijalom

$$dV(a,b,c) = \frac{\partial V(a_0,b_0,c_0)}{\partial a} da + \frac{\partial V(a_0,b_0,c_0)}{\partial b} db + \frac{\partial V(a_0,b_0,c_0)}{\partial c} dc =$$

$$b_0 c_0 da + a_0 c_0 db + a_0 b_0 dc = 2 \cdot 2,5 \cdot 0,04 + 3 \cdot 2,5 \cdot 0,02 + 3 \cdot 2 \cdot 0,03 = 0,530,$$

dobili bismo $V \approx V_0 + dV = 15 \pm 0,530$ (m^3). Apsolutna pogrješka u ovomu računu iznosi $0,530$ (m^3), relativna - $\frac{0,530}{15} = 0,035\dot{3}$, a postotna - $3,5\dot{3}\%$.

Sljedeći teorem, koji ne ćemo dokazivati, govori o deferencijabilnosti funkcijske kompozicije u slučaju skalarnih funkcija.

Teorem 5.2.3 *Neka su funkcije $\phi_j : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $j = 1, \cdots, n$, diferencijabilne u točki x_0, a funkcija $f : Y \to \mathbb{R}$, $\phi_1[X] \times \cdots \times \phi_n[X] \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$, diferencijabilna u točki $y_0 = (\phi_1(x_0), \cdots, \phi_n(x_0))$. Tada je kompozicija $F \equiv f \circ (\phi_1, \cdots, \phi_n) : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki x_0, a njezine parcijalne derivacije se dobivaju po formuli*

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial \phi_j(x_0)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{4}$$

pri čemu je $y^j \equiv \phi_j(x)$, $j = 1, \cdots, n$.

Slijedi da diferencijal od F u točki x_0 primijenjen na $dx = x - x_0$ dopušta zapis $dF(x) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial \phi_j(x_0)}{\partial x^i})dx^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y^j}(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \phi_j(x_0)}{\partial x^i} dx^i)$, dakle,

$$d(f(\phi_1, \cdots, \phi_n))(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y^j} d\phi_j(x) \equiv df(y). \tag{5}$$

Primjer 5.2.6 Promatrajmo diferencijabilne funkcije $\phi_1 \equiv \phi : X \to \mathbb{R}$ i $\phi_2 \equiv \psi : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, i diferencijabilnu funkciju $f : Y \to \mathbb{R}$, $\phi(X) \times \psi(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada je dobro definirana kompozicija $F \equiv f \circ (\phi, \psi) : X \to \mathbb{R}$, $F(x^1, x^2, x^3) = f(\phi(x^1, x^2, x^3), \psi(x^1, x^2, x^3))$. Po Teoremu 5.2.3, funkcija F je diferencijabilna. Odredimo eksplicitno sve njezine parcijalne derivacije.
Označimo, jednostavnosti radi, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, te $y^1 \equiv \phi(x, y, z) = u$ i $y^2 \equiv \psi(x, y, z) = v$. Tada po formuli (4) dobivamo:
$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}$,
$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}$.

Primjer 5.2.7 Neka derivabilna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, dopušta zapis $f(x, y) = \phi(xy)$, pri čemu je $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka derivabilna funkcija. Pokažimo da tada funkcija $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x + f(x, y)$,udovoljava jednakosti $x \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x$, $(x, y) \in X$.

Parcijalne derivacije od g po x i po y ćemo izraziti pomoću derivacije od ϕ i parcijalnih derivacija njezina argumenta $u \equiv xy$:
$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 + \phi'(u) \cdot \frac{\partial (xy)}{\partial x} = 1 + y\phi'(u)$,
$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \phi'(u) \cdot \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x\phi'(u)$.
Sada uvrštenjem u lijevu stranu postavljene jednakosti dobivamo
$x(1 + y\phi'(u)) - yx\phi'(u) = x + xy\phi'(u) - yx\phi'(u) = x$,
što smo i trvdili.

5.2.3 Parcijalne derivacije viših redova

Parcijalnu derivaciju drugoga reda funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, definiramo, najjednostavnije govoreći, kao parcijalnu derivaciju parcijalne derivacije, odnosno, rabeći rječnik za funkcije jedne varijable, kao derivaciju (neke) prve derivacije. Ako je, dakle, funkcija - parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x^i} : A_i \to \mathbb{R}$, $A_i \subseteq X$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, derivabilna po varijabli x^j, $j \in \{1, \cdots, m\}$, u točki x_0, onda broj

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x^i})(x_0)}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^j \partial x^i}$$

nazivamo **parcijalnom derivacijom drugoga reda** funkcije f **po varijablama** x^i i x^j (redom) **u točki** x_0. U slučaju $j = i$ se piše

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^i} \equiv \frac{\partial^2 f(x_0)}{(\partial x^i)^2}.$$

Ako promatrana funkcija f ima sve parcijalne derivacije drugoga reda u točki x_0, $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^j \partial x^i}$, $i, j = 1, \cdots, m$, onda kažemo da je f **dvaput derivabilna u točki** x_0. Neka je $A_{ij} \subseteq X$ skup svih točaka u kojima funkcija f ima parcijalnu derivaciju drugoga reda po varijablama x^i i x^j redom. Tada je dobro definirana funkcija - druga parcijalna derivacija (po x^i i x^j redom) od f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} : A_{ij} \to \mathbb{R}, \quad (\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i})(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Ako je skup $A \equiv \bigcap_{i,j=1}^{m} A_{ij}$ neprazan, onda su na njemu dobro definirana sve druge parcijalne derivacije od f. Pritom kažemo da je skalarna funkcija f **dvaput derivabilna na skupu** $A \subseteq X$. U slučaju $A = X$ govorimo o **dvaput derivabilnoj** funkciji f. Posve slično (induktivno) se definiraju i na jasan način označuju **parcijalne derivacije** n**-tog reda**, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Primjer 5.2.8 Odredimo sve parcijalne derivacije drugoga reda i treće parcijalne derivacije po x, y i x redom te po x, x, i y redom (ondje gdje postoje) za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 y + x \ln y$. Definicijsko područje X je otvorena poluravnina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ i funkcija f je derivabilna. Pritom je, u bilo kojoj točki $(x, y) \in X$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + \ln y$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + \frac{x}{y}$. Primijetimo da su i obje parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 2x + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = \frac{-x}{y^2}$. Napokon, razvidno je da je f i triput (zapravo, po volji mnogo puta) derivabilna i da je $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y \partial x} = 2 = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y (\partial x)^2}$.

Jednakosti parcijalnih derivacija $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y (\partial x)^2}$ u primjeru gore nisu slučajne. O tomu govori ovaj, tzv. *Schwarzov teorem*:

Teorem 5.2.4 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj ϵ-kugli $K((x_0, y_0); \epsilon) \subseteq X$ i neka f ima na toj kugli i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ako je funkcija*

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{K((x_0,y_0);\epsilon)} : K((x_0, y_0); \epsilon) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0), onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0, y_0) i pritom je

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}.$$

Dokaz. Za svaku točku $(x, y) \in K((x_0, y_0); \epsilon) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ označimo $dx = x - x_0$ i $dy = y - y_0$. Tada je dobro definirana funkcija

$g : K((0,0);\epsilon) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,
$g(dx,dy) = \frac{1}{dx \cdot dy}(f(x_0+dx, y_0+dy) - f(x_0+dx, y_0) -$
$-f(x_0, y_0+dy) + f(x_0, y_0))$.

Budući da je funkcija f derivabilna na $K((x_0,y_0);\epsilon)$, to postoje granične vrijednosti

$\lim\limits_{dx\to 0} g(dx,dy) =$
$\frac{1}{dy}(\lim\limits_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0+dy)}{dx} - \lim\limits_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx,y_0)-f(x_0,y_0)}{dx}) =$
$\frac{1}{dy}(\frac{\partial f(x_0,y_0+dy)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x})$

i, slično,

$\lim\limits_{dy\to 0} g(dx,dy) = \cdots = \frac{1}{dx}(\frac{\partial f(x_0+dx,y_0)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})$.

Definirajmo, za svaki dy, funkciju $\phi_{dy} \equiv \phi : [x_0, x_0+dx] \to \mathbb{R}$, $dx > 0$, pravilom

$\phi(x) = \frac{f(x,y_0+dy)-f(x,y_0)}{dy}$

(Kad je $dx < 0$ funkcija ϕ se definira na segmentu $[x_0+dx, x_0]$!) Primijetimo da je

$g(dx,dy) = \frac{\phi(x_0+dx)-\phi(x_0)}{dx}$.

Budući da postoji $\frac{\partial f}{\partial x}$ na $K((x_0,y_0);\epsilon)$, to je ϕ derivabilna funkcija, pa po teoremu o srednjoj vrijednosti dobivamo:

$g(dx,dy) = \frac{\phi'(x_0+\vartheta_1 dx)dx}{dx} =$
$\frac{1}{dy}(\frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx,y_0+dy)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx,y_0)}{\partial x})$, $\vartheta_1 \in \langle 0,1\rangle$.

Definirajmo, za svaki dx, funkciju $\psi_{dx} \equiv \psi : [y_0, y_0+dy] \to \mathbb{R}$, $dy > 0$, pravilom

$\psi(y) = \frac{\partial f(x_0+\vartheta_1 dx,y)}{\partial x}$, pa je $g(dx,dy) = \frac{\psi(y_0+dy)-\psi(y_0)}{dy}$.

(Kad je $dy < 0$ funkcija ψ se definira na segmentu $[y_0+dy, y_0]$!) Budući da na $K((x_0,y_0);\epsilon)$ postoji $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, to je ψ derivabilna funkcija i pritom je

$\psi'(y) = \frac{\partial^2 f(x_0+\vartheta_1 dx,y)}{\partial y \partial x}$, $y \in [y_0, y_0+dy]$.

Po teoremu o srednjoj vrijednosti slijedi

$g(dx,dy) = \frac{\psi'(y_0+\vartheta_2 dy)dy}{dy} = \frac{\partial^2 f(x_0+\vartheta_1 dx, y_0+\vartheta_2 dy)}{\partial y \partial x}$, $\vartheta_2 \in \langle 0,1\rangle$.

Neprekidnost funkcije $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{K((x_0,y_0);\epsilon)}$ u točki (x_0,y_0) povlači

$\lim\limits_{(0,0)} g = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}$.

Prema tomu, dokazali smo da postoje ove granične vrijednosti:

$\lim\limits_{dx\to 0} g(dx,dy)$, $\forall dy$, $\lim\limits_{dy\to 0} g(dx,dy)$, $\forall dx$, i $\lim\limits_{(0,0)} g$.

Po Teoremu 5.1.3 postoje tada i pripadne uzastopne granične vrijednosti, koju su međusobno jednake i jednake graničnoj vrijednosti funkcije g u točki $(0,0)$, tj.

$\lim\limits_{dy\to 0}(\lim\limits_{dx\to 0} g(dx,dy)) = \lim\limits_{dx\to 0}(\lim\limits_{dy\to 0} g(dx,dy)) = \lim\limits_{(0,0)} g$.

Budući da je

$\lim\limits_{dy\to 0}(\lim\limits_{dx\to 0} g(dx,dy)) = \lim\limits_{dy\to 0} \frac{\frac{\partial f(x_0,y_0+dy)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{dy} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}$ i

$$\lim_{dx\to 0}(\lim_{dy\to 0} g(dx,dy)) = \lim_{dx\to 0}\frac{\frac{\partial f(x_0+dx,y_0)}{\partial y}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}{dx} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},$$

to smo teorem dokazali u potpunosti. ■

Primjer 5.2.9 Promatrajmo funkciju $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zadanu propisom

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Razvidno je da je f derivabilna na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ i pritom je

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2})$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2})$.

Nadalje, obje ove parcijalne derivacije su derivabilne funkcije (na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$) i

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$.

Pogledajmo sada što je s derivabinošću u točki $(0,0)$! Budući da je $f(x,0)=0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$ i $f(0,y)=0$ za svaki $y\in\mathbb{R}$, to je f derivabilna i u $(0,0)$ i $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

Primijetimo da je $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=x$, $\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-y$ i $\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}=0$, pa za druge parcijalne derivacije od f u $(0,0)$ dobivamo:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{(\partial x)^2} = \lim_{dx\to 0}\frac{\frac{\partial f(0+dx,0)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{0-0}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x} = \lim_{dy\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,0+dy)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{dy} = \lim_{dy\to 0}\frac{-dy-0}{dy} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = \lim_{dx\to 0}\frac{\frac{\partial f(0+dx,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{dx-0}{dx} = 1 \quad \text{i}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{(\partial y)^2} = \lim_{dy\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,0+dy)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{dy} = \lim_{dy\to 0}\frac{0-0}{dy} = 0.$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$ i $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$ su međusobno *različite*! Uzrok, dakako, leži u *prekidnosti* funkcije $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ u točki $(0,0)$.

Schwarzov teorem se lako poopćuje na skalarne funkcije od tri i više varijabla, kao i na parcijalne derivacije viših redova. Odgovarajući teorem jest ovaj:

Teorem 5.2.5 *Neka su funkciji $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subseteq\mathbb{R}^m$, na nekoj ϵ-kugli $K(x_0;\epsilon)\subseteq X$ neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo r-tog reda. Ako na toj ϵ-kugli f ima i sve parcijalne derivacije $(r+1)$-vog reda i ako su sve one neprekidne u točki x_0, onda vrijednosti parcijalnih derivacija $(r+1)$-vog reda funkcije f u točki x_0 ne ovise o redosljedu deriviranja po pojedinim varijablama.*

Sada ćemo, potpunosti radi, razmotriti prirodno pitanje o diferencijalima viših redova skalarne funkcije. Slično slučaju funkcije jedne varijable (v. §4.1.3), definicija bi trebala biti induktivna, tj. $(r+1)$-vi diferencijal bi

trebao biti diferencijal r-tog diferencijala, $r \in \mathbb{N}$. Sjetimo se da je diferencijal funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, u točki x_0 linearni funcional

$$df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad df(x_0) = [\ \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} \quad \dots \quad \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^m}\ ] = \sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} d^i \in$$

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$,

$$df(x_0)(dx) \equiv df(x) = \sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} dx^i \in \mathbb{R}.$$

Ako je funkcija f diferencijabilna onda je dobro definirana funkcija (**diferencijal** od f)

$$df : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \quad x \mapsto df(x),$$

koja svakoj točki $x \in X$ pridjeljuje diferencijal od f u toj točki. Budući da je vektorski prostor $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ izomorfan prostoru $\mathbb{R}^m$, to se na df smije gledati kao na funkciju iz X u $\mathbb{R}^m$. U tomu smislu, diferencijal df više nije skalrna funkcija. Njezina kodomena je $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, pa se radi o *vektorskoj funkciji* (v. sljedeće poglavlje, §6.1). Ovdje ćemo stoga navesti samo golu definiciju viših diferencijala skalarne funkcije, a za bolje razumijevanje upućujemo na §6.1.2.

Definicija 5.2.2 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, diferencijabilna funkcija Ako je diferencijal*

$$df : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m,\ x \mapsto df(x) = [\ \tfrac{\partial f(x)}{\partial x^1} \quad \dots \quad \tfrac{\partial f(x)}{\partial x^m}\ ],$$

diferencijabilna funkcija u točki x_0, onda kažemo da je funkcija f ***dvaput diferencijabilna u točki*** *x_0. Pripadni diferencijal $d(df)(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$ nazivamo* ***drugim diferencijalom*** *funkcije f* ***u točki*** *x_0 i kraće označujemo s $d^2 f(x_0)$. Vrijednosti toga drugog diferencijala $d^2 f(x_0)(dx)$ označujemo s $d^2 f(x_0) dx^2$ ili, kad ne može doći do zabune, samo s $d^2 f(x)$. Slijedi da je, u standardnoj koordinatizaciji,*

$$\begin{aligned} d^2 f(x_0)(dx) = d(df(x_0)(dx))(dx) = d^2 f(x_0) dx^2 \equiv \\ d^2 f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{6}$$

Ako je diferencijal df difrencijabilna funkcija, tj. ako je f dvaput diferencijabilna u svakoj točki $x \in X$, onda kažemo da je f ***dvaput diferencijabilna*** *funkcija. U tomu slučaju je dobro definirana (vektorska) funkcija (****drugi diferencijal*** *od f), $x \mapsto d^2 f(x)$,*

$$\begin{aligned} d^2 f \equiv d(df) : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})) \cong \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \cong \\ \mathbb{R}^{m^2} \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{m^2}, \mathbb{R}) \quad . \end{aligned}$$

Općenito, viši diferencijal funkcije f u točki x_0 definiramo induktivno pomoću prethodnoga (čim je ovaj diferencijabilna funkcija) Neka je r-ti diferencijal $d^r f : X \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{m^r}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m^r}$ skalarne funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija u točki x_0. Tada $(r+1)$-**vi diferencijal** funkcije f **u točki** x_0 definiramo kao linearni operator

$$d^{r+1}f(x_0) \equiv d(d^r f)(x_0)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m^r},$$

s vrijednostima (na vektoru $dx = x - x_0$)

$$\begin{aligned}(d^{r+1}f(x_0)(dx^r))(dx) \equiv \quad & d^{r+1}f(x_0)dx^{r+1} = \\ = \quad & \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{r+1}=1}^{m} \frac{\partial^{r+1}f(x_0)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{r+1}}} dx^{i_1}\cdots dx^{i_{r+1}},\end{aligned} \tag{6$\prime$}$$

što se često, kad ne može doći do zabune, kraće označuje s $d^{r+1}f(x)$.

Primjer 5.2.10 Promatrajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, koja neka dopušta treći diferencijal u točki $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$. Odredimo eksplicitno $d^3f(x_0)dx^3 \equiv d^3f(x)$, $x = (x^1, x^2) = x_0 + dx$.
Pišući i, j, k redom umjesto i_1, i_2, i_3, po formuli (6$\prime$) dobivamo:

$$d^3f(x) = d^3f(x_0)dx^3 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} dx^i dx^j dx^k =$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^1\partial x^1\partial x^1}dx^1dx^1dx^1 + \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2\partial x^1\partial x^1}dx^1dx^1dx^2 + \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^1\partial x^2\partial x^1}dx^1dx^2dx^1 +$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^1\partial x^1\partial x^2}dx^2dx^1dx^1 + \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2\partial x^2\partial x^1}dx^1dx^2dx^2 + \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2\partial x^1\partial x^2}dx^2dx^1dx^2 +$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^1\partial x^2\partial x^2}dx^2dx^2dx^1 + \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2\partial x^2\partial x^2}dx^2dx^2dx^2 \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=}$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0)}{(\partial x^1)^3}(dx^1)^3 + 3\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2(\partial x^1)^2}(dx^1)^2dx^2 + 3\frac{\partial^3 f(x_0)}{(\partial x^2)^2\partial x^1}dx^1(dx^2)^2 + \frac{\partial^3 f(x_0)}{(\partial x^2)^3}(dx^2)^3.$$

Ili formalnim zapisom po binomnoj formuli (pojednostavnjujući $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$):

$$d^3f(x,y) = \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y(\partial x)^2}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{(\partial y)^2\partial x}dx(dy)^2 +$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{(\partial y)^3}(dy)^3 \equiv (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^3 f(x_0,y_0).$$

Nije teško pokazati da formalni zapis (za vrijednosti trećega diferencijal funkcije dviju varijabla) izveden u Primjeru 5.2.10 vrijedi i općenito, tj. za vrijednosti r-tog diferencijala skalarne funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, u točki x_0 na vektoru $dx = x - x_0$. Dakle,

$$d^r f(x_0)dx^r \equiv d^r f(x) = (\frac{\partial}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x^{im}}dx^m)^r f(x_0). \tag{6$''$}$$

5.2.4 Egzaktna diferencijalna forma

Promatrajmo funkcije $f_i : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, \cdots, m$. Formalni zbroj

$$f_1dx^1 + \cdots + f_mdx^m,$$

pri čemu su dx^i, $i = 1, \cdots, m$, formalne oznake varijablinih prirasta (= diferencijala), nazivamo **diferencijalnom formom** na X. Ova diferencijalna forma je, zapravo, skalarna funkcija koja svakoj točki $x \in X$ pridijeljuje vrijednost

$$f_1(x)dx^1 + \cdots + f_m(x)dx^m.$$

Primijetimo da je vrijednost diferencijala $df(x_0)dx \equiv df(x)$, $x = x_0 + dx$, diferencijabilne skalarne funkcije f tipičan primjer diferencijalne forme $x \mapsto df(x)$ u kojoj je $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, \cdots, m$. Budući da su upravo takve diferencijalne forme najvažnije, posebno ćemo ih istaknuti.

Definicija 5.2.3 *Neka su $f_i : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, \cdots, m$, neprekidno derivabilne funkcije. Reći ćemo da je pripadna diferencijalna forma*

$$f_1 dx^1 + \cdots + f_m dx^m,$$

egzaktna *(ili* ***točna****) na otvorenom skupu $A \subseteq X$, ako postoji diferencijabilna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ za koju je*

$$df(x) = [f_1(x) \ \cdots \ f_m(x)], \text{ za svaki } x \in A.$$

Mi ćemo taj izraz zapisivati kao pripadnu vrijednost, tj.

$$df(x) = f_1(x)dx^1 + \cdots + f_m(x)dx^m.$$

Uočimo da je funkcija f iz Definicije 5.2.3 (čim postoji) ne samo diferencijabilna, nego ima i *sve parcijalne derivacije drugoga reda* i sve su one neprekidne. Osim toga, po Schwarzovu teoremu, tada mora biti $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$, dakle i

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \quad \text{na } A, \text{ za sve } i, j \in \{1, \cdots, m\}. \tag{7}$$

Ako je otvoreni skup A **zvjezdast**, tj. ako postoji neka točka $x_0 \in A$ takva da je, za svaku točku $x_1 \in A$, dužina

$$\overline{x_0 x_1} = \{x = (x^i) \in \mathbb{R}^m \mid x^i = x_0^i + t(x_1^i - x_0^i),\ t \in [0,1],\ i = 1, \cdots, m\}$$

sadržana u skupu A, onda uvjet (7) nije samo nuždan nego i dostatan za egzaktnost pripadne diferencijalne forme. Vrijedi, dakle, ovaj teorem:

Teorem 5.2.6 *Neka su funkcije $f_i : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, \cdots, m$, neprekidno derivabilne na otvorenom zvjezdastom skupu $A \subseteq X$. Da bi pripadna diferencijalna forma $f_1 dx^1 + \cdots + f_m dx^m$ bila egzaktna na A treba a i dosta je da vrijedi $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i}$ na A, za sve $i, j \in \{1, \cdots, m\}$.*

Dokaz. Nužnost je istinita po Definiciji 5.2.3 i Schwarzovu teoremu. Dovoljnost ćemo dokazati samo u posebnom slučaju kad je A kvadar. (U općem slučaju se pojavljuju poteškoće koje još nismo u stanju svladati!) Trebamo konstruirati funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ za koju će biti $df(x) = f_1(x)dx^1 + \cdots + f_m(x)dx^m$, za svaki $x \in A$. Jednostavnosti radi, razmatrat ćemo slučaj $m = 2$. (Opći slučaj $m \in \mathbb{N}$ se dokazuje posve slično!) Uvedimo oznake $f_1 = P$, $f_2 = Q$, $x^1 = x$ i $x^2 = y$. Tada promatrana diferencijalna forma u bilo kojoj točki $(x, y) \in A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subseteq X$ poprima zapis $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ i pritom je $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Učvrstimo po volji odabranu točku $(x_0, y_0) \in A$. Tada za svaku točku $(x, y) \in A$, tj. za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ i svaki $y \in \langle c, d\rangle$, postoje određeni integrali

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y)dt \quad \text{i} \quad \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)ds,$$

pa je dobro definirana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)ds.$$

Pokažimo da funkcija f diferencijabilna! Prvo,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_{x_0}^{x} P(t, y)dt\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)ds\Big) \overset{\text{T.4.3.4}}{=} P(x, y).$$

Drugo, budući da je funkcija P neprekidno derivabilna, to je

$$\frac{\partial}{\partial y}(\int_{x_0}^{x} P(t,y)dt) = \lim_{dy\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x} P(t,y+dy)dt - \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt}{dy} =$$

$$\lim_{dy\to 0} \int_{x_0}^{x} \frac{P(t,y+dy)-P(t,y)}{dy}dt \overset{\text{Lagrangeov teorem}}{=} \lim_{dy\to 0} \int_{x_0}^{x} \frac{\frac{\partial P(t,y+\vartheta dy)}{\partial y}dy}{dy}dt =$$

$$\lim_{dy\to 0} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t,y+\vartheta dy)}{\partial y}dt \overset{(5.2.8,\ \text{Zadatak 1.})}{=} \int_{x_0}^{x} \lim_{dy\to 0} \frac{\partial P(t,y+\vartheta dy)}{\partial y}dt =$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t,y)}{\partial y}dt, \quad \vartheta \in \langle 0,1\rangle.$$

Prema tomu,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int_{x_0}^{x} P(t,y)dt) + \frac{\partial}{\partial y}(\int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)ds) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t,y)}{\partial y}dt + Q(x_0,y) =$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}dt + Q(x_0,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + Q(x_0,y) = Q(x.y).$$

Sada po Teoremu 5.2.2 slijedi da je funkcija f diferencijabilna i pritom je $df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. ■

Primjer 5.2.11 Izrazom $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ je zadana diferencijalna forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pri čemu je $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ i $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Uočimo da skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *nije* zvjezdast. Razvidno je da funkcije P i Q imaju neprekidne parcijane derivacije po volji visokog reda. Iako je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

ova diferencijalna forma *nije* egzaktna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Zaista, kad bi, u protivnom, postojala neka funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, bilo bi $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Tada bi se mogla definirati funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravilom $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. (Nema točke u kojoj sin i cos iščezavaju!) Tako bismo dobili $g(0) = f(1,0) = g(2\pi)$. Uočimo da bi funkcija g bila derivabilna i pritom bi bilo (v. Teorem 5.2.3):

$$g'(t) = \frac{\partial f(\cos t, \sin t)}{\partial x} \cdot \cos' t + \frac{\partial f(\cos t, \sin t)}{\partial y} \cdot \sin' t =$$

$$\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Slijedilo bi, $g(t) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Ali, budući da bi moralo biti $g(0) = c \neq 2\pi + c = g(2\pi)$, upali smo u protuslovlje. (Napomenimo da je, primjerice, na svakom otvorenom pravokutniku $A \subseteq \mathbb{R}^2$, koji *ne* sadrži ishodište $(0,0)$, promatrana diferencijalna forma egzaktna.)

5.2.5 Taylorova formula

Pod uvjetima sličnim onima za funkciju jedne varijable, može se i funkcija više varijabla aproksimirati odgovarajućom Taylorovom formulom, odnosno, razviti u Taylorov red.

Teorem 5.2.7 *Ako funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, ima na nekoj $\varepsilon-$ okolini $K(x_0, \varepsilon) \subseteq X$ točke $T_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m)$ neprekidne derivacije do uključivo $(n+1)$- og reda, $n \geq 0$, onda za svaku točku $x = (x_1, \cdots, x_m) \in K(x_0, \varepsilon)$ vrijedi* ***Taylorova formula:***

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \tfrac{1}{1!}(\sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i})f(x_0) + \cdots + \\ + \tfrac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i})^n f(x_0) + R_n(x), \end{aligned} \tag{8}$$

gdje je

$$R_n(x) = \tfrac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!}(\sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i})^{n+1} f(x_\theta), \tag{9}$$

$0 < \theta < 1$, $p \in \mathbb{N}$, $T_\theta = (x_0^1 + \theta(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^m + \theta(x^m - x_0^m)) \in K(x_0, \varepsilon)$.

Dokaz. Da bismo dokazali formulu (8) definirajmo najprije funkciju $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (f \circ \psi) = f(\psi_1(t), \cdots, \psi_m(t))$, gdje su $\psi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, linearne funkcije zadane formulama $\psi_i(t) = x_0^i + t \cdot h_i \equiv x_1$, $h_i = x^i - x_0^i$, $i = 1, \cdots, m$. Budući da su točke $x_0 = (\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0)) = (x_0^1, \cdots, x_0^m)$ i $x = (\psi_1(1), \cdots, \psi_m(1)) = (x^1, \cdots, x^m)$ u ε-okolini $K(x_0, \varepsilon)$ točke x_0, to je i svaka točka $x_t = (\psi_1(t), \cdots, \psi_m(t)) = (y^1, \cdots, y^m)$, $t \in [0,1]$, dužine $\overline{x_0 x}$ element te okoline. Zbog svojstava funkcije f, možemo funkciju φ prikazati pomoću Maclaurinove formule (v. dokaz Teorema 4.1.12):

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \tfrac{\varphi'(0)}{1!}t + \cdots + \tfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \tfrac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{p \cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p}t^{n+1}, \tag{10}$$

$p \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$. Derivacije funkcije φ u točki $t \in [0,1]$ možemo odrediti pomoću parcijalnih derivacija funkcije f i derivacija funkcija ψ_i (uzastopnom primjenom formule (4) iz Teorema 5.2.3):

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\varphi(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial f(x_t)}{\partial y_i}\tfrac{d\psi_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} h_i \tfrac{\partial f(x_t)}{\partial y_i}, \\ &\tfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \tfrac{d}{dt}(\tfrac{d\varphi(t)}{dt}) = \sum_{i=1}^{m} h_i \tfrac{d}{dt}(\tfrac{\partial f(x_t)}{\partial y_i}) = \\ &\sum_{i=1}^{m} h_i(\textstyle\sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial}{\partial y_i}(\tfrac{\partial f(x_t)}{\partial y_i} \cdot \tfrac{d\psi_j}{dt}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} h_i h_j \tfrac{\partial^2 f(x_t)}{\partial y_i \partial y_j}, \cdots \\ &\tfrac{d^r\varphi(t)}{dt^r} = \cdots = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_r=1}^{m} \tfrac{\partial^2 f(x_t)}{\partial y_{i_1}\partial y_{i_2}\cdots\partial y_{i_r}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Izraz na desnoj strani jednakosti (11) zapišimo, kratkoće radi, na sličan način kao diferencijal u formuli (6′) (uz jednako tumačenje takvoga zapisa, v. Primjer 5.2.10):

$$\tfrac{d^r\varphi(t)}{dt^r} = (h_1\tfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + h_m\tfrac{\partial}{\partial y_m})^r f(x_t) = (\sum_{i=1}^{m} h_i\tfrac{\partial}{\partial y_i})^r f(x_t). \tag{12}$$

Po definicijama funkcija φ i ψ_i, $i = 1, \cdots, m$, je $\varphi(1) = f(x_0^1 + h_1, \cdots, x_0^m + h_m) = f(x^1, \cdots, x^m) = f(x)$, $\varphi(0) = f(x_0^1, \cdots, x_o^m) = f(x_0)$, i analogno, uz $h_i = x^i - x_0^i$, $i = 1, \cdots, m$,

$$\tfrac{d^r\varphi(0)}{dt^r} = ((x^1 - x_0^1)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x^m - x_0^m)\tfrac{\partial}{\partial x_m})^r f(x_0),\ r = 1, \cdots, n,$$

$$\tfrac{d^{n+1}\varphi(0)}{dt^r} = ((x^1 - x_0^1)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x^m - x_0^m)\tfrac{\partial}{\partial x_m})\tfrac{\partial}{\partial x_m})^r f(x_\theta).$$

($\frac{\partial f(x_0)}{\partial y_i} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ itd.!) Uvrštavanjem ovih izraza u (10) dobivamo, za $t = 1$, upravo izraz (8):

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!}(\sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\frac{\partial}{\partial x_i})^r f(x_0) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{p \cdot n!}(\sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\frac{\partial}{\partial x_i})^{n+1} f(x_\theta)(1-\theta)^{n+1-p}.$$

Uz uobičajenu oznaku $\triangle x_i = x^i - x_0^i$, $i = 1, \cdots, m$, Taylorovu formulu (8) možemo, zbog formule (6′) i $dx_i = \triangle x_i$, papisati i u obliku

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{d^r f(x_0)}{r!} + \frac{d^{n+1} f(x_\theta)}{p \cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p}, \tag{8'}$$

$p \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$. ■

Napomena 5.2.1 Očekivati je da će ostatak $R_n(x) = \frac{d^{n+1} f(x_\theta)}{p \cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p}$ u Taylorovoj formuli biti to manji što je točka x bliža točki x_0. Može se, međutim, pokazati da vrijedi i više, preciznije, da je $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{R_n(x)}{\rho^n} = 0$, gdje je $\rho = d(x_0, x) = (\sum\limits_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Stoga za $R_n(x)$ koristimo ponekad i oznaku $O(\rho^n)$ koja nam sugerira da ostatak $R_n(x)$ Taylorove formule teži brže od ρ^n. Ostatak napisan u navedom obliku nazivamo ***Peanovim oblikom ostatka Taylorove formule.*** S tom oznakom, formulu (2) za diferencijabilnu funkciju f možemo zapisati i kao $\triangle u = du + O(\rho)$, što je zapravo Taylorova formula za $n = 1$.

Ostatak R_n u formuli (8), određen formulom (9), je tzv. ***Schlömilchov oblik ostatka.*** Za $p = 1$ dobiva se ***Cauchyjev***, a za $p = n+1$ ***Lagrangeov oblik ostatka.***

Ako funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, ima u ε-okolini $K(T_0, \varepsilon) \subseteq X$ točke T_0 neprekidne derivacije po volji visokog reda i ako niz ostataka $(R_n(T)) \to 0$ (tj. $((O(\rho^n)) \to 0$ kad $n \to \infty$), onda Taylorova formula (8) prelazi u **Taylorov red** :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\frac{\partial}{\partial x_i})^n f(x_0) \tag{13}$$

$((\sum\limits_{i=1}^{m}(x^i - x_0^i)\frac{\partial}{\partial x_i})^0 f(x_0) \equiv f(x_0))$, ili uz simboliku formule (8′),

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n f(x_0)}{n!},\ d^0 f(x_0) = f(x_0). \tag{13'}$$

U slučaju $x_0 \equiv O = (0, \cdots, 0)$ Taylorovu formulu nazivamo, kao i ranije, **Maclaurinovom formulom**, a Taylorov red **Maclaurinovim redom funkcije od m varijabli**.

Primjer 5.2.12 Razvijmo u Taylorov red oko točke $(1, -1)$ funkciju
$f(x, y) = e^{x+y}$.
Funkcija f ima neprekidne derivacije po volji visokog reda u svakoj točki ravnine $\mathbb{R}^2$ i sve su te derivacije jednake funkciji f, a u točki $(1, -1)$ broju

1. Prema tomu, za $r-$ti diferencijal u točki $(1,-1)$ imamo, uz $dx = x-1$, $dy = y+1$,

$$d^r f(1,-1) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^r f(1,-1) = e^{1+(-1)}(dx+dy)^r =$$
$$e^0((x-1)+(y+1))^r = \sum_{k=0}^{r} \tbinom{r}{k}(x-1)^{r-k}(y+1)^k$$

Odatle za Taylorovu formulu funkcije f u točki $(1,-1)$ dobivamo:

$$e^{x+y} = 1 + \tfrac{1}{1!}\sum_{k=o}^{1}\tbinom{1}{k}(x-1)^{1-k}(y+1)^k + \tfrac{1}{2!}\sum_{k=0}^{2}\tbinom{2}{k}(x-1)^{2-k}(y+1)^k +$$
$$\cdots + \tfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(x-1)^{n-k}(y+1)^k +$$
$$\tfrac{1}{p\cdot n!}d^{n+1}f(1+\theta(x-1), -1+\theta(y+1))\cdot(1-\theta)^{n+1-p}.$$

Budući da je

$$d^{n+1}f() = e^{1+\theta(x-1)-1+\theta(y+1)}\cdot((x-1)+(y+1)^{n+1} = e^{\theta(x+y)}(x+y)^{n+1},$$

to je $\lim\limits_n(|R_n(x,y)|) = \frac{1}{p}e^{\theta(x+y)}\,|x+y|\,(1-\theta)^{1-p}\lim\limits_n \frac{|x+y|^n}{n!}\lim\limits_n((1-\theta)^n) = 0.$

Da zaista $\frac{|x+y|^n}{n!} \to 0$ možemo pokazati na isti način kao u Primjeru 4.1.15. Prema tomu, funkciju $f(x,y) = e^{x+y}$ možemo oko točke $(1,-1)$ razviti u Taylorov red

$$e^{y+y} = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(x-1)^{n-k}(y+1)^k =$$
$$1+((x-1)+(y+1))+\tfrac{1}{2!}((x-1)+(y+1))^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}((x-1)+(y+1))^n+\cdots =$$
$$(1+(x+y)+\tfrac{(x+y)^2}{2!}+\cdots+\tfrac{(x+y)^n}{n!}+\cdots, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2).$$

Red u zagradi smo mogli dobiti i razvijanjem funkcije $f(t) = e^t$ u Maclaurinov red (v. Primjer 4.1.16) izvršivši pritom formalnu zamjenu $t \mapsto x+y$.

5.2.6 Lokalne ekstremne vrijednosti

Lokalni ekstrem funkcije više varijabla definiramo na sličan način kao lokalni ekstrem funkcije jedne varijable: Reći ćemo da funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, ima u točki $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m) \in X$ **lokalni maksimum** (**lokalni minimum), ako postoji** ε-okolina $K(x_0,\varepsilon) \subseteq X$ točke x_0 sa svojstvom da je za svaku točku $x = (x^1, \cdots, x^m) \in K(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\}$, $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$. Funkcija ima u točki x_0 **lokalni ekstrem**, ako u toj točki ima bilo lokalni minimum bilo lokalni maksimum.

Teorem 5.2.8 (Nužni uvjet za lokalni ekstrem) *Ako funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, ima u točki x_0 lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = 0$ za svaki $i = 1, \cdots, m$.*

Dokaz. Razvidno je da svaka funkcija $f_i : X_i \to \mathbb{R}$, $X_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, definirana pravilom $f_i(t) = f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^m)$ ima lokalni ekstrem u točki $t = x_0^i$. Stoga je, po Teoremu 4.1.17,

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \frac{df_i(x_0^i)}{dt} = 0, \quad i = 1, \cdots, m. \quad \blacksquare$$

Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, diferencijabilna u točki x_0, može se nužni uvjet za obstojnost njezinoga lokalnog ekstrema u x_0 izraziti i kao $df(x_0) = 0$. U tom slučaju, x_0 nazivamo **stacionarnom točkom** funkcije f. Za funkciju dviju varijbla uvjet $df(x_0, y_0) = 0$ znači da je pripadna tangencijalna ravnina (3) u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ usporedna s koordinatnom XY-ravninom ($z = 0$) i da joj je jednadžba $z = f(x_0, y_0)$.

Razmotrimo sada jedan od dovoljnih uvjeta za obstojnost lokalnog ekstrema skalarne funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, u stacionarnoj točki x_0. Pretpostavimo da postoji ϵ-kugla $K(x_0; \epsilon) \subseteq X$ na kojoj funkcija f ima neprekidne druge parcijalne derivacije i da je barem jedna od njih u x_0 različita od 0. Budući da je x_0 stacionarna točka za f, sve prve parcijalne derivacije od f u x_0 iščezavaju pa, po Taylorovoj formuli (8′), za $x \in K(x_0; \epsilon)$ i $n = 2$, (v. Napomenu 5.2.1) dobivamo:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + O(\rho^2), \quad \rho = d(x_0, x). \tag{14}$$

(Po pretpostavci je drugi diferencijal $d^2 f(x_0) \neq 0$.) Ako, dakle, promatrana funkcija f ima u točki x_0 lokalni ekstrem onda postoji neka δ-kugla $K(x_0; \delta)$, $\delta \leq \epsilon$, na kojoj je prirast $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ stalnog predznaka. Tada iz (14) slijedi da je i zbroj $\frac{d^2 f(x_0)}{2!} + O(\rho^2)$ stalnog predznaka. Promatrajmo sada funkciju $g : K(x_0; \delta) \to \mathbb{R}$ zadanu propisom

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} (x^i - x_0^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\right) f(x_0).$$

Očito je $\Delta f(x) = g(x) + O(\rho^2)$. S obzirom na vrijednosti funkcije g mogu nastupiti ova četiri slučaja:

(i) $(\forall x \in K(x_0; \delta))\ g(x) > 0$;

(ii) $(\forall x \in K(x_0; \delta))\ g(x) < 0$;

(iii) $0 \in g[K(x_0; \delta)] \subseteq \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\} \quad \vee \quad 0 \in g[K(x_0; \delta)] \subseteq \mathbb{R}^- \bigcup \{0\}$;

(iv) funkcija g mijenja predznak, tj. postoje barem tri točke u kojima su vrijednosti od g redom negativna, nula i pozitivna.

Daljnja raščlamba pokazuje da u slučaju (i) funkcija f ima u točki x_0 lokalni minimum, u slučaju (ii) lokalni maksimum, a da u slučaju (iv) nema lokalnog ekstrema. U slučaju (iii) pitanje o lokalnom ekstremu u x_0 ostaje otvorenim: ovisno o dodatnim uvjetima, funkcija f može, odnosno, ne mora imati lokalni ekstrem u točki x_0. Dokazi navedenih tvrdnja su relativno složeni pa ćemo ih ispustiti. Ipak, dokazat ćemo odgovarajući teorem koji uvjete u slučajevima (i) i (ii) donosi u ponešto izmijenjenom obliku, ali lako primijenjivom za naše potrebe.

Teorem 5.2.9 (Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem) *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, dvaput diferencijabilna na nekoj ϵ-kugli $K(x_0; \epsilon)$. Neka u točki x_0 sve njezine prve parcijalne derivacije iščezavaju i neka joj barem jedna od drugih parcijalnih derivacija u x_0 ne iščezava. Ako su sve determinante*

$$D_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^r \partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^r \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^r \partial x^r} \end{vmatrix}, \quad r = 1, \cdots, m,$$

pozitivne onda f ima u x_0 lokalni minimum, a ako su sve one s parnim r pozitivne i sve one s neparnim r negativne onda f ima u x_0 lokalni maksimum.

Dokaz. Jednostavnosti radi, dokaz ćemo provesti u slučaju $m = 2$. Pritom će biti razvidno kako se dokazuje u općem slučaju. Neka je, dakle, funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, dvaput diferencijabilna na nekoj ϵ-kugli $K((x_0, y_0); \epsilon)$, te neka je $df(x_0, y_0) = 0$ i barem jedna između drugih parcijalnih derivacija od f u (x_0, y_0) različita od nula. Treba dokazati: Ako je

$$D_1 = \left| \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \right| > 0 \quad \text{i} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial y)^2} \end{vmatrix} > 0$$

onda f ima u (x_0, y_0) lokalni minimum, a ako je $D_1 < 0$ i $D_2 > 0$ onda f ima u (x_0, y_0) lokalni maksimum. Usput ćemo pokazati da u slučaju $D_2 < 0$ funkcija f u točki (x_0, y_0) nema lokalnog ekstrema, dok u slučaju $D_2 = 0$ obstojnost lokalnog ekstrema ostaje otvorenim pitanjem.
Neka je $(x, y) = (x_0 + dx, y_0 + dy)$ bilo koja točka iz $K((x_0, y_0); \epsilon)$. Po (14) je

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + O(\rho^2), \quad \rho = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Pretpostavimo da je, primjerice, $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \neq 0$ pa napišimo $d^2 f(x_0, y_0)$ na drugačiji način:

$$d^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2}(dx)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial y)^2}(dy)^2 =$$
$$\frac{1}{\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2}}\Big(\Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2}\Big)^2 (dx)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} dx \cdot dy +$$
$$+ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial y)^2}(dy)^2\Big) =$$
$$\frac{1}{\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2}}\Big(\Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} dx + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} dy\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \cdot$$
$$\cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial y)^2} - \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}\Big)(dy)^2\Big) =$$
$$\frac{1}{D_1}\Big(\Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} dx + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} dy\Big)^2 + D_2 (dy)^2\Big) =$$
$$\frac{\rho^2}{D_1}\Big(\Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \cdot \frac{dx}{\rho} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{\rho}\Big)^2 + D_2 \Big(\frac{dy}{\rho}\Big)^2\Big).$$

Označimo $s = \frac{dx}{\rho}$ i $t = \frac{dy}{\rho}$, pa definirajmo novu funkciju $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, pri čemu je $\mathbb{S}^1 = \{(s, t) \mid s^2 + t^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ središnja jedinična kružnica, pravilom

$$g(s, t) = \frac{1}{D_1}\Big(\Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{(\partial x)^2} \cdot s + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} \cdot t\Big)^2 + D_2 t^2\Big).$$

Funkcija g je dobro definirana jer je, za svaki dopustivi izbor za priraste dx i dy,

$$s^2 + t^2 = \Big(\frac{dx}{\rho}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{\rho}\Big)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{\rho^2} = 1.$$

Primijetimo da je funkcija g neprekidna. Gore dobiveni zapis za $d^2f(x_0,y_0)$ postaje sada

$$d^2f(x_0,y_0) = \rho^2 \cdot g(s,t). \tag{15}$$

Budući da je kružnica $\mathbb{S}^1$ zatvoreni i omeđeni podskup od $\mathbb{R}^2$, to funkcija g poprima svoju najmanju i svoju najveću vrijednost (v. Napomenu 5.1.3(ii)). Označimo s $m = g(s_1,t_1)$ najmanju, a s $M = g(s_2,t_2)$ njezinu najveću vrijednost. Prije nego li prijeđemo na razmatranje o predznaku funkcijskog prirasta $\Delta f(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$, podsjetimo se da ostatak $O(\rho^2)$ teži k nula brže od ρ^2, tj. da je $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{O(\rho^2)}{\rho^2} = 0$. To povlači da, za dostatno mali ρ, možemo količnik $|\frac{O(\rho^2)}{\rho^2}|$ učiniti po volji malim (manjim od bilo kojeg unaprijed danog pozitivnog broja). Neka je $D_1 > 0$ i $D_2 > 0$. Slijedi da je funkcija g pozitivna pa je i njena najmanja vrijednost $m > 0$. Uzmimo takav ρ da bude $|\frac{O(\rho^2)}{\rho^2}| < \frac{m}{4}$. Tada je

$$\Delta f(x,y) \overset{(14)}{=} \frac{d^2f(x_0,y_0)}{2} + O(\rho^2) \overset{(15)}{=} \rho^2(\frac{g(s,t)}{2} + \frac{O(\rho^2)}{\rho^2}) \geq \rho^2(\frac{m}{2} \pm \frac{m}{4}) > 0,$$

za svaki $(x,y) \in K((x_0,y_0);\rho)$, pa f u (x_0,y_0) ima lokalni munimum. Neka je $D_1 < 0$ i $D_2 > 0$. Tada je drugi diferencijal $d^2f(x_0,y_0) = \rho^2 \cdot g(s,t) < 0$ pa je funkcija g negativna. Slijedi da je i njezina najveća vrijednost $M < 0$. Uzmimo takav ρ da bude $|\frac{O(\rho^2)}{\rho^2}| < \frac{|M|}{4}$, pa dobivamo

$$\Delta f(x,y) = \rho^2(\frac{g(s,t)}{2} + \frac{O(\rho^2)}{\rho^2}) \leq \rho^2(-\frac{|M|}{2} \pm \frac{|M|}{4}) < 0,$$

za svaki $(x,y) \in K((x_0,y_0);\rho)$, pa f u (x_0,y_0) ima lokalni maksimum.
U slučaju $D_1 \neq 0$ i $D_2 < 0$, funkcija g nije stalnog predznaka (ovisi o predznacima od dx i dy). Budući da u slučaju $g(s,t) \neq 0$, za dovoljno mali ρ, predznak od $\Delta f(x)$ ovisi upravo o vrijednosti $g(s,t)$, to funkcija f u točki (x_0,y_0) ne može imati lokalnog ekstrema. Ako je, napokon, $D_1 \neq 0$ i $D_2 = 0$ onda je funkcija g nenegativna, tj. njezine su vrijednosti (ovisno o dx i dy) $g(s,t) \geq 0$. Slijedi da predznak od $\Delta f(x,y)$ ovisi o ostatku $O(\rho^2)$. Prema tomu, da bi se ustanovilo ima li u ovomu slučaju funkcija f u točki (x_0,y_0) lokalni ekstrem, trebaju dodatne pretpostavke i dublje istraživanje. ■

Primjer 5.2.13 (a) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, ima za stacionarnu točku $(0,0)$, jer se parcijalne derivacije $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$ i $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$ u $(0,0)$ poništavaju. Međutim, budući da je $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$ i $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = -2$, to je, za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

pa funkcija f nema lokalnog ekstrema u točki $(0,0)$.
(b) Funkciji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x$, su parcijalne derivacije $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x + 2$ i $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$. Slijedi da joj je $(1,0)$ stacionarna točka. Njezine druge parcijalne derivacije jesu $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$ i

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = -2$. Dakle, za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

pa funkcija f ima u točki $(1,0)$ lokalni maksimum ($D_1 = \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = -2 < 0$), $f(1,0) = 1$.

(c) Funkciji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, su parcijalne derivacije $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Slijedi da je, za svaki $x \in \mathbb{R}$, točka $(x,-x)$ stacionarna za f. Njezine druge parcijalne derivacije jesu $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 2 = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2}$, pa je, za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Stoga temeljem Teorema 5.2.9 ne možemo zaključiti ima li funkcija f u točkama $(-x,x)$ lokalne ekstreme. Nu, budući da je $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, to ni jedna točka $(-x,x)$ nema okolinu (ϵ-kuglu) na kojoj bi f bila pozitivna - svuda osim u $(-x,x)$, $f(-x,x) = 0$. Prema tomu, funkcija f nema lokalnog ekstrema ni u jednoj od točaka $(-x,x)$.

(d) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, ima parcijalne derivacije $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ svuda osim u točki $(0,0)$. Ipak, budući da je $f(0,0) = 0$ i $f(x,y) > 0$ za svaki $(x,y) \neq (0,0)$, to funkcija f ima u točki $(0,0)$ lokalni minimum.

5.2.7 Obstojnost implicitne funkcije

U §3.1.1 smo se dogovorili pod kojim uvjetima smatramo da je jednadžbom $F(x,y) = 0$ (u $\mathbb{R}$) implicitno zadana realna funkcija jedne realne varijable. Sada ćemo istražiti uvjete na funkciju F za obstojnost neprekidne, odnosno, derivabilne implicitno zadane funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Slični uvjeti se postavljaju i na jednadžbu $F(x^1, \cdots, x^m, x^{m+1} \equiv y) = 0$ koja onda implicitno određuje skalarnu funkciju $(x^1, \cdots, x^m) = x \mapsto y = f(x)$ od m varijabla.

Teorem 5.2.10 *Neka funkcija $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, udovoljava ovim uvjetima:*

(i) $(\exists (x_0, y_0) \in X)$ $F(x_0, y_0) = 0$;

(ii) $(\exists a, b \in \mathbb{R}^+)$ $P \equiv [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq X$ *i suženje* $F|_P : P \to \mathbb{R}$ *je neprekidna funkcija;*

(iii) $(\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a])$ $\phi_x : [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$, $\phi_x(y) = F(x,y)$, *je ili strogo uzlazna ili strogo silazna funkcija.*

Tada postoji neprekidna funkcija $f : \langle x_0 - a_0, x_0 + a_0 \rangle \to \mathbb{R}$, $0 < a_0 \leq a$, takva da je $f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - a_0, x_0 + a_0 \rangle$.

Ako se umjesto (iii) *postavi (stroži) uvjet*

(iii)$'$ $F|_P : P \to \mathbb{R}$ *je neprekidno derivabilna i* $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$,

onda postoji funkcija f kao gore, koja je neprekidno derivabilna i

$$f'(x) = \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

pri čemu je $y = f(x)$.

Dokaz. Neka je, po (iii), $\phi_0 \equiv \phi_{x_0} : [y_0-b, y_0+b] \to \mathbb{R}$, $\phi_0(y) = F(x_0, y)$, strogo uzlazna funkcija. (Posve slično bismo dokazivali u slučaju strogo silazne funkcije ϕ_0.) Po (i) je $\phi_0(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ pa je $\phi_0(y_0 - b) < \phi_0(y_0) < \phi_0(y_0 + b)$, odnosno, $F(x_0, y_0 - b) < 0 < F(x_0, y_0 + b)$. Definirajmo funkcije

$\psi_{1,2} : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = F(x, y_0 - b)$, $\psi_2(x) = F(x, y_0 + b)$.

Budući da su funkcije ψ_1 i ψ_2 neprekidne (v. Napomenu 5.1.2) i budući da je $\psi_1(x_0) = F(x_0, y_0 - b) < 0$ i $\psi_2(x_0) = F(x_0, y_0 + b) > 0$, to postoji neki $\delta \in \langle 0, a\rangle$ takav da su na δ-intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ oko točke x_0 funkcijske vrijednosti $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$ različitih predznaka, tj. $\psi_1(x) = F(x, y_0 - b) < 0$ i $\psi_2(x) = F(x, y_0 + b) > 0$. Odaberimo bilo koji $x_1 \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ pa promatrajmo funkciju

$\phi_1 \equiv \phi_{x_1} : [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$, $\phi_1(y) = F(x_1, y)$.

Budući da je $\phi_1(y - b) = F(x_1, y - b) < 0$, $\phi_1(y + b) = F(x_1, y + b) > 0$ i ϕ_1 strogo uzlazna - po (iii), to postoji točno jedna točka $y_1 \in \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle$ za koju je $\phi_1(y_1) = F(x_1, y_1) = 0$. Prema tomu, svakom $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ možemo pridijeliti jedinstveni $y \in \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle$ tako da bude $F(x, y) = 0$, pored $F(x_0, y_0) = 0$, pa je time dobro definirana jedinstvena funkcija

$f : \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \to \mathbb{R}, \quad f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$.

Da bismo dokazali njezinu neprekidnost, promatrajmo najprije točku x_0 i bilo koji $\epsilon > 0$. Uočimo da suženje $F|_{[x_0-a, x_0+a]\times[y_0-\epsilon, y_0+\epsilon]}$ udovoljava uvjetima (i), (ii) i (iii) pa, kao i prethodnom razmatranju, postoje pozitivni broj $\delta_0 \le a$ i jedinstvena funkcija

$f_0 : \langle x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0\rangle \to \langle y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon\rangle \subseteq \mathbb{R}$,

$f_0(x_0) = y_0$ i $F(x, f_0(x)) = 0$.

Zbog jedinstvenosti mora biti $f_0 = f|\langle x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0\rangle$. Tako dobivamo da je

$|f(x) - f(x_0)| = |f_0(x) - f_0(x_0)| = |f_0(x) - y_0| < \epsilon$

čim je $|x - x_0| < \delta_0$, što znači da je f neprekidna u x_0.

Neka je sada $x_1 \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, $x_1 \ne x_0$, bilo koja točka. Budući da postoji točno jedan $y_1 \in \langle y_0 - b_1, x_0 + b_1\rangle$, za neki $b_1 \le b$, takav da je $f(x_1) = y_1$ i $F(x_1, y_1) = 0$, to, za neki pozitivni $a_1 < \delta$, suženje $F|_{[x_1-a_1, x_1+a_1]\times[y_1-b_1, y_1+b_1]}$ udovoljava uvjetima (i), (ii) i (iii). Kao i prije, zaključujemo da postoje broj $\delta_1 > 0$ i jedinstvena funkcija

$f_1 : \langle x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\rangle \to \langle y_1 - b_1, y_1 + b_1\rangle \subseteq \mathbb{R}$,

$f_1(x_1) = y_1$ i $F(x, f_1(x)) = 0$.

Budući da, za svaki $x \in \langle x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\rangle$, stroga uzlaznost funcije ϕ_x povlači obstojnost točno jednoga pripadnog $y \in \langle y_1 - b_1, y_1 + b_1\rangle$, to mora biti $f_1(x) = f(x)$. Sada, kao i u razmatranju o funkcijama f_0 i f, zaključu-

jemo da je funkcija $f_1 = f|_{\langle x_1-\delta_1, x_1+\delta_1\rangle}$ neprekidna u točki x_1, pa je i f neprekidna u x_1. Time smo dokazali da je funkcija f neprekidna.

Neka je sada, umjesto uvjetu (iii), udovoljeno uvjetu uvjetu (iii)$'$ i neka je $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} > 0$. (U slučaju $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} < 0$ dokazivali bismo posve slično.) Budući da je $\frac{\partial F}{\partial y}$ neprekidna funkcija na pravokutniku P, to postoji (v. Napomenu 5.1.3 (i)) neka okolina točke (x_0, y_0) na kojoj funkcija $\frac{\partial F}{\partial y}$ poprima samo pozitivne vrijednosti. Neka je $P_0 = [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \times [y_0 - b_0, y_0 + b_0]$ provokutnik sadržan u toj okolini. Budući da je funkcija $\frac{\partial F}{\partial y}$ pozitivna, to je, za svaki $x \in [x_0 - a_0, x_0 + a_0]$, funkcija

$\phi \equiv \phi_x : [y_0 - b_0, y_0 + b_0] \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = F(x, y)$,

strogo uzlazna (v. Teorem 4.1.15). Slijedi da suženje $F|_{P_0}$ udovoljava uvjetima (i), (ii) i (iii), pa postoje pozitivni broj $\delta \leq a_0$ i preslikavanje

$f : \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \to \langle y_0 - b_0, y_0 + b_0\rangle \subseteq \mathbb{R}$,

$f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$.

Dokažimo da je f derivabilna funkcija i odredimo joj derivaciju! Promatrajmo bilo koje dvije točke $x_1, x = x_1 + \Delta x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ i označimo $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x) = f(x_1 + \Delta x) = y_1 + \Delta y$. Budući da je $F(x_1, f(x_1)) = 0 = F(x_1 + dx, f(x_1 + dx))$, to je

$\Delta F(x, y) = F(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - F(x_1, y_1) = 0.$

Neprekidnost parcijalnih derivacija $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ povlači diferencijabinost funkcije F (v. Teorem 5.2.2), dakle (v. Definiciju 5.2.1 i Napomenu 5.2.1),

$\Delta F(x, y) = dF(x_1, y_1) + O(\rho) = 0, \quad \rho^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$

Napišimo ostatak $O(\rho)$ u, za ovu svrhu, primjerenijemu obliku:

$O(\rho) = \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} \cdot \Delta x + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} \cdot \Delta y,$

pri čemu smo iskoristili činjenicu

$\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} \cdot \Delta x + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} \cdot \Delta y.$

Uvrštenjem dobivamo

$\Delta F(x, y) = \frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} \cdot \Delta x + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} \cdot \Delta y =$
$(\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial x} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho})\Delta x + (\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho})\Delta y = 0.$

Budući da je $\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y} > 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho} = 0$ i $\max\{|\frac{\Delta x}{\rho}|, |\frac{\Delta y}{\rho}|\} \leq 1$, to je, za dostatno mali ρ, broj $\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} > 0$ (dakle i $\neq 0$) pa smijemo njime dijeliti. Stoga je

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial x} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho}}{\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho}}.$

Po neprekidnosti funkcije f, iz $\Delta x \to 0$ slijedi $\Delta y \to 0$. Tako dobivamo

$f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-\frac{\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial x} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho}}{\frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y} + \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho}}) = -\frac{\frac{\partial F(x_1,f(x_1))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_1,f(x_1))}{\partial y}}.$

Budući da su funkcije $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ neprekidne i $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$, to je derivacija f' neprekidna funkcija. Time smo Teorem 5.2.10 dokazali u potpunosti. ■

U praksi se derivacija f' neprekidno derivabilne funkcije f, implicitno zadane jednadžbom $F(x, y) = 0$, određuje deriviranjem funkcijske kompozi-

cije $g(x) \equiv F(x,y)$ $(=0)$, $y = f(x)$, po varijabli x. Naime,

$$0 = g'(x) \overset{(4)}{=} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot f'(x).$$

Slično se, u općenitijem slučaju, parcijalne derivacije $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ i $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ neprekidno derivabilne funkcije f, implicitno zadane jednadžbom $F(x,y,z) = 0$, dobivaju parcijalnim deriviranjem kompozicije $g(x,y) \equiv F(x,y,z)$ $(=0)$, $z = f(x,y)$, redom po varijablama x i y. Tada je

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \overset{(4)}{=} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} =$$
$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

dakle,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}}.$$

Slično se dobije

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}}.$$

Analogno se postupa i u slučaju implicitno zadane skalarne funkcije od m varijabla.

Primjer 5.2.14 Istražimo je li jednadžbom $\sin xy + \ln yz + xz = 0$ implicitno zadana neka funkcija $f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$, gdje su $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ intervali. Primijetimo da funkcija $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = \sin xy + \ln yz + xz$, ima za nultočku $(0,1,1) \in X$. $(X = \{(x,y,z) \mid yz > 0\}$!) Time je udovoljeno uvjetu (i) u (poopćenomu, $m = 2$) Teoremu 5.2.10. Razvidno je da je funkcija F neprekidna pa je odgovarajućemu uvjetu (ii) udovoljeno na svakom kvadru $Q \subseteq X$. Napokon, za svaki $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, funkcija $\phi_{x,y} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\phi_{x,y}(z) = F(x,y,z)$, je strogo uzlazna. Udovoljeno je, dakle, i uvjetu (iii). (Štoviše, udovoljeno je i uvjetu (iii$'$) jer je funkcija F neprekidno derivabilna i $\frac{\partial F(0,1,1)}{\partial z} = (\frac{1}{z} + x)|_{(0,1,1)} = 1 \neq 0$.) Po (poopćenomu, $m = 2$) Teoremu 5.2.10 postoji neprekidno derivabilna funkcija $f : \langle -a_0, a_0 \rangle \times \langle 1 - b_0, 1 + b_0 \rangle \to \mathbb{R}$, $a_0 > 0$ i $b_0 \in \langle 0, 1 \rangle$, za koju je $f(0,1) = 1$ i $F(x,y,f(x,y)) = 0$ (tj. $z = f(x,y)$). Njezine parcijalne derivacije jesu:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}} = -\frac{y \cos xy + f(x,y)}{\frac{1}{f(x,y)} + x} \quad \text{i}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}} = -\frac{x \cos xy + \frac{1}{y}}{\frac{1}{f(x,y)} + x}.$$

Posebice, u točki $(0,1)$ je $\frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = -2$ i $\frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = -1$.

5.2.8 Vježbe

1. Neka je $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$ i $a < b$, neprekidno derivabilna funkcija, a $F : X \to \mathbb{R}$ funkcija zadana integralom

$$F(x,y) = \int_a^b f(x,y,t)dt.$$

Dokazati da je funkcija F neprekidna i da je, u svakoj točki $(x_0, y_0) \in X$,

$$\lim_{(x_0,y_0)} F \equiv \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \int_a^b f(x,y,t)dt = \int_a^b (\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y,t))dt.$$

Dokaz. Odaberimo bilo koju točku $(x_0, y_0) \in X$ pa u njezinoj dovoljno maloj ϵ-kugli $K((x_0, y_0); \epsilon) \bigcap X$ promatrajmo bilo koju točku (x, y). Dokazat ćemo da granični prijelaz $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (kroz X) povlači $F(x, y) \to F(x_0, y_0)$, tj. da funkcijin prirast $\Delta F(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0)$ teži k nula.

$$\Delta F(x,y) = \int_a^b f(x,y,t)dt - \int_a^b f(x_0,y_0,t)dt = \int_a^b (f(x,y,t) - f(x_0,y_0,t))dt =$$

$$\int_a^b ((f(x,y,t) - f(x_0,y,t)) + (f(x_0,y,t) - f(x_0,y_0,t)))dt \overset{\text{Lagrangeov teorem}}{=}$$

$$\int_a^b (\frac{\partial f(x_0+\vartheta_1(x-x_0),y,t)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0+\vartheta_2(y-y_0),t)}{\partial y}(y-y_0))dt, \quad \vartheta_{1,2} \in \langle 0,1\rangle.$$

Budući da je funkcija f neprekidno derivabilna, funkcije

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

su neprekidne, pa su neprekidna i njihova suženja dobivena uzimanjem bilo kojih (čvrstih) vrijednosti za x i y. Takva su suženja definirana, zapravo, na segmentu $[a, b]$ pa se radi o omeđenim funkcijama (v. Teorem 3.3.14). Postoje, dakle, pozitivni brojevi $M_{1,2} \in \mathbb{R}$ takvi da je, za svaki $t \in [a, b]$,

$$|\frac{\partial f(x_0+\vartheta_1(x-x_0),y,t)}{\partial x}| \le M_1 \quad \text{i} \quad |\frac{\partial f(x_0,y_0+\vartheta_2(y-y_0),t)}{\partial y}| \le M_2.$$

Slijedi,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Delta F(x,y) \le \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \int_a^b (M_1(x-x_0) + M_2(y-y_0))dt =$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} ((M_1(x-x_0) + M_2(y-y_0))(b-a) = 0.$$

Time smo dokazali da je funkcija F neprekidna. Druga tvrdnja je izravna posljedica te neprekidnosti. Zaista,

$$0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (F(x,y) - F(x_0,y_0)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} ((F(x,y)) - F(x_0,y_0) =$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\int_a^b f(x,y,t)dt) - \int_a^b f(x_0,y_0,t)dt =$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\int_a^b f(x,y,t)dt) - \int_a^b (\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y,t))dt.$$

2. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(x, y) = e^x \sin y$. Dokazati da je, za svaki par $m, n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^{m+n} f(0,0)}{\partial y^n \partial x^m} = \sin \frac{n\pi}{2}$.

3. Odrediti diferencijal funkcije $(x, y, z) \mapsto \frac{z}{x^2+y^2}$ u bilo kojoj točki.

4. Približno izračunati $2,68^{\sin 0,05}$.

5. Dokazati da je $\arctan \frac{x+y}{1+xy} \approx x + y$ čim su x i y dostatno mali.

6. Istražiti (ne)prekidnost, derivabilnost i diferencijabilnost funkcije

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = \sqrt[3]{xyz}$.

7. Neka su $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n puta neprekidno derivabilne funkcije. Odrediti n-ti diferencijal funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, u bilo kojoj točki.
8. Je li diferencijalna forma
(a) $xdx + ydy$; (b) $ydx + xdy$;
(c) $ydx - xdy$; (d) $\sin x \cdot dx + \cos x \cdot dy$
egzaktna (na nekom otvorenom zvjezdastom skupu)?
9. Razviti funkciju $(x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ po Maclaurinovoj formuli do uključivo $n = 2$.
10. Razviti funkciju $(x,y) \mapsto f(x,y) = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$ u Maclaurinov red.
11. Odrediti lokalne ekstreme ovih funkcija:
(a) $(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{3x+2y+a}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, $a \in \mathbb{R}$ konstanta;
(b) $(x,y) \mapsto g(x,y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$;
(c) $h : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.
12. Odrediti sve funkcije $(x,y) \mapsto f(x,y) = z$ implicitno zadane jednadžbom
(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$; (b) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 1 = 0$,
te narisati pripadne grafove.
13. Izračunati derivaciju u bilo kojoj točki (u kojoj postoji) funkcije $x \mapsto f(x) = y$ implicitno zadane jednadžbom
(a) $x^y - y^x = 0$; (b) $\sin xy - e^{xy} - x^2 y = 0$.
14. Izračunati parcijalne derivacije u bilo kojoj točki (u kojoj postoje) funkcije $(x,y) \mapsto f(x,y) = z$ implicitno zadane jednadžbom $ax + by - 2z = c\cos(ax + by - 2z)$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$ dane konstante.
15. Ako je jednadžbom $g(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ implicitno zadana derivabilna funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y) = z$, pokazati da vrijedi
$(y - f(x,y))\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (f(x,y) - x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x - y.$

5.3 INTEGRIRANJE SKALARNIH FUNKCIJA

Ovdje ćemo poopćiti pojam određenoga integrala (v. §4.3) na realne funkcije više varijabla. Nadalje, pokazat ćemo da se njegovo izračunavanje svodi na izračunavanje konačno mnogo određenih integrala realnih funkcija jedne varijable. Važni teorem o zamjeni varijabla ćemo samo navesti i komentirati. Napokon, pokazat ćemo i nekoliko primjena ovoga integrala.

5.3.1 Višestruki integral

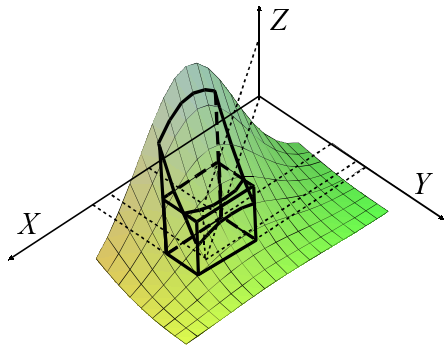
Neka je $\mathcal{D}^i = \{D^i \mid D^i = \{x_0^i, x_1^i, \cdots, x_{k_i}^i\}, k_i \in \mathbb{N}\}$, $a_i = x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{k_i}^i = b_i$, skup svih rastava danog segmenta $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$ (v. §4.3.1). Direktni produkt $D = D^1 \times \cdots \times D^m$, $D^i \in \mathcal{D}^i$, $i = 1, \cdots, m$, nazivamo **rastavom** (ili **razdiobom**) danoga **kvadra** $K \equiv [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$. Neka $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(K)$ označuje skup svih takvih rastava D

promatranoga kvadra K. Reći ćemo da rastav $D' = D'^1 \times \cdots \times D'^m \in \mathcal{D}$ **profinjuje** dani rastav D čim je $D \subseteq D'$.
Promatrajmo omeđenu funkciju $f : K \to \mathbb{R}$. Za nju, dakle, postoje brojevi $M_{1,2} \in \mathbb{R}$ takvi da je, za svaki $x \in K$, $M_1 \leq f(x) \leq M_2$. Pridijelimo svakom rastavu $D = D^1 \times \cdots \times D^m \in \mathcal{D}(K)$, $D^i = \{x_0^i, x_1^i, \cdots, x_{k_i}^i\}$, $i = 1, \cdots, m$, **integralnu sumu** (broj)

$$S_\xi(f; D) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{k_m} f(\xi_{j_1}^1, \cdots, \xi_{j_m}^m)(x_{j_1}^1 - x_{j_1-1}^1) \cdots (x_{j_m}^m - x_{j_m-1}^m),$$

pri čemu je $(\xi_{j_1}^1, \cdots, \xi_{j_m}^m)$ po volji odabrana točka iz (svakoga) podkvadra $[x_{j_1-1}^1, x_{j_1}^1] \times \cdots \times [x_{j_m-1}^m, x_{j_m}^m] \subseteq K$, $j_i = 1, \cdots, k_i$, $i = 1, \cdots, m$, a ξ je pokrata za sve te točke. Primjerice (v. crtež dolje), u slučaju $m = 2$, za omeđenu funkciju $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ i dani rastav $D = D^1 \times D^2$, $D^1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_p\}$ i $D^2 = \{y_0, y_1, \cdots, y_r\}$, izbor točaka $(\xi_j, \eta_k) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$, $j = 1, \cdots p$, $k = 1, \cdots r$, određuje integralnu sumu

$$S_\xi(f; D) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} f(\xi_j, \eta_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}).$$



Definicija 5.3.1 *Neka je $f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \equiv K \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Reći ćemo da je funkcija f* ***integrabilna*** *(u Riemannovu smislu) ako postoji broj $J \in \mathbb{R}$ s ovim svojstvom:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D})(\forall S_\xi(f; D)) \quad D \supseteq D_0 \Rightarrow |S_\xi(f; D) - J| < \epsilon.$$

*Broj $J \equiv J(f)$ tada nazivamo (**određenim**) **integralom** funkcije f.*

Vidimo da se, do na analogno značenje pripadnih oznaka, ova definicija podudara s Definicijom 4.3.1). Nadalje, u svezi s integrabilnošću funkcija više varijabla, vrijede analogoni važnih teorema za funkcije jedne varijable (v. Teorem 4.3.1 i Teorem 4.3.2). Uobičajilo se pisati

$$J(f) \equiv \int_K f \quad \text{ili} \quad J(f) \equiv \int_K \cdots \int f(x^1, \cdots, x^m) dx^1 \cdots dx^m$$

i govoriti o **višestrukom** (m-**strukom**) **integralu**. U slučajevima $m = 2$ i $m = 3$ ćemo, kao i do sada, pisati $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ i $x^3 \equiv z$, odnosno,

$$J(f) \equiv \iint_K f(x, y) dxdy \quad \text{i} \quad J(f) \equiv \iiint_K f(x, y, z) dxdydz$$

i govoriti redom o **dvostrukom** i **trostrukom integralu**.

Kao i u slučaju određenoga integrala za funkciju jedne varijable, i ovdje se mogu slično definirati donje i gornje Darbouxove sume, $s(f; D)$ i $S(f; D)$,

kao i donji i gornji (Riemannov) integral, $J_*(f)$ i $J^*(f)$. Pritom ostaju valjanima analogoni svih činjenica što su vrijedili u slučaju funkcije jedne varijable.

Za omeđenu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, pri čemu je $X \subset \mathbb{R}^m$ omeđen, pripadni integral definiramo pomoću njezinoga trivaijalnog proširenja $\tilde{f}$ na neki kvadar $K \supseteq X$. Lako se vidi da taj integral, ako postoji, ne ovisi o odabranom kvadru pa je sljedeća definicija ispravna.

Definicija 5.3.2 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija pri čemu je $X \subset \mathbb{R}^m$ omeđen skup. Neka je $K \subset \mathbb{R}^m$ bilo koji kvadar što sadrži X, a $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$ trivijalno proširenje od f, tj.*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \\ 0, & x \in K \setminus X \end{cases}.$$

Ako je funkcija $\tilde{f}$ integrabilna onda ***integral*** *(na X) od f definiramo formulom*

$$\int_X f = \int_K \tilde{f}.$$

Sljedeće relacije, što govore da je višestruki integral linearni funkcional, slijede izravno iz definicije:

$$\int_X (f+g) = \int_X f + \int_X f;$$
$$\int_X (\lambda f) = \lambda \int_X f.$$

Osim toga, ako je $X = X_1 \bigcup X_2$ i $X_1 \bigcap X_2 = \emptyset$ (ili $\int_{X_1 \cap X_2} f = 0$) onda je

$$\int_X f = \int_{X_1} f + \int_{X_2} f.$$

5.3.2 Izračunavanje i primjena višestrukog integrala

Ovdje ćemo se pozabaviti praktičnim izračunavanjem višestrukog integrala i njegovom primjenom. Promatrat ćemo samo geometrijski zorne slučajeve $m = 2$ i $m = 3$, ali će biti jasno i kako treba postupati u općem slučaju. Prisjetimo se (jednostrukog) integrala realne funkcije jedne varijable kojega, naravno, nismo izračunavali po definiciji, nego primjenom Newton-Leibnizove formule, tj. primjenom neodređenog integrala. Da bismo istu tehniku smjeli primijenili i na višestruki integral, nužno je prije dokazati da se ovaj svodi na konačno jednostrukih integrala, što je tzv. *Fubinijev teorem.* Mi ćemo ga, jednostavnosti radi, iskazati i dokazati u najjednostvnijemu slučaju neprekidne funkcije i $m = 2$ (za dvostruki integral).

Teorem 5.3.1 *Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, pri čemu je $K = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik. Tada vrijedi:*

(i) $(\forall x \in [a,b])$ *funkcija $y \mapsto f(x,y)$ je R-integrabilna na $[c,d]$;*

(ii) *funkcija $x \mapsto F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ je R-integrabilna na $[a,b]$;*

(iii) $\int\limits_K f = \int\limits_{[a,b]} F$, *tj.* $\iint\limits_K f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx.$

Slično, izmjena $x \leftrightarrow y$ *daje* $\iint\limits_K f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy.$

Dokaz. Budući da je funkcija f neprekidna, to je, za svaki $x \in [a,b]$, neprekidna i funkcija $y \mapsto f(x,y)$, $y \in [c,d]$, pa je stoga i integrabilna. Slijedi da je funkcija

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

dobro definirana. Dokažimo da je funkcija F integrabilana! Promatrajmo bilo koju razdiobu $D \in \mathcal{D}(K)$. Po definiciji je $D = D^1 \times D^2$, pri čemu je

$D^1 \cdots a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ razdioba od $[a,b]$ i

$D^2 \cdots c = y_0 < y_1 < \cdots < y_l = d$ razdioba od $[c,d]$.

Za integralnu sumu s obzirom na D^1 dobivamo

$$\sigma(F;D^1;t_1,\cdots,t_k) = \sum_{i=1}^k F(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k (\int\limits_c^d f(t_i,y)dy)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^l \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(t_i,y)dy)(x_i - x_{i-1}), \quad t_i \in [x_{i-1},x_i],\ i = 1,\cdots,k.$$

Budući da neprekidnost na pravokutniku povlači omeđenost, to postoje m_{ij}, $M_{ij} \in \mathbb{R}$ takvi da je $m_{ij} \le f(t_i,y) \le M_{ij}$ za svaki $t_i \in [x_{i-1},x_i]$, svaki $y \in [y_{j-1},y_j]$ i svaki i i j. To povlači

$$s(f;D) \le \sigma(F;D^1;t_1,\cdots,t_k) \le S(f;D),$$

gdje su $s(f;D)$ i $S(f;D)$ redom pripadna donja i gornja Darbouxova suma polazne funkcije f. Neka su $s(F;D^1)$ i $S(F;D^1)$ redom donja i gornja Darbouxova suma funkcije F s obzirom na razdiobu D^1. Razvidno je da vrijedi

$$s(F;D^1) = \inf\{\sigma(F;D^1;t_1,\cdots,t_k) \mid t_i \in [x_{i-1},x_i],\ i = 1,\cdots,k\} \quad \text{i}$$

$$S(F;D^1) = \sup\{\sigma(F;D^1;t_1,\cdots,t_k) \mid t_i \in [x_{i-1},x_i],\ i = 1,\cdots,k\}.$$

Uvažvajući prethodne nejednakosti zaključujemo

$$s(f;D) \le s(F;D^1) \le S(F;D^1) \le S(f;D).$$

Budući da je funkcija f integrabilna na K, to za svaki $\epsilon > 0$ postoji neki $D \in \mathcal{D}(K)$ takav da bude

$$S(f;D) - s(f;D) < \epsilon.$$

To onda povlači i

$$S(F;D^1) - s(F;D^1) < \epsilon,$$

što znači da je funkcija F integrabilna. Napokon, da bismo dokazali tvrdnju pod (iii), primijetimo da, za svaku razdiobu $D \in \mathcal{D}(K)$ i svaku razdiobu $D^1 \in \mathcal{D}([a,b])$, vrijedi

$$s(f;D) \le \iint\limits_K f \le S(f;D) \quad \text{i}$$

$$s(f;D) \le s(F;D^1) \le \int\limits_{[a,b]} F \le S(F;D^1) \le S(f;D).$$

Prema tomu, za svaki $\epsilon > 0$ postoji dostatno fina razdioba D takva da je

$$|\iint\limits_K f - \int\limits_{[a,b]} F|| < |S(f;D) - s(f;D)| < \epsilon.$$

To upravo znači da je

$$\iint\limits_K f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx. \quad \blacksquare$$

U općenitijem slučaju, kad je definicijsko područje $X \subset \mathbb{R}^2$ omeđeno grafovima dviju neprekidnih funkcija lako dobivamo ovaj teorem:

Teorem 5.3.2 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ preslikavanje, pri čemu je $X \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima dvaju preslikavanje $\phi_{1,2} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi_1 \leq \phi_2$. Tada je*

$$\iint\limits_X f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy)dx.$$

Posve slično, kad je $X \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima dvaju preslikavanja $\psi_{1,2} : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\psi_1 \leq \psi_2$, vrijedi

$$\iint\limits_X f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d (\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Iskažimo sada, preglednosti radi, analogone prethodnih teorema u slučaju $m = 3$.

Teorem 5.3.3 *Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ preslikavanje, pri čemu je $K = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] \subset \mathbb{R}^3$ kvadar. Tada vrijedi:*

(i) $(\forall x \in [a,b])$ *funkcija $(y,z) \mapsto f(x,y,z)$ je integrabilna na $[c,d] \times [r,s]$;*

(ii) *funkcija $x \mapsto F(x) = \int\limits_c^d (\int\limits_r^s f(x,y,z)dz)dy$ je integrabilna na $[a,b]$;*

(iii) $\int\limits_K f = \int\limits_{[a,b]} F$, *tj.* $\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d (\int\limits_r^s f(x,y,z)dz)dy)dx.$

"Izmijenjujući mjesta" varijablama dobivamo analogne integracijske formule.

Teorem 5.3.4 *Neka je $f : V \to \mathbb{R}$ preslikavanje, pri čemu je $V \subset \mathbb{R}^3$ omeđen grafovima dvaju preslikavanje $g_{1,2} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $g_1 \leq g_2$. Neka je okomita projekcija skupa V u koordinatnu XY-ravninu omeđena grafovima dvaju preslikavanja $\phi_{1,2} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset X$, $\phi_1 \leq \phi_2$. Tada je*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b (\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} (\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz)dy)dx.$$

Posve slično, kad je okomita projekcija skupa V u XY-ravninu omeđena grafovima dvaju preslikavanja $\psi_{1,2} : [c,d] \to \mathbb{R}$, $[c,d] \subset Y$, $\psi_1 \leq \psi_2$, dobivamo

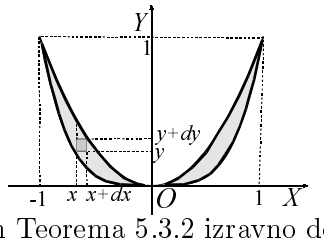
$$\iiint\limits_V f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d (\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} (\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz)dx)dy.$$

Primjer 5.3.1 Izračunajmo integral $\iint\limits_K xy^2 dxdy$, $K = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$.

Primijenjujući Fubinijev teorem (Teorem 5.3.1) i Newton-Leibnizovu formulu dobivamo

$$\iint\limits_K xy^2dxdy = \int\limits_a^b(\int\limits_c^d xy^2dy)dx = \int\limits_a^b x(\int\limits_c^d y^2dy)dx = \int\limits_a^b x([\tfrac{y^3}{3}]_c^d)dx =$$
$$\int\limits_a^b x(\tfrac{d^3}{3} - \tfrac{c3}{3})dx = (\tfrac{d^3}{3} - \tfrac{c3}{3})[\tfrac{x^2}{2}]_a^b = \tfrac{1}{6}(b^2 - a^2)(d^3 - c^3).$$

Primjer 5.3.2 Izračunajmo integral $\iint\limits_X (x + y^2)dxdy$, pri čemu je $X \subset \mathbb{R}^2$ omeđen krivuljama $y = x^2$ i $y = x^4$ (v. crtež).



Primjenom Teorema 5.3.2 izravno dobivamo

$$\iint\limits_X (x + y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^1(\int\limits_{x^4}^{x^2}(x + y^2)dy)dx = \int\limits_{-1}^1([xy + \tfrac{y^3}{3}]_{x^4}^{x^2})dx = \cdots =$$
$$\int\limits_{-1}^1(-\tfrac{x^{12}}{3} + \tfrac{x^6}{3} - x^5 + x^3)dx = [-\tfrac{x^{13}}{39} + \tfrac{x^7}{21} - \tfrac{x^5}{5} + \tfrac{x^4}{4}]_{-1}^1 = \cdots = \tfrac{4}{91}.$$

Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna, a skup X omeđen po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom, onda pripadni dvostruki integral mjeri obujam geometrijskoga tijela Ω određenoga osnovicom X i plohom (grafom) G_f, tj.

$$V(\Omega) = \iint\limits_X f(x,y)dxdy \equiv \iint\limits_X fdP.$$

(U drugomu zapisu rabimo oznaku $dP \equiv dxdy$ za "element" ravninske površine; v. Napomenu 4.3.6) Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $f = c_1$ promatrani integral mjeri površinu ravninskoga skupa X, tj.

$$P(X) = \iint\limits_X dxdy \equiv \iint\limits_X dP.$$

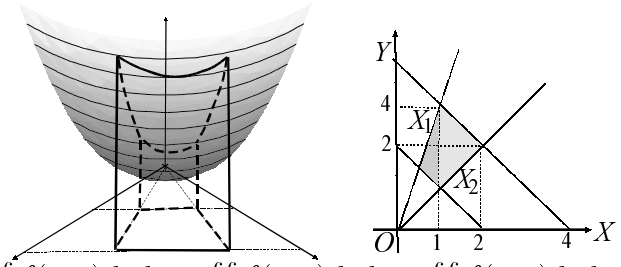
U slučaju trostrukog integrala, ako funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^3$, predstavlja gustoću tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo X, $\Omega \equiv X$, pripadni integral mjeri masu, tj.

$$m(\Omega) = \iiint\limits_X f(x,y,z)dxdydz \equiv \iiint\limits_X fdV.$$

(U drugomu zapisu rabimo oznaku $dV \equiv dxdydz$ za "element" prostornog obujma!) Uočimo da za konstantnu funkciju $f = c_1$ (homogenost) pripadni integral mjeri obujam, tj.

$$V(X) = \iiint\limits_X dxdydz \equiv \iiint\limits_X dV.$$

Primjer 5.3.3 Izračunajmo obujam V geometrijskoga tijela što ga zatvaraju ravnine $z = 0$, $y = x$, $y = 3x$, $y = 2 - x$, $y = 4 - x$ i ploha $z = x^2 + y^2$ (v. crteže).



$$V = \iint\limits_X f(x,y)dxdy = \iint\limits_{X_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{X_2} f(x,y)dxdy =$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(\int\limits_{2-x}^{2x}(x^2+y^2)dy\Big)dx + \int\limits_{1}^{2}\Big(\int\limits_{x}^{4-x}(x^2+y^2)dy\Big)dx = \cdots =$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(6x^3-4x^2+4x-\tfrac{8}{3})dx + \int\limits_{1}^{2}(-\tfrac{8x^3}{3}+8x^2-16x+\tfrac{64}{3})dx = \cdots = 6\tfrac{13}{32}.$$

(Neka čitatelj izračuna ovaj integral i tako da prvo integrira po varijabli x!)

U praksi je često vrlo važno pojednostavniti podintegralni izraz tako da se promatrani integral što lakše izračuna. To vodi k tzv. "problemu zamjenjivanja varijabla". U slučaju jednostrukog integrala ovaj problem nije posebno složen (v. Teoreme 4.2.4 i 4.2.5). Međutim, za višestruki integral rješenje ove zadaće nije nimalo jednostavno. Potpuni dokaz zahtijeva šire i dublje predznanje, koji nije predviđeno danim studijskim programom. Ipak, radi praktične koristi, iskazat ćemo pripadni teorem navodeći i neke posebno važne zamjene u slučajevima $m = 2$ i $m = 3$. (O diferencijabilnosti vektorske funkcije v. §6.1)

Teorem 5.3.5 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^m$, a*

$$\Phi = (\phi_1, \cdots, \phi_m) : X \to \Phi(X) \equiv Y \subset \mathbb{R}^m$$

neka je diferencijabilna bijekcija s diferencijabilnim inverzom

$$\Phi^{-1} \equiv \Psi = (\psi_1, \cdots, \psi_m) : Y \to X.$$

Tada je

$$\int\limits_X \cdots \int f(x^1, \cdots, x^m)dx^1 \cdots dx^m =$$

$$\int\limits_Y \cdots \int (f \circ \Psi)(y^1, \cdots y^m) \cdot \left|\tfrac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}\right| dy^1 \cdots dy^m.$$

U slučajevima $m = 2$ i $m = 3$ obično pišemo

$$\iint\limits_X f(x,y)dxdy = \iint\limits_Y (f \circ (\phi, \psi))(u,v) \cdot \left|\tfrac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv \quad \text{i}$$

$$\iiint\limits_X f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_Y (f \circ (\phi, \psi, \chi))(u,v,w) \cdot \left|\tfrac{\partial(\phi,\psi,\chi)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

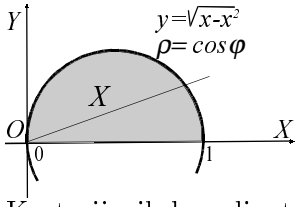
U praksi se, u slučaju $m = 2$, često javlja potreba da se pravokutne Kartezijeve koordinate (varijable) x, y zamijene polarnim koordinatama $u \equiv \rho, v \equiv \varphi$ (v. §2.3.5). Tada za determinantu pripadne Jacobijeve matrice dobivamo ($x = \phi(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi$, $y = \psi(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi$)

$$|\tfrac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho} & \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Prema tomu,

$$\iint\limits_X f(x,y)dxdy = \iint\limits_Y f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho d\rho d\varphi.$$

Primjer 5.3.4 Izračunajmo integral $\iint\limits_X \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, pri čemu je X polukrug u I. kvadrantu određen kružnicom $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ (v. crtež).



Zamjenom Kartezijevih koordinata polarnima, integracijsko područje

$$X \ldots \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt{x-x^2} \end{cases}$$

postaje integracijskim područjem

$$Y \ldots \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le \cos\varphi \end{cases}.$$

Slijedi,

$$\iint\limits_X \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_Y \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\cdot\rho d\rho d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\int\limits_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho)d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}.$$

U slučaju $m=3$ se često javlja potreba da se pravokutne Kartezijeve koordinate x,y,z zamijene cilindričnima $u\equiv\rho$, $v\equiv\varphi$, w, ili sfernima $u\equiv r$, $v\equiv\theta$, $w\equiv\varphi$ (v. §2.3.5). Budući da je

$$\begin{cases} x=\phi(\rho,\varphi,w)=\rho\cos\varphi, \\ y=\psi(\rho,\varphi,w)=\rho\sin\varphi, \\ z=\chi(\rho,\varphi,w)=w \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x=\phi(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=\psi(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=\chi(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta, \end{cases}$$

to su determinante pripadnih Jacobijevih matrica redom

$$|\tfrac{\partial(\phi,\psi,\chi)}{\partial(\rho,\varphi,w)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} & \frac{\partial\phi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho} & \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial\rho} & \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \quad \text{i}$$

$$|\tfrac{\partial(\phi,\psi,\chi)}{\partial(r,\theta,\varphi)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial\theta} & \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\chi}{\partial r} & \frac{\partial\chi}{\partial\theta} & \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

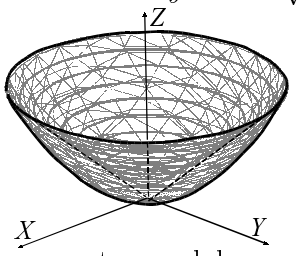
$= r^2\sin\theta.$

Tako dobivamo zamjenske formule

$$\iiint\limits_X f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_Y f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,w)\cdot\rho d\rho d\varphi dw \quad \text{i}$$

$$\iiint\limits_X f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_Y f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Primjer 5.3.5 Izračunajmo obujam geometrijskoga tijela $X \subset \mathbb{R}^3$ omeđenoga plohama $z = x^2 + y^2$ *i* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (v. crtež).



Uočimo da promatrane plohe prolaze ishodištem i da se sijeku uzduž jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$ u ravnini $z = 1$. Budući da između ravnina $z = 0$ i $z = 1$ vrijedi $x^2 + y^2 < \sqrt{x^2 + y^2}$, to je promatrano tijelo X određeno nejednadžbama $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$ i $-1 \leq x \leq 1$. Slijedi da se traženi obujam može izračunati po formuli

$$V(X) = \iiint\limits_X dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} \Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \Big) dy \Big) dx,$$

što zahtijeva poprilično tehničke spretnosti. Prijeđe li se, međutim, na cilindrične koordinate, integracijsko područje X postaje integracijskim područjem Y što ga određuju plohe $w = \rho^2$ i $w = \rho$, odnosno, nejednadžbe $\rho^2 \leq w \leq \rho$, $0 \leq \rho \leq 1$ i $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tako dobivamo

$$V(X) = \iiint\limits_Y \rho d\rho d\varphi dw = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\rho^2}^{\rho} dw \Big) \rho d\rho \Big) d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho \Big) d\varphi = \frac{1}{12} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Napomena 5.3.1 Slično nepravom integralu za funkcije jedne varijable, uvodi se i pojam *m-strukog nepravog integrala*, $m \geq 2$. Pritom nastupaju novi zanimljivi fenomeni o kojima ovdje ne ćemo raspravljati, a koji se dadu naslutiti iz primjera u pododjeljku 5.3.4, zadacima 8 i 9.

5.3.3 Integral ovisan o parametru

Ako podintegralna funkcija ima pored integracijskih varijabla i neku "slobodnu" varijablu (tzv. parametar), onda promatrani integral postaje funkcijom te varijable. Prirodno se nameću pitanja o uvjetima za obstojnost, neprekidnost i derivabilnost takve integralom zadane funkcije. Ovdje ćemo razmatrati najjednostavniji slučaj, tj. funkciju dviju varijabla od kojih će jedna biti slobodni parametar.

Definicija 5.3.3 *Neka je* $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ *funkcija, pri čemu je* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Funkciju*

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(p) = \int\limits_a^b f(x, p) dx,$$

(*ako postoji*) *nazivamo* ***integralom ovisnim o parametru.***

Primjer 5.3.6 Istražimo postoji li $\int\limits_0^1 e^{px}dx$ kao integral ovisan o parametru i, ako jest, je li neprekidan.
Očito je

$$\int\limits_0^1 e^{px}dx = [\tfrac{e^{px}}{p}]_0^1 = \tfrac{e^p-1}{p} \quad \text{čim je } p \neq 0 \quad \text{i}$$

$$\int\limits_0^1 e^{px}dx = \int\limits_0^1 dx = 1 \quad \text{čim je } p = 0.$$

Prema tomu, promatrani integral definira funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(p) = \int\limits_0^1 e^{px}dx = \begin{cases} \frac{e^p-1}{p}, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases}.$$

Razvidno je da je F neprekidna u svakoj točki $p \neq 0$. Budući da je

$$\lim_0 F = \lim_{p\to 0} \tfrac{e^p-1}{p} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{p\to 0} \tfrac{e^p}{1} = 1,$$

to je F neprekidna i u 0. Dakle, funkcija F jest neprekidna.

Primijetimo da smo u ovomu primjeru izravno i eksplicitno izračunali dani integral pa onda odgovorili na postavljena pitanja. To, dakako, nije uvijek moguće. Stoga o obstojnosti i možebitnim dobrim svojstvima integrala ovisnog o parametru treba znati zaključiti iz svojstava podintegralne funkcije.

Teorem 5.3.6 *Ako je funkcija $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ neprekidna i $I \subseteq \mathbb{R}$ segment, onda funkcija*

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(p) = \int\limits_a^b f(x,p)dx,$$

postoji i neprekidna je.

Dokaz. Budući da je funkcija f neprekidna, ona je i integrabilna (v. Teorem 5.3.1), što povlači da funkcija F postoji. Neka je $p_0 \in I \equiv [c,d]$ bilo koja točka i $\epsilon > 0$ bilo koji broj. Lako je dokazati da iz neprekidnosti funkcije f na pravokutniku $[a,b] \times [c,d] \equiv P$ slijedi njezina *jednolika neprekidnost*, tj. da postoji $\delta > 0$ takav da, za svake dvije točke $(x_1,p_1),(x_2,p_2) \in P$, vrijedi:

$$d((x_1,p_1),(x_2,p_2)) < \delta \Rightarrow d(f(x_1,p_1),f(x_2,p_2)) < \epsilon, \quad \text{odnosno,}$$

$$(x_1-x_2)^2 + (p_1-p_2)^2 < \delta \Rightarrow |f(x_1,p_1) - f(x_2,p_2)| < \epsilon.$$

Procjenjujući funkcijin prirast u točki $p = p_0 + dp$ dobivamo

$$|\Delta F(p)| = |F(p_0+dp) - F(p_0)| = |\int\limits_a^b f(x,p_0+dp)dx - \int\limits_a^b f(x,p_0)dx| =$$

$$|\int\limits_a^b (f(x,p_0+dp) - f(x,p_0))dx| \leq \int\limits_a^b |f(x,p_0+dp) - f(x,p_0)|dx.$$

Za $x_2 = x_1 = x$, $p_2 = p_0$ i $p_1 = p_0 + dp$, pri čemu je $|p - p_0| = |dp| < \delta$, slijedi

$$|\Delta F(p)| < \int\limits_a^b \epsilon dx = \epsilon(b-a).$$

Prema tomu, prirast $\Delta F(p)$ se može načiniti po volji malim pa je funkcja F neprekidna (v. Teorem 3.3.7). ■

Sljedeći korolar je izravna posljedica upravo dokazanoga teorema.

Korolar 5.3.1 *Pod uvjetima u Teoremu 5.3.6 je*

$$\lim_{p_0} F = \lim_{p\to p_0} \int_a^b f(x,p)dx = \int_a^b \lim_{p\to p_0} f(x,p)dx.$$

O derivabinosti integrala ovisnog o parametru govori ovaj teorem:

Teorem 5.3.7 (Leibnizovo pravilo) *Ako preslikavanje $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ segment, ima neprkidnu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial p}$, onda je pripadni integral ovisan o parametru p neprekidno derivabilan i*

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_a^b f(x,p)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dx.$$

Dokaz. Po Teoremu 5.3.6, postoji preslikavanje

$$G : I \equiv [c,d] \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

Nadalje, po Teoremu 4.3.4, postoji derivabilna funkcija

$$H : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad H(p) = \int_c^p G(t)dt.$$

Primijetimo da je (v. Teorem 5.3.1)

$$H(p) = \int_c^p G(t)dt = \int_c^p (\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx)dt = \int_a^b (\int_c^p \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt)dx =$$

$$\int_a^b (f(x,p) - f(x,c))dx = F(p) - F(c),$$

pa je i funkcija F derivabilna i pritom je

$$F'(p) = H'(p) = \frac{d}{dp}\int_a^p G(t)dt = G(p) = \int_a^b \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dx. \quad ■$$

Integral ovisan o parametru može se poopćiti tako da mu i granice budu varijabilne, tj. da ovise o promatranom parametru. U tomu slučaju vrijedi ovaj teoremo:

Teorem 5.3.8 (Poopćeno Leibnizovo pravilo) *Neka je funkcija $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ parcijalno derivabilna po $p \in [c,d]$ i neka su funkcije $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ derivabilne. Ako su funkcije $\frac{\partial f}{\partial p}$, α' i β' neprekidne, onda je integral ovisan o parametru*

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(p) = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(x,p)dx,$$

neprekidno derivabilan i pritom je

$$F'(p) = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dx + f(\beta(p),p)\beta'(p) - f(\alpha(p),p)\alpha'(p).$$

Dokaz. Primijetimo da je funkcija F kompozicija i to $p \mapsto F(p) \equiv \Phi(p, \alpha(p), \beta(p))$. Služeći se pravilom za deriviranje funkcijske kompozicije dobivamo ($u \equiv \alpha(p)$, $v \equiv \beta(p)$):

$$F'(p) = \frac{dF(p)}{dp} = \frac{\partial\Phi(p,u,v)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dp} + \frac{\partial\Phi(p,u,v)}{\partial u} \cdot \frac{d\alpha(p)}{dp} + \frac{\partial\Phi(p,u,v)}{\partial v} \cdot \frac{d\beta(p)}{dp}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} \int\limits_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(x,p)dx + \frac{\partial}{\partial u}(\int\limits_{u}^{v} f(x,p)dx)\alpha'(p) + \frac{\partial}{\partial v}(\int\limits_{u}^{v} f(x,p)dx)\beta'(p)$$

$$= \int\limits_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dx + f(\beta(p),p)\beta'(p) - f(\alpha(p),p)\alpha'(p). \quad \blacksquare$$

Po sličnosti s nepravim integralom, promotrimo i nepravi integral ovisan o parametru. Posebice nas zanima slučaj neomeđenog integracijskog područja, dakle,

$$F(p) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,p)dx, \quad \text{tj. } f : [a, \cdot\rangle \times I \to \mathbb{R},$$

jer se ostali mogu svesti na njega. Treba naglasiti da za njega, općenito, Teoremi 5.3.2 i 5.3.3 ne vrijede. Da bi vrijedile analogne tvrdnje, treba svojstvo što ćemo ga sada definirati.

Definicija 5.3.4 *Reći ćemo da nepravi integral ovisan o parametru,* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,p)dx$, ***jednoliko*** *(ili* ***uniformno****)* ***konvergira*** *(s obzirom na parametar $p \in I \subseteq \mathbb{R}$), ako konvergira za svaki p i ako vrijedi:*

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists c_0 \in \mathbb{R})(\forall p \in I)(\forall c \in \mathbb{R}) \quad c \geq c_0 \Rightarrow |\int\limits_{c}^{+\infty} f(x,p)dx| < \epsilon.$$

Primjer 5.3.7 Istražimo konvergira li jednoliko nepravi integral ovisan o parametru y : $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin xy}{x}dx, \quad y \geq 0.$

Budući da je $(\forall c > 0)(\forall x \in [c, \cdot\rangle)(\forall y \in \mathbb{R}) \quad |\frac{\sin xy}{x}| \leq \frac{1}{c}$, to je

$$|\int\limits_{c}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin xy}{x}dx| \leq |\int\limits_{c}^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{c}dx| = |\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} \frac{e^{-xy}}{c}dx| = \lim_{b\to+\infty}[\frac{e^{-xy}}{cy}]_c^b = \frac{e^{-cy}}{cy}.$$

Primijetimo da se, koliko god malen bio $\epsilon > 0$, može naći dostatno velik $c_0 > 0$ tako da, za svaki $y > 0$ i $c \geq c_0$, bude $\frac{e^{-cy}}{cy} < \epsilon$. Stoga promatrani integral jednoliko konvergira.

Sljedeća dva teorema su analogoni prethodnih teorema u slučaju nepravog integrala ovisnog o parametru. Njihove (lake) dokaze prepuštamo čitatelju za vježbu.

Teorem 5.3.9 *Neka je funkcija $f : [a, \cdot\rangle \times I \to \mathbb{R}$ neprekidna i neka nepravi integral $F(p) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,p)dx$, $p \in I$, jednoliko konvergira. Tada je pripadna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ neprekidna.*

Teorem 5.3.10 *Ako preslikavanje $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ ima neprkidnu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial p}$ i ako nepravi integral ovisan o parametru $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} dx$ jednoliko konvergira, onda je nepravi integral ovisan o parametru $F : I \to \mathbb{R}$, $F(p) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,p)dx$, neprekidno derivabilna funkcija i pritom je*

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int\limits_a^{+\infty} f(x,p)dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} dx.$$

Postoje mnogi kriteriji (dovoljni uvjeti) za jednoliku konvergenciju nepravog integrala ovisnog o parametru. Jedan od onih operativnijih, a lako dokazivih, jest ovaj:

Teorem 5.3.11 *Nepravi integral ovisan o parametru $\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)dx$ jednoliko konvergira (s obzirom na parametar $p \in I \subseteq \mathbb{R}$), ako postoji pozitivna funkcija $\phi : [a, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$ takva da je $|f(x,p)| \leq \phi(x)$, za svaki $(x,p) \in [a, \cdot\rangle \times I$, i ako nepravi integral $\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ konvergira.*

Primjer 5.3.8 Odredimo derivaciju *Poissonova integrala*

$$J(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(px)dx, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $(x,p) \mapsto f(x,p) = e^{-x^2} \cos px$ je neprekidna i derivabilna, a i njezina parcijalna derivacija $(x,p) \mapsto \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = -xe^{-x^2} \sin px$ je neprekidna. Osim toga, nepravi integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} dx = \int\limits_0^{+\infty} (-xe^{-x^2} \sin px)dx$$

jednoliko konvergira (v. Teorem 5.3.8), jer je, za svaki $x \geq 0$,

$$|-xe^{-x^2} \sin px| \leq xe^{-x^2} \quad \text{i} \quad \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \cdots = \tfrac{1}{2}.$$

Budući da je udovoljeno uvjetima u Teoremu 5.3.7, to je

$$J'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} dx = \int\limits_0^{+\infty} (-xe^{-x^2} \sin px)dx \overset{\text{parcijalno integriranje}}{=}$$

$$\lim_{b \to +\infty} [\tfrac{1}{2} e^{-x^2} \sin px]_0^b - \tfrac{p}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(px)dx = 0 - \tfrac{p}{2} J(p) = -\frac{pJ(p)}{2}.$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu (v. §7.2.1)

$$\frac{dJ(p)}{J(p)} = -\tfrac{1}{2} p dp$$

rješenje koje daje traženi $J(p)$ da na pribrojnu konstantu. Ta se konstanta izračuna iz uvjeta

$$J(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \cdots = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Ovaj se nepravi integral može izračunati dosjetkom kako slijedi:

$$(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx)^2 = (\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx)(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy) = \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx)dy;$$

sada se koordinate (x, y) zamijene polarnima (ρ, φ) i provede laki završni račun s pripadnim graničnim prijelazom.) Prema tomu,

$$\int \frac{dJ(p)}{J(p)} = -\frac{1}{2}\int p dp \Longrightarrow \ln|J(p)| = -\frac{p^2}{4} + \ln|C|, \quad C = J(0).$$

Slijedi,

$$J(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{p^2}{4}}, \quad \text{dakle,} \quad J'(p) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}pe^{-\frac{p^2}{4}}.$$

5.3.4 Vježbe

1. Izračunati integral $\iint\limits_X (-x+y+1)dxdy$, gdje je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ omeđen krivuljama $y = -x^2 + 4$ i $y = 4x^2 - 1$, primijenjujući obje varijante Fubinijeva teorema.

2. Odrediti integracijske međe u integralu $J = \iint\limits_X f(x, y)dxdy$, pri čemu je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ skup svih rješenja nejednadžbe $|x| + |y| \leq 1$.

[Rješenje: $J = \int_{-1}^{0}(\int_{-x-1}^{x+1} f(x, y)dy)dx + \int_0^1(\int_{x-1}^{-x+1} f(x, y)dy)dx$.]

3. Izmijeniti integracijski redosljed (po varijablama) u integralu

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\cos u} g(u, v)dv)du,$$

ako su u i v:

(a) pravokutne Kartezijeve koordinate $u = x$ i $v = y$;

(b) polarne koordinate $u = \varphi$ i $v = \rho$.

[Rješenje:

(a) $J = \int_0^1(\int_{\arccos(-v)-\pi}^{\arccos v} g(u, v)du)dv$; (b) $J = \int_0^1(\int_{-\arccos v}^{\arccos v} g(u, v)du)dv$.]

4. Izračunati obujam geometrijskoga tijela omeđenoga plohama $x^2+y^2-9 = 0$ i $x^2 + z^2 - 9 = 0$. [Rješenje: $V = 144$ (jed.^{3}).]

5. Izračunati masu fizičkoga tijela omeđenoga plohama $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, ako mu je gustoća zadana funkcijom $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$ (kg·jed.$^{-3}$). [Rješenje: $m = \frac{124\pi}{15}$ (kg).]

6. Derivirati funkciju $p \mapsto F(p) = \int_0^p e^{-x^2p^3} \cdot \frac{dx}{x}$.

[Rješenje: $F'(p) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-e^{-p^5}}{p}$.]

7. Izračunati integral: (a) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan px}{x(x^2+1)}dx$; (b) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot \frac{\sin px}{x}dx$.

[Uputa: Primijeniti deriviranje po parametru. Rješenje: (a) $\frac{\pi}{2}\ln(1 + p)$; (b) $\arctan\frac{2}{p}$.]

8. Funkcija $f : [0, 1] \times [0, 1] \equiv K \to \mathbb{R}$ je zadana pravilom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Dokazati da funkcija f nije omeđena te da *ne* postoji pripadni nepravi integral na K, iako je

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{K_\epsilon} f(x,y)dxdy = 0, \quad K_\epsilon = K \setminus [0,\epsilon]\times[0,\epsilon].$$

Posebice, izravnim računom potvrditi da je

$$\lim_{\epsilon_1\to 0}\int_{\epsilon_1}^{1}(\lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{\epsilon_2}^{1} f(x,y)dy)dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{i} \quad \lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{\epsilon_2}^{1}(\lim_{\epsilon_1\to 0}\int_{\epsilon_1}^{1} f(x,y)dx)dy = -\frac{\pi}{4}.$$

9. Provjeriti i raspraviti ove račune:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}(\int_{0}^{1}\frac{x^5-2x^3y}{y^4}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dx)dy = -\frac{1}{e};\ \int_{0}^{1}(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\frac{x^5-2x^3y}{y^4}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dy)dx = -\frac{1}{e}+\frac{1}{2}.$$

10. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, integrabilna funkcija. Dokazati da je $|\int_X f| \leq \int_X |f|$. [Uputa: Primijeniti integralovu monotonost na $-|f| \leq f \leq |f|$.]

Poglavlje 6

UVOD U VEKTORSKU ANALIZU

6.1 VEKTORSKE FUNKCIJE

Ovdje ćemo promatrati funkcije iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. S obzirom na prethodna razmatranja, poopćuje se, dakle, funkcijska kodomena s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tj. i funkcijske vrijednosti će biti vektori. Utoliko će i istraživanje pripadnih svojstava (neprekidnost, diferencijabilnost, integrabilnost) biti složenije. S druge strane, budući da prostor $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ne dopušta prirodni uređaj, otpada pitanje o ekstremnim vrijednostima ovih funkcija. Najvažniji slučaj, jer se u njemu opisuje naš fizički (tvarni) svijet, bit će $n = 3$ koordinatiziran desnim ortonormiranim Kartezijevim sustavom $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ (v. §2.2). I općenito ($n \geq 4$) ćemo pretpostavljati da je u $\mathbb{R}^n$ zadan desni ortonormirani Kartezijev sustav $(O; \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$.

6.1.1 Neprekidnost vektorske funkcije

Pod vektorskom funkcijom bismo, općenito, mogli smatrati svaku funkciju kojoj je vrijednosno područje bilo koji podskup vektorskog prostora. Ovdje ćemo promatrati samo one kojima je definicijsko područje $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i vrijednosno područje $\mathbb{R}^n$.

Definicija 6.1.1 *Za bilo koju funkciju $w : X \to \mathbb{R}^n$, pri čemu su $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $n \geq 2$, kažemo da je* ***vektorska funkcija****.*

Budući da je, za svaki $x = (x^1, \cdots, x^m) \in X$, vrijednost $w(x) \equiv y = (y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, to vektorska funkcija w definira n skalarnih funkcija $w_1, \cdots, w_n : X \to \mathbb{R}$ pravilom $w_j(x) = y^j$ za svaki $j = 1, \cdots, n$. Vrijedi i obratno, svaka uređeni n-slog $(w_1, \cdots, w_n)$ skalarnih funkcija $w_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$, određuje jedinstvenu vektorsku funkciju $w : X \to \mathbb{R}^n$ pravilom $w(x) = (w_1(x), \cdots, w_n(x))$. Stoga je prirodno poistovjetiti

$w \equiv (w_1, \cdots, w_n)$. Pritom govorimo da su w_j, $j = 1, \cdots, n$, **koordinatne funkcije** od w. U slučaju $n = 3$ (i slično za $n = 2$) često ćemo rabiti i uobičajeni vektorski zapis $w(x) = w_1(x)\boldsymbol{i} + w_2(x)\boldsymbol{j} + w_3(x)\boldsymbol{k}$.

Definicija 6.1.2 *Reći ćemo da je vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$* ***granična vrijednost*** *(ili* ***limes****) vektorske funkcije $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$,* ***u točki*** *$x_0 \in \mathbb{R}^m$, ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \setminus \{x_0\}) \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(w(x), y_0) < \epsilon.$$

Ovo ćemo, kao i do sada, kraće zapisivati: $\lim\limits_{x_0} w = y_0$ ili $\lim\limits_{x \to x_0} w(x) = y_0$.

Razvidno je, kao i za skalarne funkcije, da granična vrijednost ima puni smisao samo u gomilištima i neizoliranim točkama skupa X. Osim toga, budući da je ovdje udaljenost definirana vektorskom normom, to se definicijaska implikacija smije zapisati i ovako:

$$\|x - x_0\| = (\sum_{i=1}^{m} (x^i - x_0^i)^2)^{\frac{1}{2}} < \delta \Rightarrow \|w(x) - y_0\| = (\sum_{j=1}^{n} (w_j(x) - y_0^j)^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Pomoću toga se lako dokazuje ova činjenica:

$$\lim_{x_0} w = y_0 \Leftrightarrow (\lim_{x_0} w_j = y_0^j, \quad j = 1, \cdots, n).$$

Napokon, po uzoru na skalarne funkcije, mogu se definirati granične vrijednosti vektorske funkcije kad barem jedna koordinata $x^i \to +\infty$ $(-\infty)$.

Definicija 6.1.3 *Reći ćemo da je vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$,* ***neprekidna u točki*** *$x_0 \in X$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(w(x), w(x_0)) < \epsilon.$$

Ako je vektorska funkcija w neprekidna u svakoj točki $x \in A \subseteq X$, onda kažemo da je w ***neprekidna na skupu*** *A. U slučaju $A = X$ govorimo o* ***neprekidnoj*** *vektorskoj funkciji w.*

U praksi je vrlo korisno da se neprekidnost vektorske funkcije svodi na neprekidnost njezinih koordinatnih funkcija. O tomu govori sljedeći teorem:

Teorem 6.1.1 *Vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je neprekidna (u točki x_0) onda i samo onda, ako su sve njezine koordinatne funkcije $w_1, \cdots, w_n : X \to \mathbb{R}$ neprekidne (u točki x_0).*

Dokaz. Slijedi izravno iz Definicije 6.1.3 i Definicije 5.1.5. ■

Kao i za skalarnu funkciju, neprekidnost vektorske funkcije u neizoliranoj točki moguće je opisati pomoću pripadne granične vrijednosti.

Teorem 6.1.2 *Vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je neprekidna u neizoliranoj točki $x_0 \in X$ onda i samo onda, ako je $\lim\limits_{x_0} w = w(x_0)$.*

Dokaz. Očito slijedi iz Definicija 6.1.2 i 6.1.3. ■

Primjer 6.1.1 Istražimo (ne)prekidnost vektorske funkcije $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$w(x) = \begin{cases} (x-1)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{k}, & x < 1 \\ (\ln x)\boldsymbol{j} + (1-x^2)\boldsymbol{k}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Razvidno je da su pripadne koordinatne funkcije

$$w_1(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \; w_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases},$$

$$w_3(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 1-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

neprekidne u svakoj točki $x \neq 1$. Po Teoremu 6.1.1 je i funkcija w neprekidna u svakoj točki $x \neq 1$. Nadalje,

$$(w_1(1), w_2(1), w_3(1)) = (0,0,0) = w(1).$$

Budući da je

$$\lim_{x\to 1-0} w_1(x) = 0 = \lim_{x\to 1+0} w_1(x) = w_1(1), \quad \text{tj.} \quad \lim_1 w_1 = w_1(1),$$

to je funkcija w_1 neprekidna u točki $x = 1$. Slično se pokazuje da je $\lim_1 w_2 = w_2(1)$ pa je i koordinatna funkcija w_2 neprekidna u točki $x = 1$. Međutim,

$$\lim_{x\to 1-0} w_3(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1+0} w_3(x) = w_3(1),$$

pa funkcije w_3 nema granične vrijednosti u točki $x = 1$. Budući da se radi o neizoliranoj točki ($\mathbb{R}$ nema izoliranih točaka), to je koordinatna funkcija w_3 prekidna u toj točki. Po Teoremu 6.1.1 je i vektorska funkcija w prekidna (samo) u točki $x = 1$.

6.1.2 Diferencijabilnost vektorske funkcije

Diferencijabilnost se prirodno poopćuje sa skalarnih na vektorske funkcije (v. Definicije 4.1.2 i 5.2.1).

Definicija 6.1.4 *Reći ćemo da je vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$,* ***diferencijabilna u točki*** *$x_0 \in X$, ako postoji linearni operator $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ takav da je*

$$w(x) - w(x_0) = A(x - x_0) + r(x - x_0),$$

pri čemu za funkciju $x - x_0 \mapsto r(x - x_0) \in \mathbb{R}^n$ mora vrijediti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

("ostatak" $r(x - x_0)$ teži k nulvektoru bitno brže od $x - x_0$).
Reći ćemo da je funkcija w ***diferencijabilna****, ako je diferencijabilna u svakoj točki $x \in X$.*

Slično slučaju skalarne funkcije, pokazuje se da je linearni operator A u Definiciji 6.1.4 jedinstven (čim postoji). Stoga ga se posebno označuje kao $A \equiv dw(x_0)$ i naziva **diferencijalom** funkcije w **u točki** x_0. Primijetimo da diferencijabilnost od w u x_0 znači

$$\lim_{x\to x_0} \frac{w(x)-w(x_0)-A(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0 \quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R}^n) \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\|r(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R})\right).$$

Primjer 6.1.2 (a) Svaka konstantna vektorska funkcija $w \equiv c_v : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren, u bilo koji vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto c_v(x) = v$, je diferencijabilna i diferencijal u svakoj točki joj je nuloperator, tj. $df(x) = O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, za svaki $x \in X$. (Pritom je i r konstantna nulfunkcija!). Naime, definicijska jednakost ovdje postaje $v - v = A(x - x_0) + r(x - x_0)$ pa uvjet o graničnoj vrijednosti povlači rečeni zaključak.

(b) Neka je $w : X \to \mathbb{R}^n$ suženje $W|_X$ linearnog operatora $W : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ na otvoreni podskup $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Tada je funkcija w diferencijabilna i $dw(x) = W$ u svakoj točki $x \in X$.

Odredimo zapis (matricu) (a_{ji}) linearnog operatora $A \equiv dw(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ polazeći od para kanonskih baza $(\boldsymbol{e}_i), (\boldsymbol{e}_j)$ tih prostora. Budući da je $w = (w_1, \cdots, w_n)$, to je njezina diferencijabilnost u x_0, tj.

$w(x) - w(x_0) = dw(x_0)(dx) + r(dx)$ i

$\lim\limits_{dx \to 0} \frac{r(dx)}{\|dx\|} = 0$, $dx = x - x_0$,

ekvivalentna diferencijabilnosti svih pripadnih koordinatnih funkcija w_j u x_0, tj.

$w_j(x) - w_j(x_0) = dw_j(x_0)(dx) + r_j(dx)$ i

$\lim\limits_{dx \to 0} \frac{r_j(dx)}{\|dx\|} = 0$, $j = 1, \cdots, n$.

Budući da u traženomu zapisu mora j-ti redak od (a_{ji}) odgovarati zapisu linearnoga funkcionla (v.§5.2.2, (2)) $dw_j(x_0) = [\ \frac{\partial w_j(x_0)}{\partial x^1} \quad \cdots \quad \frac{\partial w_j(x_0)}{\partial x^m}\ ]$, to je

$$dw(x_0) \equiv (a_{ji}) = (\tfrac{\partial w_j(x_0)}{\partial x^i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial w_1(x_0)}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_n(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial w_n(x_0)}{\partial x^m} \end{bmatrix} \equiv \tfrac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}(x_0),$$

što je tzv. *Jacobijeva matrica* funkcije w u točki x_0. Njezine su vrijednosti vektori

$$dw(x_0)(dx) = (\sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial w_1(x_0)}{\partial x^i} dx^i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} \tfrac{\partial w_n(x_0)}{\partial x^i} dx^i),$$

pri čemu je (d^i) baza Hom-prostoru dualna bazi (e_i).

Nazivajući vektorsku funkciju w **derivabilnom** (**u točki** x_0) čim postoje sve parcijalne derivacije $\frac{\partial w_j}{\partial x^i}$ $(\frac{\partial w_j(x_0)}{\partial x^i})$, jasno je da diferencijabilnost povlači derivabilnost, ali ne i obratno.

Ne ulazeći u dokazivanje, napomenimo da za diferenciranje vektorskih funkcija vrijede sva pravila što smo ih bili izveli za skalarne funkcije, dakako, čim imaju smisla. Primjerice,

$d(w + u)(x_0) = dw(x_0) + du(x_0)$ (diferenciranje zbroja);

$d(w|u)(x_0) = (u(x_0)|dw(x_0)) + (w(x_0)|du(x_0))$ (diferenciranje skalarnog umnoška);

$d(u \circ w)(x_0) = du(w(x_0)) \circ du(x_0)$ (diferenciranje kompozicije).

Ovdje se ne ćemo upuštati u razmatranje o diferencijabilnosti i diferencijalima viših redova vektorske funkcije, nego ćemo se još malo zadržati na

najjednostavnijem slučaju vektorske funkcije - onomu kad joj je varijabla *skalar* (broj) $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, tj. slučaju $m = 1$ i $n \geq 2$. Pokazat će se da se ovdje nasljeđuju sve važne činjenice što smo ih dokazali za realne funkcije jedne varijable (v. §§4.1 - 4.3). Primjerice, diferencijabilnost (v. Definiciju 6.1.4) je ekvivalentna derivabilnosti, koju se može "redefinirati" kako slijedi:

Korolar 6.1.1 *Vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je derivabilna u točki $x_0 \in X$ onda i samo onda, ako vektorska funkcija*

$$\hat{w} : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n, \quad \hat{w}(x) = \frac{w(x)-w(x_0)}{x-x_0},$$

ima graničnu vrijednost $\lim\limits_{x_0} \hat{w}$ u točki x_0.

(*Pripadni vektor označujemo s $w'(x_0)$, tj.* $\lim\limits_{x_0} w = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{w(x)-w(x_0)}{x-x_0} \equiv w'(x_0)$, *i nazivamo* ***derivacijom*** *vektorske funkcije w* ***u točki*** x_0.)

Dokaz. Rabeći koordinatni zapis $w = (w_1, \cdots, w_n)$, pri čemu je sada svaki $w_j : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcija jedne varijable, očito je (v. i Definiciju 6.1.2) da je funkcija w derivabilna u točki x_0 onda i samo onda, ako su u x_0 derivabilne sve njezine koordinatne funkcije $w_1, \cdots, w_n$. Pritom je $w'(x_0) = (w_1'(x_0), \cdots, w_n'(x_0))$.
(U slučaju $n = 3$ (i slično za $n = 2$) to ćemo zapisivati i kao
$w'(x_0) = w_1'(x_0)\boldsymbol{i} + w_2'(x_0)\boldsymbol{j} + w_3'(x_0)\boldsymbol{k}$.) ■

Razvidno je da je, za ovakve vektorske funkcije, $dw(x_0)dx \equiv dw(x) = w'(x_0)dx$. Ako je vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u svakoj točki $x \in X$, onda je dobro definirana funkcija (derivacija od w) $w' : X \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto w'(x)$. Jasno je i kako treba definirati **derivacije viših redova** i **više diferencijale**. Naime (usp. §4.1.3, (51) i (52)),

$w'' \overset{\text{def.}}{=} (w')', ..., w^{(n+1)} \overset{\text{def.}}{=} (w^{(n)})'$ te

$d^2w(x_0)dx \equiv d^2w(x) = w''(x)dx^2, ..., d^rw(x_0)dx \equiv d^rw(x) = w^{(r)}(x)dx^r$.

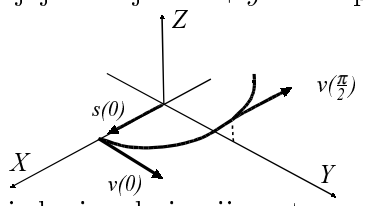
Primjer 6.1.3 Gibanje materijalne točke opisuje jednadžba

$s(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad t \in [0, \cdot\rangle$ (vrijeme).

Nacrtajmo njezinu putanju ("hodograf") i odredimo joj brzinu i ubrzanje u svakom trenutku. Posebice, izračunajmo joj brzinu i ubrzanje (pripadne vektore) kad je $t = 0$ *i* $t = \frac{\pi}{2}$.
Putanja te materijalne točke jest valjčana uzvojnica (cilindrična spirala)

$s(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$, $t \in t \in [0, \cdot\rangle$,

što se obavijajući valjak $x^2 + y^2 = 4$ "penje brzinom" $z = 3t$ (v. crtež).



Budući da je brzina derivacija puta po vremenu, to je

$v(t) = s'(t) = -2\sin t\boldsymbol{i} + 2\cos t\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $t \in [0, \cdot\rangle$.
Nadalje, derivirajući brzinu dobivamo ubrzanje, tj.
$a(t) = v'(t) = -2\cos t\boldsymbol{i} - 2\sin t\boldsymbol{j}$, $t \in [0, \cdot\rangle$.
Napokon, ako je $t = 0$ onda je $v(0) = 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ i $a(0) = -2\boldsymbol{i}$, a ako je $t = \frac{\pi}{2}$ onda je $v(\frac{\pi}{2}) = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$ i $a(\frac{\pi}{2}) = -2\boldsymbol{j}$.

Naredni teorem donosi derivacijska pravila za osnovne operacije nad vektorskim funkcijama skalarne varijable.

Teorem 6.1.3 *Neka su $w, u : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilne vektorske funkcije, $f : X \to \mathbb{R}$ derivabilna (skalarna) funkcija i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijede ova pravila:*
(i) $(\lambda w + \mu u)' = \lambda w' + \mu u'$;
(ii) $(fw)' = f'w + fw'$, *pri čemu je* $(fw)(x) = f(x)w(x)$;
(iii) $(\dfrac{w}{f})' = \dfrac{fw' - f'w}{f^2}$, *pri čemu je* $(\dfrac{w}{f})(x) = \dfrac{w(x)}{f(x)}$ *i* $f(x) \neq 0$;
(iv) $(w|u)' = (w'|u) + (w|u')$, *pri čemu je* $(w|u)(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j(x)u_j(x)$ *skalarni umnožak.*

U slučaju $n = 3$, za vektorski umnožak $w \times u$ (v. §2.2.3), *tj. za*

$$(w \times u)(x) = w(x) \times u(x) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \end{vmatrix},$$ *također vrijedi*

(v) $(w \times u)' = w' \times u + w \times u'$.

Dokaz. Sva navedena pravila proizlaze izravno iz pripadnih definicija, a dokazuju se posve slično onima za deriviranje realnih funkcija jedne varijable. Dokažimo npr. pravilo pod (v)!

$$(w \times u)'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{(w \times u)(x + dx) - (w \times u)(x)}{dx} =$$
$$\lim_{dx \to 0} \left(\frac{w(x + dx) - w(x)}{dx} \times u(x + dx) + w(x) \times \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx}\right) =$$
$$w'(x) \times u(x) + w(x) \times u'(x) = (w' \times u + w \times u')(x),$$

pri čemu smo iskoristili distributivnost, homogenost i *neprekidnost* vektorskoga množenja. ■

Primjer 6.1.4 Odredimo derivaciju vektorske funkcije $\omega : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}$, ako je $\omega = u \times (v \times w)$, pri čemu su $u, v, w : X \to \mathbb{R}^3$ derivabilne vektorske funkcije. Dobiveni ishod provjerimo na funkcijama $u(x) = (2x, 0, -3x^2)$, $v(x) = (x^3, 0, 2 + x^2)$ *i* $w(x) = (x, x^2, x^3)$.
Primijenimo (dvaput) Teorem 6.1.3(v):

$$\omega'(x) = (u \times (v \times w))'(x) = u'(x) \times (v \times w)(x) + u(x) \times (u \times v)'(x) =$$
$$u'(x) \times (v(x) \times w(x)) + u(x) \times (v'(x) \times w(x)) + u(x) \times (v(x) \times w'(x)).$$

Budući da je $u'(x) = (2, 0, -6x)$, $v'(x) = (3x^2, 0, 2x)$ *i* $w'(x) = (1, 2x, 3x^2)$ te

$$v(x) \times w(x) = (x^6 - x^4 - 2x^2, x^3 + 2x, -x^4),$$

$v'(x) \times w(x) = (3x^5 - 2x^3, 2x^2, -3x^3)$ i
$v(x) \times w'(x) = (3x^5 - 2x^3 - 4x, x^2 + 2, -x^3)$, to je
$u(x) \times (v(x) \times w(x)) = (3x^5 + 6x^3, -3x^8 + 3x^6 + 2x^5 + 6x^4, 2x^4 + 4x^2)$,
$u'(x) \times (v(x) \times w(x)) = (6x^4 + 12x^2, -6x^7 + 6x^5 + 2x^4 + 12x^3, 2x^3 + 4x)$,
$u(x) \times (v'(x) \times w(x)) = (6x^4, -9x^7 + 6x^5 + 6x^4, 4x^3)$, i
$u(x) \times (v(x) \times w'(x)) = (3x^4 + 6x^2, -9x^7 + 6x^5 + 2x^4 + 12x^3, 2x^3 + 4x)$.
Sada uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo:
$(u(x) \times (v(x) \times w(x)))' = (3x^5 + 6x^3, -3x^8 + 3x^6 + 2x^5 + 6x^4, 2x^4 + 4x^2)' =$
$(15x^4 + 18x^2, -24x^7 + 18x^5 + 10x^4 + 24x^3, 8x^3 + 8x)$, i
$u'(x) \times (v(x) \times w(x)) + u(x) \times (v'(x) \times w(x)) + u(x) \times (v(x) \times w'(x)) =$
$(6x^4 + 12x^2, -6x^7 + 6x^5 + 2x^4 + 12x^3, 2x^3 + 4x) + (6x^4, -9x^7 + 6x^5 + 6x^4, 4x^3)$
$+ (3x^4 + 6x^2, -9x^7 + 6x^5 + 2x^4 + 12x^3, 2x^3 + 4x) =$
$(15x^4 + 18x^2, -24x^7 + 18x^5 + 10x^4 + 24x^3, 8x^3 + 8x)$.

Razmotrimo sada derivaciju funkcijske kompozicije skalarne i vektorske funkcije. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna (skalarna) funkcija, a $w : Y \to \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ i $f[X] \subseteq Y$, derivabilna vektorska funkcija. Tada je dobro definirana kompozicija $wf : X \to \mathbb{R}^n$. Jednostavno je dokazati da pritom vrijedi analogon standardnoga teorema o derivaciji funkcijske kompozicije, tj.

$$(wf)'(x) = w'(f(x)) \cdot f'(x), \quad x \in X.$$

6.1.3 Integral vektorske funkcije jedne varijable

Na kraju, odjeljak ćemo dopuniti razmatranjem integrabilnosti vektorske funkcije realne varijable. Integral ovakve funkcije možemo definirati na standardni način, odnosno, pomoću pripadne primitivne funkcije i Newton-Leibnizove formule.

Definicija 6.1.5 *Vektorsku funkciju $W : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}$, nazivamo* ***primitivnom funkcijom*** *vektorske $w : X \to \mathbb{R}^n$, ako je $W'(x) = w(x)$ za svaki $x \in X$ osim, možda, u prebrojivo mnogo točaka od X.*

Po koordinatnim funkcijama zapisano to znači $W_j'(x) = w_j(x)$, $j = 1, \cdots, n$. Pritom govorimo da je vektorska funkcija (skalarne varijable) w **integrabilna**. U slučaju segmenta (ili intervala) $X = [a, b]$, (određeni) **integral vektorske funkcije** w definiramo kao vektor

$$\int_{[a,b]} w \equiv \int_a^b w(x)dx \overset{\text{def.}}{=} W(b) - W(a).$$

Po koordinatnim funkcijama $(w_1, \cdots, w_n) = w$ je, dakle,

$$\int_a^b w(x)dx = (\int_a^b w_1(x)dx, \cdots, \int_a^b w_n(x)dx).$$

Odatle neposredno slijede dobra svojstva integrala vektorske funkcije što ih donosi ovaj teorem:

Teorem 6.1.4 *Neka su $w, u : X \to \mathbb{R}^n$, $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, integrabilne vektorske funkcije, $f : X \to \mathbb{R}$ integrabilna (skalarna) funkcija, c konstantan vektor i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

(i) $\int\limits_a^b (\lambda w(x) + \mu u(x))dx = \lambda \int\limits_a^b w(x)dx + \mu \int\limits_a^b u(x)dx$ (linearnost);

(ii) $\int\limits_a^b (c|w(x))dx = (c|\int\limits_a^b w(x)dx)$ (linearnost za skalarni umnožak);

(iii) $\int\limits_a^b (w(x)|u'(x))dx = (w(b)|u(b)) - (w(a)|u(a)) - \int\limits_a^b (w'(x)|u(x))dx;$

(iv) $\int\limits_a^b f(x)w'(x))dx = f(b)w(b) - f(a)w(a)) - \int\limits_a^b f'(x)w(x)dx.$

((iii) i (iv) su formule za parcijalno integriranje redom skalarnoga umnoška vektorskih funkcija i umnoška realne i vektorske funkcije.)

Primjer 6.1.5 Ubrzanje materijalne točke (u $\mathbb{R}^3$) opisuje jednadžba $a(x) = 6x\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2$, $x \in [0, \cdot\rangle$ (vrijeme), pri čemu su $\boldsymbol{c}_1$ i $\boldsymbol{c}_2$ konstantni vektori. Otkrijmo zakon $x \mapsto s(x)$ po kojemu se giba ta točka, ako su početni uvjeti $s(0) = \mathbf{0}$ i $v(0) = \mathbf{0}$ (početna brzina).
Budući da je $v'(x) = a(x)$ *i* $s'(x) = v(x)$, to je

$$v(x) = \int\limits_0^x a(t)dt + v(0) = \int\limits_0^x (6t\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2)dt + \mathbf{0} = 3x^2\boldsymbol{c}_1 + 2x\boldsymbol{c}_2 \quad \text{i}$$

$$s(x) = \int\limits_0^x v(t)dt + s(0) = \int\limits_0^x (3t^2\boldsymbol{c}_1 + 2t\boldsymbol{c}_2)dt + \mathbf{0} = x^3\boldsymbol{c}_1 + x^2\boldsymbol{c}_2.$$

Primjer 6.1.6 Izračunajmo integral vektorske funkcije $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $w(x) = (3e^{-x}, \cos x, x)$, na segmentu $[0, \pi]$.

$$\int\limits_0^\pi w(x)dx = (\int\limits_0^\pi 3e^{-x}dx, \int\limits_0^\pi \cos x dx, \int\limits_0^\pi x dx) = ([-3e^{-x}]_0^\pi, [\sin]_0^\pi, [\tfrac{x^2}{2}]_0^\pi) =$$
$$(3(1 - e^{-\pi}), 0, \tfrac{\pi^2}{2}) = 3(1 - e^{-\pi})\boldsymbol{i} + \tfrac{\pi^2}{2}\boldsymbol{k}.$$

6.1.4 Vježbe

1. Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki x_0, a vektorska funkcija $w : Y \to \mathbb{R}^3$, $f[X] \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki $y_0 = f(x_0)$. Dokazati da je kompozicija $wf : X \to \mathbb{R}^3$ neprekidna u točki x_0.
2. Izračunati derivaciju vektorske funkcije $w : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$w(x) = \frac{\sin x\boldsymbol{i} + \cos x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\|2x\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k}\|}.$$

3. Neka je $w(x) = e^{ax}\boldsymbol{c}_1 + e^{-ax}\boldsymbol{c}_2$, $x \in \mathbb{R}$, pri čemu su $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ konstantni vektori i a realna konstanta. Provjeriti je li $w''(x) - a^2w(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.
4. Neka je $w : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ integrabilna vektorska funkcija. Dokazati da je

$$||\int\limits_a^b w(x)dx|| \leq \int\limits_a^b \|w(x)\|\, dx \quad \text{(usp. §5.3.5, Zadatak 10.).}$$

Dokaz. Prisjetimo se, prvo, *Cauchyjeve nejednakosti* koja tvrdi da je, za svaka dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, tj. (po koordinatama)

$$|\sum_{j=1}^{n} x^j y^j| \leq (\sum_{j=1}^{n} (x^j)^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=1}^{n} (x^j)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(Neka ju čitatelj sam dokaže za vježbu!) Posebice, $(x|x) = \|x\|^2$. Budući da je $w = (w_1, \cdots, w_n)$, pri čemu je svaka funkcija $w_j : [a, b] \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$, integrabilna, to je

$$||\int_a^b w(x)dx|| = ||(\int_a^b w_1(x)dx, \cdots, \int_a^b w_n(x)dx)|| = (\sum_{j=1}^{n} (\int_a^b w_j(x)dx)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sada, ako je $\int_a^b w(x)dx = 0$, tvrdnja je očito istinita.

Neka je $\int_a^b w(x)dx \equiv c \neq 0$. Tada je

$$||\int_a^b w(x)dx||^2 = (\int_a^b w(x)dx|\int_a^b w(x)dx) =$$

$$(c|\int_a^b w(x)dx) \overset{\text{T.6.1.4(ii)}}{=} \int_a^b (c|w(x))dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \|c\| \cdot \|w(x)\| \, dx = \|c\| \int_a^b \|w(x)\| \, dx.$$

Dijeljenjem te nejednakosti brojem $\|c\| > 0$ dobivamo onu traženu.

6.2 UVOD U TEORIJU O POLJIMA

U ovomu ćemo odjeljku, kao i u cijelomu poglavlju, pokazati nekoliko primjena skalarne i vektorske analize u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ovaj poseban slučaj je naročito važan jer se u njemu opisuje naš fizički (tvarni) svijet. Stoga ćemo nastojati, kad god to bude moguće, i oznake prilagoditi onima tradicionalnim što dolaze iz fizike.

6.2.1 Skalarno i vektorsko polje

Za svaku točku T u prostoru $\mathbb{E}$ neka $\mathbb{V}(T)$ označuje skup svih radijus-vektora $\boldsymbol{r}_P$ (usmjerenih dužina $\overrightarrow{TP}$) svih točaka P u prostoru $\mathbb{E}$ s obzirom na točku T (v. §2.2.1), te neka je $\mathbb{V} \equiv \bigcup\{\mathbb{V}(T) \mid T$ točka u $\mathbb{E}\}$.

Definicija 6.2.1 *Svaku funkciju $U : \Omega \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***skalarnim poljem****, a svaku funkciju $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{V}$ -* ***vektorskim poljem*** *na danom skupu Ω točaka u $\mathbb{E}$.*

Drugim riječima, na točkovnom skupu Ω je zadano skalarno (vektorsko) polje čim je svakoj točki $T \in \Omega$ pridijeljen točno jedan broj $U(T) \in \mathbb{R}$ (radijus-vektor $\boldsymbol{V}(T) = \boldsymbol{r}_P \in \mathbb{V}(T)$). Primijetimo da Definicija 6.2.1 ne ovisi o koordinatizaciji prostora $\mathbb{E}$. Međutim, razvidno je da je, u svakom

koordinatnom sustavu S u $\mathbb{E}$, svako skalarno polje $U : \Omega \to \mathbb{R}$ posve određeno nekom funkcijom $f : X \equiv \Omega_{\mathsf{S}} \to \mathbb{R}$, $\Omega_{\mathsf{S}} \subseteq \mathbb{E}_{\mathsf{S}}$, $f(T_{\mathsf{S}}) = U(T)$ (indeks podsjeća na uvedeni koordinatni sustav). Slično vrijedi za svako vektorsko polje. Primjerice, uvedemo li u prostor $\mathbb{E}$ Kartezijev desni pravokutni koordinatni sustav $\mathsf{S} = (O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, prostor $\mathbb{E}$ se identificira s $\mathbb{R}^3$ pa se svako skalarno polje $U : \Omega \to \mathbb{R}$ opisuje nekom (skalarnom) funkcijom $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = U(T)$, a svako vektorsko polje $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{V}$ nekom (vektorskom) funkcijom $w : X \to \mathbb{R}^3$, $w(x, y, z) = \boldsymbol{V}(T)$, pri čemu su x, y i z koordinate točke $T \in \Omega$ u sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, tj. $T \equiv (x, y, z) \in X \subseteq \mathbb{R}^3$. Pritom je, dakle,

$$\boldsymbol{V}(T) = w_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + w_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + w_z(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

gdje su $w_x, w_y, w_z : X \to \mathbb{R}$ koordinatne funkcije od w, tj. $w = (w_x, w_y, w_z)$. Ponekad ne ćemo, jednostavnosti radi, praviti strogu jezičnu razliku između "polja" i "funkcije". Osim toga, najčešće ne ćemo međusobno formalno razlikovati ni skupove $\mathbb{V}(T)$, $T \in \Omega$, nego ćemo svakoga od njih poistovjetiti s $\mathbb{V}(O)$, gdje će O biti ishodište Kartezijeva desnog pravokutnog sustava $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Primjer 6.2.1 (a) Neka Ω predstavlja neku visoku peć kao točkovni skup, te neka je, za svaki $T \in \Omega$, $U(T)$ temperatura (u odabranom trenutku) one tvari kojoj ta točka (kao tvarna točka) pripada. Tada je $U : \Omega \to \mathbb{R}$ temperaturno (skalarno) polje tvari u promatranoj visokoj peći u odabranom času;

(b) Neka je Ω Zemljina kruta površina zamišljena kao točkovni skup, te neka je, za svaki $T \in \Omega$, $U(T)$ nadmorska visina, odnosno, podmorska dubina te točke (s obzirom na dogovorenu nultu plimnu razinu). Tada je $U : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarno polje - "reljefni globus";

(c) Neka je $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2}$. Tada je funkcijom

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z),$$

na pripadnom području posve zadano skalarno polje $T \mapsto U(T) = \frac{z}{x^2+y^2}$, pri čemu su x, y, i z Kartezijeve koordinate točke T u odabranom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$

Primjer 6.2.2 (a) Neka Ω predstavlja Zemljin zračni omotač kao točkovni skup, te neka je, za svaki $T \in \Omega$, $\boldsymbol{V}(T)$ brzina zračnoga strujanja u toj točki (vjetrovni vektor) u odabranom trenutku. Tada je $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{V}$ vektorsko polje brzine vjetrova u atmosferi u odabranom času;

(b) Neka je $\Omega = \overset{\frown}{\Gamma}$ usmjerena glatka prostorna krivulja (v. §6.3) zamišljena kao točkovni skup, te neka je, za svaki $T \in \overset{\frown}{\Gamma}$, $\boldsymbol{V}(T) = \boldsymbol{t}_0(T)$ jedinični tangencijalni vektor u točki T na $\overset{\frown}{\Gamma}$. Tada je $\boldsymbol{V} : \overset{\frown}{\Gamma} \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje jediničnih tangencijalnih vektora usmjerene glatke krivulje $\overset{\frown}{\Gamma}$;

(c) Neka je vektorska funkcija $w : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ zadana koordinatnim funkcijama

$$w_x(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \; w_y(x, y, z) = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \text{ i } w_z(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Tada je na $\Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ zadano vektorsko polje

$$T \mapsto \boldsymbol{V}(T) = \quad w(x,y,z) = w_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + w_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + w_z(x,y,z)\boldsymbol{k} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{x^2+y^2+z^2},$$

pri čemu su x, y i z Kartezijeve koordinate točke T u odabranomu sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. (Primijetimo da se radi o polju svih jediničnih radijus-vektora,

$$T \mapsto r_0(T) = \frac{\overrightarrow{OT}}{\|\overrightarrow{OT}\|}, \quad T \neq O = (0,0,0),$$

s obzirom na dano ishodište O.)

Promatrajmo skalarno polje $U : \Omega \to \mathbb{R}$. Kao i u §5.1.1, uvjet $U(T) = c$ (konstanta) određuje tzv. razinsku ili **ekvipotencijalnu plohu** skalarnoga polja U. Ako je Ω točkovni (pod)skup neke plohe, uvjet $U(T) = c$ određuje tzv. **ekvipotencijalnu krivulju** skalarnoga polja U. Jednako govorimo u slučaju skalarnog polja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ($X \subseteq \mathbb{R}^2$). Tako u Primjeru 6.2.1(a) dobivamo *izotermalne plohe*, u 6.2.1(b) - krivulje *izobare* i *izohipse*, a u 6.2.1(c) - rotacijske paraboloide $z = c(x^2 + y^2)$, $c \in \mathbb{R}$.

U vektorskom polju $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{V}$ je zanimljivo promatrati tzv. **strujnice** (**silnice** ili **vektorske linije**), što se definiraju kao krivulje kojima se tangente podudaraju s pravcima vektorskoga polja $\boldsymbol{V}$ u svakoj točki $T \in \Omega$. Prema tomu, ako je vektorsko polje $\boldsymbol{V}$ zadano funkcijom $w = (w_x, w_y, w_z)$, onda mu se strujnice određuju iz jednadžbe

$$\frac{dr}{dt} = cw, \quad c \in \mathbb{R},$$

pri čemu se traži $r = (x, y, z)$, tj. $r(t) = \phi(t)\boldsymbol{i}+\psi(t)\boldsymbol{j}+\chi(t)\boldsymbol{k}$. Obično se eliminacijom parametra t dobva sustav diferencijalnih jednadžaba (v. §7.2.5):

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}.$$

Tako se u Primjeru 6.2.3(b) za strujnice dobiva ista krivulja, a u 6.2.3(c) - dobivamo sustav $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, što daje $y = c_1 x$ i $z = c_2 x$, odnosno, $\frac{x}{1} = \frac{y}{c_1} = \frac{z}{c_2}$. Radi se, dakle o skupu svih pravaca u prostoru koji prolaze odabranim ishodištem $O = (0,0,0)$.

Napomena 6.2.1 Skalarno i vektorsko polje se mogu definirati općenitije u smislu da se uvede i ovisnost o vremenu. Takva polja nazivamo ***nestacionarnima***, za razliku od prije definiranih koja onda nazivamo ***stacionarnima***.

Mjerimo li tako u Primjeru 6.2.1(a) temperaturu tijekom nekog vremenskog intervala, dobivamo primjer nestacionarnoga skalarnog polja, dok su 6.2.1(b) i 6.2.1(c) primjeri stacionarnog skalarnog polja. Nadalje, mjerimo li u Primjeru 6.2.3(a) brzinu zračnoga strujanja tijekom nekog vremenskog intervala, dobivamo primjer nestacionarnoga vektorskog polja, dok su 6.2.3(b) i6.2.3(c) primjeri stacionarnog vektorskog polja. Spomenimo ovdje i dva u fizičkom svijetu najpoznatija stacionarna vektorska polja: *gravitacijsko polje* tvarne točke s masom m i *elektrostatsko polje* tvarne točke s pozitivnim nabojem e (v. Napomenu 6.2.6).

Definicija 6.2.2 *Reći ćemo da je skalarno polje $U : \Omega \to \mathbb{R}$* ***neprekidno*** (***diferencijabilno***) *ako je njegov predstavnik $f : X \to \mathbb{R}$, u provokutnom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, neprekidna (diferencijabilna) funkcija. Slično, reći ćemo da je vektorsko polje $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{V}$* ***neprekidno*** (***diferencijabilno***) *ako je pripadna vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^3$ neprekidna (diferencijabilna).*

Napomena 6.2.2 Primijetimo da prethodna definicija nije apriori korektna. Trebalo bi, naime, uz nju dokazati da su neprekidnost i derivabilnost invarijante s obzirom na izbor pravokutnog koordinatnog sustava u prostoru $\mathbb{E}$, odnosno, da ne ovise o izboru predstavljajuće funkcije. Imajući na umu namjenu ovih skripata, taj ćemo dokaz ispustiti.

6.2.2 Gradijent, divergencija i rotacija

Ovdje ćemo definirati tri linearna operatora, neophodna za matematičko opisivanje temeljnih fizičkih zakona tvarnoga svijeta u kojemu živimo. Otkrit ćemo da se, zapravo, radi o jednom operatoru djelovanje kojega se očituje na tri načina - ovisno o objektima na koje djeluje. Jednostavnosti radi, skalarna i vektorska polja ćemo odmah zadavati njihovim predstavnicima, tj. skalarnim i vektorskim funkcijama u Kartezijevu desnom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ u $\mathbb{E} \equiv \mathbb{R}^3$.

Definicija 6.2.3 *Neka su $f : X \to \mathbb{R}$ i $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, redom skalarno i vektorsko polje, te neka su oba diferencijabilna.* ***Gradijentom*** *skalarnoga polja f nazivamo vektorsko polje*

$\operatorname{grad} f : X \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, *tj.*

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\boldsymbol{k}, \quad (x,y,z) \in X.$

Divergencijom *vektorskoga polja $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ nazivamo skalarno polje*

$\operatorname{div} w : X \to \mathbb{R}$, $\operatorname{div} w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$, *tj.*

$\operatorname{div} w(x,y,z) = \frac{\partial w_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial w_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial w_z(x,y,z)}{\partial z}, \quad (x,y,z) \in X.$

Rotacijom *vektorskoga polja w nazivamo vektorsko polje*

$\operatorname{rot} w : X \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot} w = (\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}, \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y})$, *tj.*

$$\operatorname{rot} w(x,y,z) = (\frac{\partial w_z(x,y.z)}{\partial y} - \frac{\partial w_y(x,y,z)}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial w_x(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial w_z(x,y,z)}{\partial x})\boldsymbol{j} + \\ +(\frac{\partial w_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial w_x(x,y,z)}{\partial y})\boldsymbol{k}, \quad (x,y,z) \in X.$$

Primijetimo da $\operatorname{rot} w$ dopušta formalni zapis u determinantinu obliku:

$$\operatorname{rot} w = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Važnost upravo definiranih pojmova upoznat ćemo tijekom daljnjega izlaganja. Sada uočimo samo to da je gradijent neka funkcija definirana na skupu svih diferencijabilnih skalarnih polja s vrijednostima u skupu diferencijabilnih vektorskih polja, da je divergencija neka funkcija definirana

na skupu svih diferencijabilnih vektorskih polja s vrijednostima u skupu skalarnih polja, te da je rotacija neka funkcija definirana na skupu svih diferencijabilnih vektorskih polja s vrijednostima u istomu skupu. Važno je uočiti i to da rečeni funkcijski skupovi dopuštaju strukturu *realnog vektorskog prostora.*

Primjer 6.2.3 (a) Odredimo gradijent skalarnoga polja
$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = xy^2z^3$.
$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.
(b) Odredimo divergenciju vektorskoga polja
$(x, y, z) \mapsto w(x, y, z) = (2x, xy^2, xz^2)$.
$\operatorname{div} w(x, y, z) = (\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z})(x, y, z) = 2 + 2xy - 2xz$.
(c) Odredimo rotaciju vektroskoga polja w iz primjera (b).

$$\operatorname{rot} w(x, y, z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} (x, y, z) = \cdots = (0, z^2, y^2).$$

Sada ćemo pokazati da se gradijent, divergencija i rotacija mogu opisati samo jednim operatorom. Znakom ∇ (čitamo: nabla) označimo tzv. **Hamiltonov diferencijalni operator** - formalni vektor $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Ili, ekvivalentno,

$$\nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Gledamo li na ∇ kao na operator definiran na vektorskom prostoru svih diferencijabilnih skalarnih (vektorskih) polja, pojavljuju se, u svezi s Definicijom 6.2.3, sljedeće mogućnosti:
$\nabla(f) = \operatorname{grad} f$, (djelovanje operatora ∇ na skalrno polje f);
$(\nabla|w) = \operatorname{div} w$, (formalni skalarni umnožak ∇ i vektorskog polja w);
$\nabla \times w = \operatorname{rot} w$, (formalni vektorski umnožak ∇ i vektorskog polja w);
Važna je činjenica da je operator ∇ linearan u svakoj od navedenih interpretacija, tj. da vrijedi ovaj teorem:

Teorem 6.2.1 *Nabla je linearni operator, tj. za bilo koja dva diferencijabilna skalarna polja $f, g : X \to \mathbb{R}$, bilo koja dva diferencijabilna vektorska polja $w, u : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, i bilo koja dva broja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:*
(i) $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda\nabla(f) + \mu\nabla(g)$;
(ii) $(\nabla|(\lambda w + \mu u)) = \lambda(\nabla|w) + \mu(\nabla|u)$;
(iii) $\nabla \times (\lambda w + \mu u) = \lambda(\nabla \times w) + \mu(\nabla \times u)$.

Dokaz. Teorem 6.2.1 se dokazuje izravno i lako. Dokažimo npr. tvrdnju (iii)!

$$\nabla \times (\lambda w + \mu u) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda w_x + \mu u_x & \lambda w_y + \mu u_y & \lambda w_z + \mu u_z \end{vmatrix} \overset{\text{(v. §2.1.2)}}{=}$$

$$\lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \lambda(\nabla \times w) + \mu(\nabla \times u). \ \blacksquare$$

Tri iduća teorema donose, redom, važna svojstva gradijenta, divergencije i rotacije.

Teorem 6.2.2 *Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, diferencijabilna skalarna polja, c_r konstantno skalarno polje, $\phi : Y \to \mathbb{R}$, $f[X] \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, diferencijabilna funkcija i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je*

(i) $\operatorname{grad} c_r = c_{\mathbf{0}}$;

(ii) $\operatorname{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{grad} f + \mu \operatorname{grad} g$;

(iii) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$;

(iv) $\operatorname{grad}(\frac{f}{g}) = \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}$ *(čim je $g(x) \neq 0$)*;

(v) $\operatorname{grad}(\phi \circ f) = \phi' \operatorname{grad} f$.

Dokaz. Tvrdnje su izravna posljedica gradijentove definicije. Primijetimo da je tvrdnja (ii) isto što i Teorem 6.2.1(i). $\blacksquare$

Teorem 6.2.3 *Neka su $w, u : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, diferencijabilna vektorska polja, $f, g : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilna skalarna polja, c_v konstantno vektorsko polje i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je*

(i) $\operatorname{div} c_v = c_0$;

(ii) $\operatorname{div}(\lambda w + \mu u) = \lambda \operatorname{div} w + \mu \operatorname{div} u$;

(iii) $\operatorname{div}(w \times u) = (\operatorname{rot} w | u) - (w | \operatorname{rot} u)$;

(iv) $\operatorname{div}(f \cdot w) = (\operatorname{grad} f | w) + f \operatorname{div} w$;

(v) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} f) = (\operatorname{grad} f | \operatorname{grad} g) + f \triangle g$,
(g dvaput diferencijabilno),

pri čemu je $\Delta \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} = (\nabla | \nabla) \equiv \nabla^2$ *tzv.* Laplaceov diferencijalni operator *(delta), tj.* $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

(vi) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} w) = c_0$ *(w dvaput diferencijabilno)*.

Dokaz. Tvrdnje slijede neposredno iz divergencijine definicije. Dokažimo npr. tvrdnju (iv)!

$\operatorname{div}(f \cdot w) = \frac{\partial(f w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(f w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(f w_z)}{\partial z} =$

$\frac{\partial f}{\partial x} w_x + f \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} w_y + f \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} w_z + f \frac{\partial w_z}{\partial z} =$

$((\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) | (w_x, w_y, w_z)) + f(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}) = (\operatorname{grad} f | w) + f \operatorname{div} w.$

Primijetimo da se tvrdnja (ii) podudara s onom iz Teorema 6.2.1(ii). Tvrdnja (v) slijedi iz (iv) čim je $w = \operatorname{grad} g$. Napokon, u dokazu tvrdnje (vi) treba primijeniti Schwarzov teorem. $\blacksquare$

Teorem 6.2.4 *Pod pretpostavkama Teorema* 6.2.3 *vrijedi*

(i) $\operatorname{rot} c_{\boldsymbol{v}} = c_{\mathbf{0}}$;

(ii) $\operatorname{rot}(\lambda w + \mu u) = \lambda \operatorname{rot} w + \mu \operatorname{rot} u$;

(iii) $\operatorname{rot}(w \times u) = (\operatorname{div} u) w - (\operatorname{div} w) u + (u | \nabla) w - (w | \nabla) u$,

pri čemu su $(w|\nabla) \equiv w_x\frac{\partial}{\partial x}+w_y\frac{\partial}{\partial y}+w_z\frac{\partial}{\partial z}$ *i, slično,* $(u|\nabla)$ *novi diferencijalni operatori;*

(iv) $\operatorname{rot}(f\cdot w) = (\operatorname{grad} f)\times w - f\operatorname{rot} w$*;*

(v) $\operatorname{rot}(f\cdot\operatorname{grad} f) = (\operatorname{grad} f)\times(\operatorname{grad} g)$*, i posebice,* $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = c_{\mathbf{0}}$*;*

(vi) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} w) = \operatorname{grad}\operatorname{div} w - \Delta w$ *(w dvaput diferencijabilno), pri čemu Laplaceov operator* Δ *treba primijeniti na svaku koordinatnu funkciju od* w*.*

Dokaz. Kao i u prethodnom teoremu, sve tvrdnje su izravne posljedice odgovarajućih definicija. Dokažimo npr. tvrdnju (iii)! Na lijevoj strani je vektorska funkcija

$$\operatorname{rot}(w\times u) = \operatorname{rot}(w_yu_z - w_zu_y, w_zu_x - w_xu_z, w_xu_y - w_{yu_x}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_yu_z - w_zu_y & w_zu_x - w_xu_z & w_xu_y - w_yu_x \end{vmatrix} =$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}(w_xu_y - w_yu_x) - \tfrac{\partial}{\partial z}(w_zu_x - w_xu_z), \tfrac{\partial}{\partial z}(w_yu_z - w_zu_y) - \tfrac{\partial}{\partial x}(w_xu_y - w_yu_x),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial x}(w_zu_x - w_xu_z) - \tfrac{\partial}{\partial y}(w_yu_z - w_zu_y)),$$

a desnoj je vektorska funkcija

$$(\operatorname{div} u)w - (\operatorname{div} w)u + (u|\nabla)w - (w|\nabla)u =$$
$$((\tfrac{\partial u_x}{\partial x} + \tfrac{\partial u_y}{\partial y} + \tfrac{\partial u_z}{\partial z})w_x, (\tfrac{\partial u_x}{\partial x} + \tfrac{\partial u_y}{\partial y} + \tfrac{\partial u_z}{\partial z})w_y, (\tfrac{\partial u_x}{\partial x} + \tfrac{\partial u_y}{\partial y} + \tfrac{\partial u_z}{\partial z})w_z) -$$
$$-((\tfrac{\partial w_x}{\partial x} + \tfrac{\partial w_y}{\partial y} + \tfrac{\partial w_z}{\partial z})u_x, (\tfrac{\partial w_x}{\partial x} + \tfrac{\partial w_y}{\partial y} + \tfrac{\partial w_z}{\partial z})u_y, (\tfrac{\partial w_x}{\partial x} + \tfrac{\partial w_y}{\partial y} + \tfrac{\partial w_z}{\partial z})u_z) +$$
$$+u_x(\tfrac{\partial w_x}{\partial x}, \tfrac{\partial w_y}{\partial x}, \tfrac{\partial w_z}{\partial x}) + u_y(\tfrac{\partial w_x}{\partial y}, \tfrac{\partial w_y}{\partial y}, \tfrac{\partial w_z}{\partial y}) + u_z(\tfrac{\partial w_x}{\partial z}, \tfrac{\partial w_y}{\partial z}, \tfrac{\partial w_z}{\partial z}) -$$
$$-w_x(\tfrac{\partial u_x}{\partial x}, \tfrac{\partial u_y}{\partial x}, \tfrac{\partial u_z}{\partial x}) - w_y(\tfrac{\partial u_x}{\partial y}, \tfrac{\partial u_y}{\partial y}, \tfrac{\partial u_z}{\partial y}) - w_z(\tfrac{\partial u_x}{\partial z}, \tfrac{\partial u_y}{\partial z}, \tfrac{\partial u_z}{\partial z}).$$

Sređivanjem se lako pokazuje da se radi o jednoj te istoj vektorskoj funkciji. Primijetimo da je tvrdnja (ii) isto što i tvrdnja u Teoremu 6.2.1(iii), te da (v) slijedi iz (iv) primjenom Schwarzova teorema. ■

Napomena 6.2.3 Tvrdnja (vi) u Teoremu 6.2.3 smijemo prereći ovako:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} w = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} w) + \Delta w,$$

te time dobiti odgovor na pitanje što je gradijent skalarnog polja, koje je divergencija vektorskog polja.

Premda najčešće rabimo pravokutni sustav, u mnogim je slučajevima jednostavnije računati u nekom drugom koordinatnom sustavu. Stoga na kraju ovoga pododjeljka pridodajemo (bez formalnog izvođenja) zapise linearnih operatora grad, div, rot i Laplaceova operatora Δ u cilindričnom i sfernom sustavu (v. §2.3.5 i §5.3.2 - razmatranje po Teoremu 5.3.3).

U cilindričnomu sustavu $(O;\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{k})$:

$$\operatorname{grad} f = (\tfrac{\partial f}{\partial\rho}, \tfrac{1}{\rho}\cdot\tfrac{\partial f}{\partial\varphi}, \tfrac{\partial f}{\partial z});$$
$$\operatorname{div} w = \tfrac{1}{\rho}\cdot\tfrac{\partial(\rho w_\rho)}{\partial\rho} + \tfrac{1}{\rho}\cdot\tfrac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \tfrac{\partial w_z}{\partial z};$$
$$\operatorname{rot} w = (\tfrac{1}{\rho}(\tfrac{\partial w_z}{\partial\varphi} - \tfrac{\partial w_\varphi}{\partial z}), \tfrac{\partial w_\varphi}{\partial z} - \tfrac{\partial w_z}{\partial\rho}, \tfrac{1}{\rho}(\tfrac{\partial(\rho w_\varphi)}{\partial\rho} - \tfrac{\partial w_\rho}{\partial\varphi}));$$
$$\Delta f = \tfrac{1}{\rho}\cdot\tfrac{\partial(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho})}{\partial\rho} + \tfrac{1}{\rho^2}\cdot\tfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

U sfernomu sustavu $(O;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\varphi}_0)$:

$\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi})$;
$\operatorname{div} w = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial (w_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}$;
$\operatorname{rot} w = (\frac{1}{r \sin\theta}(\frac{\partial (w_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial \varphi}), \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r w_\varphi)}{\partial r}), \frac{1}{r}(\frac{\partial (r w_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta}))$;
$\Delta f = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 \frac{\partial f}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial (\sin\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$.

6.2.3 Usmjerena derivacija

Neka je $U : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Odaberimo bilo koju točku $T_0 \in \Omega$ i bilo koji vektor $\boldsymbol{l} \in \mathbb{V}(T_0)$. Tada za svaku točku T na zraci l određenoj s $\boldsymbol{l}$ vrijedi $\overrightarrow{TT_0} = t\boldsymbol{l}_0$, za neki $t \in [0, \cdot\rangle$, pri čemu je $\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{||\boldsymbol{l}||}$ pripadni jedinični vektor. Broj t je, zapravo, udaljenost $d(T_0, T)$ od T_0 do T. **Prosječnom promjenom** skalarnoga polja U **od točke** T_0 **do točke** T nazivamo količnik

$$\frac{U(T)-U(T_0)}{d(T_0,T)} = \frac{U(T)-U(T_0)}{t} \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{TT_0} = t\boldsymbol{l}_0.$$

Pokazuje se ovdje važnim istražiti granični slučaj $T \to T_0$ po l, tj. $t \to 0$. Da bi navedeni količnik (u graničnom slučaju) imao smisla za svaki izbor jediničnog vektora $\boldsymbol{l}_0$ nužno je da područje Ω bude "lokalno konveksno". Dakako, dostatno je da $\Omega \equiv X \subseteq \mathbb{R}^3$ bude otvoren skup.

Definicija 6.2.4 *Neka je $U : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Graničnu vrijednost (ako postoji)*

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(T)-U(T_0)}{t} \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{TT_0} = t\boldsymbol{l}_0,$$

nazivamo ***derivacijom skalarnoga polja*** *U* ***u točki*** *T_0* ***u smjeru*** *$\boldsymbol{l}$ (ili, kraće,* ***usmjerenom*** *(skalarnom)* ***derivacijom****) i označujemo s $\frac{\partial U(T_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$.*

U praktičnom računu je puno jednostavnije baratati predstavnikom $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, skalarnoga polja U u koordinatnomu sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Prvo, točkama $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $T = (x, y, z)$ pripadaju radijus-vektori $\overrightarrow{OT_0} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ i $\overrightarrow{OT} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Nadalje, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_0} + \overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{OT_0} + t\boldsymbol{l}_0$, dakle,

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x_0 + t(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{i}))\boldsymbol{i} + (y_0 + t(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{j}))\boldsymbol{j} + (z_0 + t(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{k}))\boldsymbol{k}.$$

Slijedi da se koordinate svake točke T na zraci što ju određuju T_0 i $\boldsymbol{l}_0$ opisuju linearnim jednadžbama

$$x = x_0 + (\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{i})t, \quad y = y_0 + (\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{j})t, \quad z = z_0 + (\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{k})t, \quad t \in [0, \cdot\rangle.$$

Proizlazi da je prije definirana usmjerena derivacija, zapravo, derivacija funkcijske kompozicije $[0, \cdot\rangle \overset{w=(w_x,w_y,w_z)}{\longrightarrow} X \overset{f}{\longrightarrow} \mathbb{R}$, tj.

$$t \mapsto w(t) = (x_0 + (\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{i})t, y_0 + (\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{j})t, z_0 + (\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{k})t) \mapsto f(w(t)),$$

u točki $t = 0$. Prema tomu,

$$\frac{\partial U(T_0)}{\partial \boldsymbol{l}} \equiv \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = (f \circ w)'(0) =$$
$$\frac{\partial f(w(0))}{\partial x} \cdot w'_x(0) + \frac{\partial f(w(0))}{\partial y} \cdot w'_y(0) + \frac{\partial f(w(0))}{\partial z} \cdot w'_z(0) =$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{i}) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{j}) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z})(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{k}) =$$
$$(\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|\boldsymbol{l}_0).$$

Time smo dokazali ovaj teorem:

Teorem 6.2.5 *Derivacija skalarnog polja U, zadanoga funkcijom $f : X \to \mathbb{R}$, u točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ u smjeru $\boldsymbol{l}$ ($\neq \mathbf{0}$) jednaka je skalarnom umnošku pripadnoga gradijenta s jediničnim vektorom $\boldsymbol{l}_0$, tj. projekciji vektora* $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ *na vektor $\boldsymbol{l}$.*

Primjer 6.2.4 Izračunajmo derivaciju skalarnoga polja

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3yz + 5$$

u točki $T = (3, 2, -1)$ u smjeru $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.
Po Teoremu 6.2.5, iz

$$\operatorname{grad} f(3, 2, -1) = (2x, 3z, 3y)|_{(3,2,-1)} = (6, -3, 6), \quad \text{i}$$

$$\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{||\boldsymbol{l}||} = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

dobivamo da je tražena usmjerena derivacija $\frac{\partial f(3,2,-1)}{\partial \boldsymbol{l}}$ jednaka

$$(\operatorname{grad} f(3, 2, -1)|\boldsymbol{l}_0) = ((6, -3, 6)|(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})) = \tfrac{6}{\sqrt{3}} - \tfrac{3}{\sqrt{3}} + \tfrac{6}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

Napomena 6.2.4 Primijetimo da je $\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \boldsymbol{l}} > 0$ povlači $f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0)$, tj. $U(T) > U(T_0)$, čim je T dovoljno blizu T_0 na pripadnoj zraci. Ovo se može iskoristiti, pod nekim dodatnim uvjetima, za istraživanje lokalnih ekstremnih vrijednosti skalarnog polja U, odnosno, skalarne funkcije f.

Iz Teorema 6.2.5 slijedi da skalarno polje f najbrže raste u smjeru što ga određuje $\operatorname{grad} f$, odnosno, da najbrže pada u smjeru što ga određuje $-\operatorname{grad} f$. Drugim riječima, $\operatorname{grad} f$ *pokazuje smjer najbrže promjene* skalarnoga polja f. Štoviše, gradijent se time može i okarakterizirati.

Teorem 6.2.6 *Neka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, opisuje diferencijabilno skalarno polje U. Tada gradijent toga polja u svakoj točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ima za pravac okomicu na razinsku plohu u T_0, a iznos mu je jednak apsolutnoj vrijednosti pripadne usmjerene derivacije. Sažeto,*

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n}_0,$$

pri čemu je $\boldsymbol{n}$ normala na razinsku plohu $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Dokaz. Odaberimo bilo koju točku $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$. Jednadžba pripadne razinske plohe $U(T) = c \equiv U(T_0))$ prelazi u $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$, što povlači

$$0 = df(x, y, z) = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} dz =$$
$$= (\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|d\boldsymbol{r}),$$

pri čemu $d\boldsymbol{r}$ označuje vektor $dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} \equiv (dx, dy, dz)$. Budući da pratimo zbivanje na razinskoj plohi u točki T_0, to $d\boldsymbol{r}$ smijemo tumačiti kao infinitezimalni pomak u njezinoj tangencijalnoj ravnini točkom T_0. Prema tomu, $(\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|d\boldsymbol{r}) = 0$ znači da je $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ okomit na tu tagencijalnu ravninu, tj. na promatranu razinsku plohu u točki T_0, dakle, usporedan s pripadnim normalnim vektorom $\boldsymbol{n}$. Slijedi $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) =$

$\lambda \boldsymbol{n}_0$ pa je $\lambda = (\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|\boldsymbol{n}_0)$. Po Teoremu 6.2.5 je $(\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|\boldsymbol{n}_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \boldsymbol{n}}$, što onda daje $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n}_0$. ■

Napomena 6.2.5 Pomoću Teorema 6.2.6 je lako izračunati jedinični normalni vektor na razinsku plohu skalarnog polja. Naime, za svaku točku $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, vrijedi $\boldsymbol{n}_0 = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)\|}$.

Primjer 6.2.5 Izračunajmo jedinični normalni vektor na plohu $z = xy$ u točki $T_0 = (2, 3, 6)$.
Smijemo pretpostaviti da je promatrana ploha $z = xy$ neka razinska ploha $f(x, y, z) = c$ nekog skalarnog polja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$. Tako dobivamo $f(x, y, z) = xy - z + c$, pa je

$\operatorname{grad} f(2, 3, 6) = (y, x, -1)|_{(2,3,6)} = (3, 2 - 1)$ i, napokon,

$\boldsymbol{n}_0(T_0) = \frac{\operatorname{grad} f(2,3,6)}{\|\operatorname{grad} f(2,3,6)\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$.

Razmotrimo sada kako bi se usmjerena derivacija mogla osmisliti u vektorskom polju. Neka funkcija $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, predstavlja vektorsko polje $\mathbf{V}$. Promatrajmo opet čvrstu točku $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, varijabilnu točku $T = (x, y, z)$ i količnik

$\frac{w(x,y,z)-w(x_0,y_0,z_0)}{t} \in \mathbb{R}^3$,

koji opisuje *prosječnu promjenu vektorskoga polja* $\mathbf{V} \equiv w$ (pri prijelazu iz T_0 u T) u smjeru $\boldsymbol{l} \equiv \overrightarrow{T_0T} = t\boldsymbol{l}_0$, pri čemu je dužina $\overline{T_0T} \subseteq X$.

Definicija 6.2.5 *Neka funkcija $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, predstavlja vektorsko polje $\mathbf{V}$, te neka su $T_0 = (x_0, y_0, z_0), T = (x, y, z) \in X$, $\overline{T_0T} \subseteq X$ i $\overrightarrow{T_0T} = t\boldsymbol{l}_0$. Graničnu vrijednost (ako postoji)*

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{w(x,y,z)-w(x_0,y_0,z_0)}{t} \in \mathbb{R}^3$,

nazivamo ***derivacijom vektorskoga polja*** $\mathbf{V}$ (w) ***u točki*** T_0 ***u smjeru*** $\boldsymbol{l}$ *(ili, kraće,* ***usmjerenom*** *(vektorskom)* ***derivacijom****) i označujemo s*

$\frac{\partial \mathbf{V}(T_0)}{\partial \boldsymbol{l}} \equiv \frac{\partial w(x_0,y_0.z_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$.

Teorem 6.2.7 *Derivacija vektorskog polja w u točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ u smjeru $\boldsymbol{l}$ $(\neq \mathbf{0})$, ako postoji, jednaka je vrijednosti operatora $(\boldsymbol{l}_0|\nabla)$ primijenjenog na w u (x_0, y_0, z_0), tj.*
$\frac{\partial w(x_0,y_0.z_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = ((\boldsymbol{l}_0|\nabla)w)(x_0, y_0, z_0) = (\cos\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial w}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial w}{\partial z})_{(x_0,y_0,z_0)}$,
gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ smjerovni kosinusi od $\boldsymbol{l}$, tj. komponenete jediničnoga vektora $\boldsymbol{l}_0$. (Operator $(u|\nabla) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$ smo uveli u Teoremu 6.2.4)

Dokaz. Promišljajući kao u razmatranju što je prethodilo Teoremu 6.2.5, sada za vektorsko polje $w = (w_x, w_y, w_z)$, dobivamo

$\frac{\partial w(x_0,y_0.z_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = [(\boldsymbol{l}_0|\frac{\partial w_x}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{l}_0|\frac{\partial w_y}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\boldsymbol{k}) +$
$+(\boldsymbol{l}_0|\frac{\partial w_z}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\boldsymbol{k})]_{(x_0,y_0,z_0)} \overset{\text{"pregrupiranje"}}{=}$

$$[(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{i})(\tfrac{\partial w_x}{\partial x}\boldsymbol{i}+\tfrac{\partial w_y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\tfrac{\partial w_z}{\partial x}\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{j})(\tfrac{\partial w_x}{\partial y}\boldsymbol{i}+\tfrac{\partial w_y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\tfrac{\partial w_z}{\partial y}\boldsymbol{k})+$$
$$+(\boldsymbol{l}_0|\boldsymbol{k})(\tfrac{\partial w_x}{\partial z}\boldsymbol{i}+\tfrac{\partial w_y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\tfrac{\partial w_z}{\partial z}\boldsymbol{k})]_{(x_0,y_0,z_0)}=$$
$$[\cos\alpha\tfrac{\partial w}{\partial x}+\cos\beta\tfrac{\partial w}{\partial y}+\cos\gamma\tfrac{\partial w}{\partial z}]_{(x_0,y_0,z_0)}=((\boldsymbol{l}_0|\nabla)w)(x_0,y_0,z_0).\ \blacksquare$$

Primjer 6.2.6 Izračunajmo derivaciju vektorskoga polja

$$(x,y,z)\mapsto w(x,y,z)=(yz,zx,xy)$$

u točki $T_0=(1,-\frac{1}{2},2)$ u smjeru $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.
Budući da je $\boldsymbol{l}_0=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$, po Teoremu 6.2.7 dobivamo

$$\frac{\partial w(1,-\frac{1}{2},2)}{\partial \boldsymbol{l}}=((\boldsymbol{l}_0|\nabla)w)(1,-\tfrac{1}{2},2)=(\tfrac{2}{3}\tfrac{\partial w}{\partial x}+\tfrac{1}{3}\tfrac{\partial w}{\partial y}-\tfrac{2}{3}\tfrac{\partial w}{\partial z})_{(1,-\frac{1}{2},2)}=$$
$$[\tfrac{2}{3}(0,z,y)+\tfrac{1}{3}(z,0,x)-\tfrac{2}{3}(y,x,0)]_{(1,-\frac{1}{2},2)}=\tfrac{1}{3}(z-2y,2z-2x,2y+x)_{(1,-\frac{1}{2},2)}=$$
$$=\boldsymbol{i}+\tfrac{2}{3}\boldsymbol{j}.$$

6.2.4 Neka posebna vektorska polja

Definicija 6.2.6 *Reći ćemo da je vektorsko polje $w:X\to\mathbb{R}^3$, $X\subseteq\mathbb{R}^3$,* ***potencijalno*** *(ili* ***konzervativno****), ako postoji neko skalarno polje $f:X\to\mathbb{R}$ takvo da je $w=-\operatorname{grad}f$. Pritom polje f nazivamo (skalarnim)* ***potencijalom*** *od w. Za vektorsko polje w kažemo da je* ***bezvrtložno*** *čim je $\operatorname{rot}w=\boldsymbol{c}_0$. U protivnom, w nazivamo* ***vrtložnim*** *poljem. Napokon, reći ćemo da je vektorsko polje w* ***solenoidalno*** *čim je $\operatorname{div}w=c_0$.*

Napomena 6.2.6 Razvidno je da negativni predznak u definiciji potencijalnog polje nije bitan jer je $\operatorname{grad}(-f)=-\operatorname{grad}f$. Radi se samo u ustaljenom dogovoru, kojemu je pridijeljeno stanovito *fizičko* značenje.

Primjer 6.2.7 (a) Jednostavno je provjeriti da je gravitacijsko polje tvarne točke T_0 s masom m_0, tj. $\boldsymbol{G}=K\cdot\frac{m_0}{r^2}\boldsymbol{r}_0$, K - konstanta i $r\equiv\|\boldsymbol{r}\|$- udaljenost, potencijalno s potencijalom $U=K\cdot\frac{m_0}{r}$. (Uzmemo li T_0 za ishodište koordinatnog sustava $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$, potencijal U je zadan skalarnom funkcijom $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=K\cdot\frac{m_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.)

(b) Slično (a), elektrostatsko polje pozitivnog "točkastog" naboja e_0, tj. $\boldsymbol{E}=k\cdot\frac{e_0}{r^2}\boldsymbol{r}_0$, k - konstanta i $r\equiv\|\boldsymbol{r}\|$ - udaljenost, je potencijalno s potencijalom $U=k\cdot\frac{e_0}{r}$.

Teorem 6.2.8 *Neka je $w:X\to\mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na konveksnom skupu $X\subseteq\mathbb{R}^3$. Tada je w potencijalno onda i samo onda, ako je bezvrtložno, tj.*

$$(\exists f:X\to\mathbb{R})\ w=-\operatorname{grad}f\Leftrightarrow\operatorname{rot}w=\boldsymbol{c}_0.$$

Dokaz. Ako je vektorsko polje w potencijalno s potencijalom f, onda je (v. Teorem 6.2.4(v))

$$\operatorname{rot}w=\operatorname{rot}(-\operatorname{grad}f)=-\operatorname{rot}\operatorname{grad}f=\boldsymbol{c}_0.$$

Obratno, neka je, pod danim pretpostavkama, vektorsko polje $w=(w_x,w_y,w_z)$ bezvrtložno, tj. $\operatorname{rot}w=\boldsymbol{c}_0$. Da bismo dokazali njegovu potencijalnost,

treba konstruirati skalarno polje f tako da w bude njegov (negativni) gradijent. Jednostavnosti radi, konstrirat ćemo f u posebnom slučaju kad je X kvadar. Prvo primijetimo da $\operatorname{rot} w = \boldsymbol{c}_0$ povlači

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Budući da je X kvadar, dobro je definirana funkcija $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} w_x(t,y,z)dt - \int_{y_0}^{y} w_y(x_0,s,z)ds - \int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,v)dv,$$

pri čemu je $(x_0, y_0, z_0) \in X$ bilo koja čvrsta točka. Izravno se lako dokaže da je $\frac{\partial f}{\partial x} = -w_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -w_y$ i $\frac{\partial f}{\partial z} = -w_z$ (v. §5.3.4). Primjerice,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\int_{x_0}^{x} w_x(t,y,z)dt - \int_{y_0}^{y} w_y(x_0,s,z)ds - \int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,u)du\right) =$$

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial w_x(t,y,z)}{\partial z}dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w_y(x_0,s,z)}{\partial z}ds - w_z(x_0,y_0,z) =$$

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial w_z(t,y,z)}{\partial t}dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w_z(x_0,s,z)}{\partial y}ds - w_z(x_0,y_0,z) =$$

$$-w_z(x,y,z) + w_z(x_0,y,z) - w_z(x_0,y,z) + w_z(x_0,y_0,z) - w_z(x_0,y_0,z) =$$

$-w_y(x,y,z)$.

Dakle, $w = -\operatorname{grad} f$, što smo i tvrdili. ■

Primjer 6.2.8 Istražimo je li vektorsko polje w u Primjeru 6.2.6 konzervativno i ako jest odredimo mu potencijal.

Vektorsko polje $(x,y,z) \mapsto w(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ je diferencijabilno na $\mathbb{R}^3$. Po Teoremu 6.2.8, njegova možebitna konzervativnost je ekvivalentna bezvrtložnosti. Budući da je

$$\operatorname{rot} w(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (x - x, -y + y, z - z) = (0,0,0),$$

to w jest konzervativno polje. Da bismo mu odredili potencijal, postupimo kao u dokazu prethodnoga teorema, tj. (odabravši za T_0 ishodište $O = (0,0,0)$)

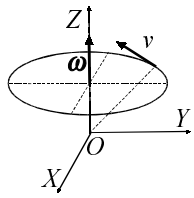
$$f(x,y,z) = -\int_{0}^{x} w_x(t,y,z)dt - \int_{0}^{y} w_y(0,s,z)ds - \int_{0}^{z} w_z(0,0,v)dv =$$

$$-\int_{0}^{x} yzdt - \int_{0}^{y} z \cdot 0ds - \int_{0}^{z} (0 \cdot 0dv = -xyz$$

ili, općenitije, $f(x,y,z) = c - xyz$, pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ bilo koja konstanta.

Primjer 6.2.9 Tvarna točka T se vrti stalnom kutnom brzinom $\boldsymbol{\omega}$ oko čvrste osi. Izračunajmo rotaciju pripadnoga vektorskog polja njezine brzine v.

Promatrajmo ovo zbivanje u provokutnom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, pri čemu neka je os Z navedena čvrsta os. Iz "elementarne" fizike znamo da je tada $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, $\omega \equiv \|\boldsymbol{\omega}\|$, i $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} \equiv \overrightarrow{OT}$ (v. crtež).



Dakle, za vektorsko polje $v = (v_x(x,y,z), v_y(x,y,z), v_z(x,y,z)) \equiv v(x,y,z)$ dobivamo:

$$v(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0).$$

Napokon, za rotaciju toga polja proizlazi

$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega),$$

tj. $\operatorname{rot} v = 2\omega \boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{\omega}$, odnosno, $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v$. Zaključujemo da je $\frac{1}{2} \operatorname{rot} v$ kutna brzina *rotirajuće* točke (brzinom v oko čvrste osi). Dakako da to ima veze s nazivom *rotacija*, a u ovomu svjetlu jasnija je i definicija (bez)vrtložnog vektorskog polja w. Naime, svaka (tvarna) točka $T \in X$ u kojoj je $\operatorname{rot} w(T) \neq \mathbf{0}$ nužno je zahvaćena nekim "vrtložnim" gibanjem.

Teorem 6.2.9 *Neka je $w : X \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na otvorenom kvadru $X \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada je w solenoidalno onda i samo onda, ako postoji dvaput diferencijabilno vektorsko polje $u : X \to \mathbb{R}^3$ rotacija kojega je w, tj.*

$$\operatorname{div} w = c_0 \Leftrightarrow (\exists u : X \to \mathbb{R}^3)\ w = \operatorname{rot} u.$$

(U slučaju netrivijalnog vektorskog polja w na prikladnom području, dakle, ono je solenoidalno točno onda kad je vrtložno.)

Dokaz. Ako za vektorsko polje w postoji vektorsko polje u takvo da je $w = \operatorname{rot} u$, onda je (v. Teorem 6.2.3(vi)) $\operatorname{div} w = \operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = c_0$. Da bismo dokazali nužnost, definirajmo $u = (u_x, u_y, u_z)$ kako slijedi:

$$u_x(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} w_y(x,y,s)ds;$$

$$u_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} w_x(x,y,s)ds + \int_{x_0}^{x} w_z(t,y,z_0)dt,$$

$$u_z(x,y,z) = c_0, \quad (x_0, y_0, z_0) \in X \text{ po volji odabrana čvrsta točka.}$$

Budući da je vektorsko polje w diferencijabilno, to je u dvaput diferencijabilno. Parcijalno derivirajući koordinatne funkcije u_x, u_y i u_z (v. §5.3.4) dobivamo:

$$\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_y(x,y,s)}{\partial y} ds, \quad \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial z} = w_y(x,y,z);$$

$$\frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_x(x,y,s)}{\partial x} ds + w_z(x,y,z_0), \quad \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial z} = -w_x(x,y,z);$$

$$\frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial x} = c_0 = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial y}.$$

Slijedi, $\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = w_x$ i $\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = w_y$, dok je

$$\frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_x(x,y,s)}{\partial x} ds + w_z(x,y,z_0) - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_y(x,y,s)}{\partial y} ds =$$

$$\int_{z_0}^{z} (-\frac{\partial w_x(x,y,s)}{\partial x} - \frac{\partial w_y(x,y,s)}{\partial y}) ds + w_z(x,y,z_0) \overset{(\operatorname{div} w = c_0)}{=}$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_z(x,y,s)}{\partial s} ds + w_z(x,y,z_0) =$$

$$w_z(x,y,z) - w_z(x,y,z_0) + w_z(x,y,z_0) = w_z(x,y,z).$$

Prema tomu, konstruirali smo takvo vektorsko polje u da je $w = \operatorname{rot} u$. ■

Napomena 6.2.7 Teorem 6.2.9 pokazuje da su, *na prikladnom području,* vrtložnost i solenoidalnost vektorskog polja ekvivalentna svojstva. To vrijedi i na općenitijem skupu $X \subseteq \mathbb{R}^3$ nego što je otvoreni kvadar, koji je ovdje odabran da se pojednostavni dokaz. Ipak, *nije* moguće otvoreni kvadar zamijeniti *bilo kojim* otvorenim skupom. Neka je, primjerice, X_1 otvoreni skup između dviju središnjih koncentričnih sfera polumjera c_1 i c_2, $0 < c_1 < c_2$, i neka je na njemu vektorsko polje $\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}_0$, pri čemu je $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r \equiv \|\boldsymbol{r}\|$ i $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. Jednostavni račun pokazuje da je $\boldsymbol{V}$ solenoidalno polje, tj. $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$. Međutim, nije teško dokazati da nema vektorskog polja na X_1 rotacija kojega bi bila polje $\boldsymbol{V}$, tj. za svaki $\boldsymbol{U} : X_1 \to \mathbb{V}$ je $\operatorname{rot} \boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{V}$. I upravo je tako odabrano područje X_1 smetnja za vrtložnost. Naime, ako iz X_1 izbacimo npr. točke što pripadaju Z-osi, na tomu području X_2 vektorsko polje $\boldsymbol{V}$ postaje i bezvrtložnim. Zaista, jednostavno je provjeriti da tada za vektorsko polje $\boldsymbol{U} = -\frac{\varphi}{r}\boldsymbol{\theta}_0$ (sferni sustav) vrijedi $\boldsymbol{V}|_{X_2} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{U}|_{X_2})$.

U dokazu, pri definiranju vektorskoga polja u, odabrali smo $u_z = c_0$. To, dakako, nije nužno. Mogli smo, naime, tako definirati neku inu koordinatnu funkciju, ali se onda preostale dvije moraju definirati netrivijalno. Naravno, ni takvo definiranje nije neophodno jer se sve tri koordinatne funkcije mogu definirati kao netrivijalne.

Napokon, često se, po sličnosti sa skalarnim potencijalom f ($w = -\operatorname{grad} f$), vektorsko polje u sa svojstvom $\operatorname{rot} u = w$ naziva ***vektorskim potencijalom*** vektorskoga polja w.

Na kraju, da bismo naglasili važnost gradijenta, divergencije i rotacije, pridodajemo poznate Maxwellove elektrodinamičke jednadžbe što povezuju (nestacionarno) električno polje $\boldsymbol{E}$ i (nestacionarno) magnetsko polje $\boldsymbol{H}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \boldsymbol{J},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

(c je svjetlosna brzina u vakuumu; ρ je skalarno polje gustoće električnog naboja; $\boldsymbol{J} = \rho w$ je vektorsko polje "gustoće toka naboja brzine v".) Radi lakšeg računanja, magnetsko polje $\boldsymbol{H}$ se izvodi iz magnetskog potencijala $\boldsymbol{A}$, tj. $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, a električno polje $\boldsymbol{E}$ se onda izvodi iz $\boldsymbol{A}$ i iz skalarnog potencijala f, tj. $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} f - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$.

6.2.5 Vježbe

1. Odrediti razinske plohe skalarnoga polja U zadanoga funkcijom
$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \arccos \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.
2. Odrediti strujnice (ravninskoga) vektroskog polja $\boldsymbol{V}$ zadanoga funkcijom
$(x, y) \mapsto w(x, y) = (y, -x)$.
3. U kojim točkama iščezava gradijent skalarnoga polja
$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$,
te koliki mu je iznos u točki $T = (0, 1, 2)$?
4. Izračunati divergenciju vektorskoga polja
$(x, y, z) \mapsto w(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\boldsymbol{r}_0$,
pri čemu je $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ i $r = \|\boldsymbol{r}\|$.
5. Izračunati rotaciju vektorskoga polja
$(x, y, z) \mapsto w(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{c}$,
pri čemu je vektor $\mathbf{c}$ konstantan.
6. Izračunati pripadnu usmjerenu derivaciju ako je
(a) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $T = (-1, 2, 1)$, $\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$;
(b) $w(x, y, z) = (y, x^2, -yz)$, $T = (-1, 0, 2)$, $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.
7. Neka je $f : [0, \cdot\rangle \to \mathbb{R}$ preslikavanje, a $w = f(r)\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r \equiv \|\boldsymbol{r}\|$. (a) Dokazati da je vektorsko polje w potencijalno te mu izračunati potencijal; (b) ako je w i solenoidalno, dokazati da je $f(r) = \dfrac{c}{r}$, c - konstanta i $r \neq 0$.

6.3 KRIVULJNI INTEGRAL

Krivuljni integral će biti poopćenje određenog integrala po segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ na određeni integral po (prostornoj i po dijelovima glatkoj) krivulji Γ zadanoj odgovarajućom parametrizacijom. Definirat ćemo dvije vrste takvoga poopćenja: za skalarno i za vektorsko polje.

6.3.1 Krivulja i njezino usmjerenje

Prisjetimo se jednostavne (po dijelovima) glatke krivulje (v. Definiciju 4.3.2). Ovdje ćemo ju sažeto reformulirati u ambijentu $\mathbb{R}^3$ s provokutnim koordinatnim sustavom $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, svijesni manjkavosti što proizlaze iz svijesnog zaobilaženja razlike između parametrizabilnog skupa i krivulje.

Definicija 6.3.1 *Skup* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *nazivamo* ***jednostavnom glatkom krivuljom*** *(s rubom) ako*

(i) *postoji neprekidno derivabilna bijekcija* $r = (\phi, \psi, \chi) : [a, b] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$*;*

(ii) *za svaki* $t \in [a, b]$ *je* $r'(t) \neq (0, 0, 0)$*, tj.* Γ *dopušta tangentu u* $r(t)$*.*

Svaki takav uređeni par $([a,b],r)$ *nazivamo* ***glatkom parametrizacijom*** *krivulje* Γ. *Za* $A = r(a), B = r(b) \in \Gamma$ *kažemo da su* ***rubne točke*** *od* Γ. *Ako funkcija* r *nije injektivna samo u točkama* a *i* b, *tj. ako je* $r(a) = r(b)$, *govorimo o* ***jednostavno zatvorenoj*** *krivulji* Γ.

Istaknemo li koordinatne funkcije vektorske funkcije r, tj.

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \quad t \in [a,b],$$

dobivamo tzv. **parametarski zapis** (parametarske jednadžbe) krivulje Γ. Napokon, ponekad ćemo rabiti i klasični **vektorski zapis**

$$r(t) = \phi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k}, \quad t \in [a,b].$$

U praksi često nastupa malo općenitiji slučaj od "glatkoga" u smislu da postoji (najviše) konačno točaka u kojima se "krivulja Γ oštro lomi", tj. ne dopušta tangentu. Tada je definicijskom uvjetu (ii) udovoljeno svuda osim u konačno mnogo točaka $t_1, \cdots, t_n \in [a,b]$. U tom slučaju govorimo o **po dijelovima glatkoj krivulji** Γ. Pritom smijemo zamišljati da je Γ *prirodno satavljena* od konačno jednostavnih glatkih krivulja Γ_1, ..., Γ_n, Γ_{n+1}, nad $[a,t_1]$, ..., $[t_{n-1}.t_n]$, $[t_n,b]$ redom, "ljepljenjem točke $r(t_i) \in \Gamma_i$ s točkom $r(t_i) \in \Gamma_{i+1}$", $i = 1, \cdots, n$.

Upoznajmo se sada, premda manjkavo i ne posve korektno (ali za naše potrebe ipak zadovoljavajuće) s pojmom *usmjerene* krivulje. Promatrajmo glatku krivulju Γ zadanu parametrizacijom $([a,b],r)$. Ona u svakoj točki $T = r(t) \in \Gamma$ dopušta tangentu, koju kao pravac ($\cong \mathbb{R}$) možemo usmjeriti, tj. pridijeliti joj koordinatni sustav (v. §2.2.2) $(O \equiv T; \boldsymbol{i})$ ili $(O \equiv T; -\boldsymbol{i})$. Reći ćemo da je glatka krivulja Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) ako je na svakoj njezinoj tangenti odabran točno jedan koordinatni sustav. Slijedi da se Γ može usmjeriti na neizmjerno načina, ali su od svih njih zanimljiva samo dva, tzv. **neprekidna usmjerenja**, koja su inducirana dvama usmjerenjima danog pravca $\mathbb{R}$ preko dvaju razreda glatkih parametrizacija krivulje Γ (po stanovitoj razredbenoj relaciji). Ne pojašnjavajući to pobliže, smijemo zamišljati da glatka krivulja dopušta točno dva (neprekidna) usmjerenja: jedno se dobiva "gibajući se duž Γ od rubne točke $A = r(a)$ do rubne točke $B = r(b)$ uz stalni porast varijable $t \in [a,b]$", a drugo "gibajući se, obratno, od točke B do točke A uz stalni pad varijable $t \in [a,b]$". U prvomu slučaju kažemo da je krivulja Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) **porastom parametra** t, a u drugomu - da je **usmjerena** (ili **orijentirana**) **padom parametra** t. U prvomu (drugomu) slučaju kažemo da je $A = r(a)$ **početak** (**kraj**) i da je $B = r(b)$ **kraj** (**početak**) usmjerene krivulje Γ. Pritom trebamo biti vrlo oprezni jer usmjerenje porastom parametra $t \in [a,b]$ može biti isto što i usmjerenje padom parametra $\tau \in [c,d]$ u nekoj drugoj glatkoj parametrizaciji iste krivulje.

Ako je krivulja Γ po dijelovima glatka, njezine sastavne glatke krivulje $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ dopuštaju po dva neprekidna usmjerenja. Reći ćemo da je Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) čim su $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ usmjerene **sukladno**, tj. kraj od Γ_i jest početak od Γ_{i+1}, $i = 1, \cdots, n$. Primijetimo da se ova definicija

prirodno prenosi i na jednostavno zatvorenu po dijelovima glatku krivulju. U posebnom slučaju jednostavno zatvorene po dijelovima glatke krivulje Γ u (koordinatiziranoj) ravnini ($\mathbb{R}^2 \equiv (O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$) govor se može reducirati na tzv. **negativno** i **pozitivno usmjerenje**, tj. na ono sukladno gibanju satne kazaljke i njemu suprotno gibanje.

Opća oznaka za (neprekidno) usmjerenu krivulju Γ bit će $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$. Ako je na istoj krivlji Γ zadano i suprotno usmjerenje, razlikovat ćemo ga od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ označavajući ga s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$. U posebnom slučaju jednostavno zatvorene ravninske krivulje, $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ će označavati njezino negativno usmjerenje a $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ ono pozitivno.

6.3.2 Krivuljni integral prve vrste

Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, funkcija (skalarno polje na X), a $r(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t \in [a, b]$, parametarska jednadžba glatke krivulje $\Gamma \subseteq X$. Tada je dobro definirana kompozicija

$$[a, b] \xrightarrow{r} X \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad t \mapsto (f \circ r)(t) = f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)),$$

što je realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definicija 6.3.2 *Ako je funkcija*

$$t \mapsto ((f \circ r) \cdot \|r'\|)(t) = f(r(t))\, \|r'(t)\|, \quad t \in [a, b],$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b f(r(t))\, \|r'\|\, (t) dt$$

nazivamo ***integralom skalrnoga polja*** f ***po krivulji*** Γ (*ili* ***krivuljnim integralom prve vrste***) *i označujemo s* $\int_\Gamma f ds$.

Primijetimo da oznaka $\int_\Gamma f ds$ ima puni smisao jer je

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2},$$

pa je $\|r'(t)\|\, dt \equiv ds$ "duljinski element" krivulje (luka) Γ (v. §4.3.4). Stoga je operativni zapis krivuljnog integrala prve vrste

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt.$$

Napomena 6.3.1 U praksi, kad krivulja Γ predstavlja model tanke žice, a f je funkcija njezine ("linearne") gustoće, krivuljni integral $\int_\Gamma f ds$ računa masu te žice.

Treba napomenuti da, apriori, nije jasno je li Definicija 6.3.2 posve korektna. Naime, uz nju bi valjalo dokazati da krivuljni integral $\int_\Gamma f ds$ ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje Γ, tj. da je

$$\int_a^b f(r(t))\,\|r'\|\,(t)dt = \int_c^d f(p(\tau))\,\|p'\|\,(\tau)d\tau,$$

pri čemu su $([a,b],r)$ i $([c,d],p)$ bilo koje dvije glatke parametrizacije od Γ. Budući da bi to zahtijevalo opširnije razmatranje, ne ćemo se u to upuštati.

Primjer 6.3.1 Izračunajmo krivuljni integral prvoga tipa $\int_\Gamma fds$ pri čemu je $f(x,y,z) = x+z$ i Γ zadana jednadžbama $x = t$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}t^2$, $z = t^3$, $t \in [0,1]$.

$$\int_\Gamma fds = \int_a^b f(\phi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}dt =$$

$$\int_0^1 (t+t^3)\sqrt{1+6t^2+9t^4}dt = \int_0^1 (t+t^3)(1+3t^2)dt = \cdots = 2.$$

Razvidno je (v. Teorem 4.3.3(ii)) da se u slučaju po dijelovima glatke krivulje Γ, prirodno sastavljene od glatkih krivulja $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{n+1}$, pripadni krivuljni integral prve vrste smije definirati kao zbroj, tj.

$$\int_\Gamma fds \overset{\text{def.}}{=} \int_{\Gamma_1} fds + \cdots + \int_{\Gamma_{n+1}} fds.$$

Izravno iz Definicije 6.3.2 i svojstava Riemannova integrala slijedi da je krivuljni integral prve vrste linearni funkcional, tj. da vrijedi:

Teorem 6.3.1 *Neka su $f,g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, integrabilne funkcija, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ i $\Gamma \subseteq X$ po dijelovima glatka krivulja. Tada je*

$$\int_\Gamma (\lambda f+\mu g)ds = \lambda\int_\Gamma fds + \mu\int_\Gamma gds.$$

Napomena 6.3.2 Često se (po dijelovima) glatka krivulja $\Gamma \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^3$ zadaje kao presjek dviju ploha zadanih jednadžbama $G(x,y,z) = 0$ i $H(x,y,z) = 0$. Tada treba, pod uvjetima teorema o implicitnoj funkciji (v. Teorem 5.2.10), "eliminacijom treće varijable" dobiti jednadžbe $y = g(x)$, za svaki z, i $z = h(x)$, za svaki y, pri čemu je $x \in [a,b]$, dviju novih ploha s istim presjekom Γ. Pritom su g i h neprekidno derivabilne funkcije na $[a,b]$. Prednost novih ploha je tomu što je njima zadana parametrizacije $x = t$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a,b]$, krivulje Γ, pa se pripadni krivuljni integral prve vrste može izračunati po formuli

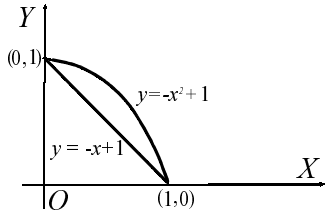
$$\int_\Gamma fds = \int_a^b f(x,g(x),h(x))\sqrt{1+g'(x)^2+h'(x)^2}dx.$$

Pritom se u slučaju ravninske krivulje $\Gamma \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^2$ može dobiti $h = c_0$, pa je tada

$$\int_\Gamma fds = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'(x)^2}dx.$$

Primjer 6.3.2 Izračunajmo krivuljni integral prve vrste $\int_\Gamma fds$ ako je $f(x,y) = xy$ i

(a) Γ ... $y = -x + 1$, $x \in [0, 1]$; (b) Γ ... $y = -x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$.
Uočimo (v. crtež) da u oba primjera krivulja Γ povezuje točke $A = (0, 1)$ i $B = (1, 0)$.



(a) $\int\limits_{\Gamma} f ds = \int\limits_{0}^{1} x(-x+1)\sqrt{1+(-1)^2}dx = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{1}(-x^2+x)dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$;

(b) $\int\limits_{\Gamma} f ds = \int\limits_{0}^{1} x(-x^2+1)\sqrt{1+(-2x)^2}dx = \cdots = \frac{25\sqrt{5}-11}{120}$.

(Ovo pokazuje da je bitno po kojoj se krivulji integrira!)

6.3.3 Krivuljni integral druge vrste

Neka je $w = (w_x, w_y, w_z) : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, funkcija (vektorsko polje na X), a $r(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t \in [a, b]$, parametarska jednadžba glatke krivulje $\Gamma \subseteq X$. Neka je $\overset{\frown}{\Gamma}$ krivulja Γ usmjerena porastom parametra $t \in [a, b]$. Primijetimo da je dobro definirana kompozicija $[a, b] \xrightarrow{r} X \xrightarrow{w} \mathbb{R}^3$,

$$t \mapsto w(r(t)) = (w_x(r(t)), w_y(r(t)), w_z(r(t))),$$

što je vektorska funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Slijedi da je $(wr|r') : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$t \mapsto (w(r(t))|r'(t)) = w_x(r(t))\phi'(t) + w_y(r(t))\psi'(t) + w_z(r(t))\chi'(t),$$

realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b]$.

Definicija 6.3.3 *Ako je funkcija (skalarni produkt) $(wr|r') : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, onda pripadni određeni integral*

$$\int\limits_{a}^{b}(w(r(t))|r'(t))dt$$

nazivamo ***integralom vektorskoga polja*** w ***po usmjerenoj krivulji*** $\overset{\frown}{\Gamma}$ *(ili* ***krivuljnim integralom druge vrste****) i označujemo s* $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})$ *ili s* $\int\limits_{\Gamma}(w|\boldsymbol{t}_0)ds$.

Prva oznaka je posve jasna. Druga, također, ima smisla jer je $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'dt = \boldsymbol{t}_0 ds$, pri čemu je $\boldsymbol{t}_0$ jedinični tangencijalni vektor na Γ u promatranoj točki i on sadrži podatak o usmjerenju (pa ga onda ne treba isticati na samoj krivulji). Izravno izračunavanje krivuljnog integrala druge vrste slijedi iz definicije:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{a}^{b}[w_x(\phi(t), \psi(t), \chi(t))\phi'(t) + w_y(\phi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) +$$

$$+w_z(\phi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt.$$

Primjer 6.3.3 Izračunajmo krivuljni integral druge vrste $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})$ vektorske funkcije

$(x,y,z)\mapsto w(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$

po porastom parametra usmjerenoj krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$,

$r(t)=(2\cos t,2\sin t,3t),\quad t\in[0,2\pi]$.

Odgovarajućim uvrštenjima u definicijsku formulu dobivamo:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})=\int\limits_0^{2\pi}[(2\sin t-3t)(-2\sin t)+(3t-2\cos t)2\cos t+$$

$$+(2\cos t-2\sin t)\cdot 3]dt=\int\limits_0^{2\pi}(-4+6\cos t-6\sin t+6t\sin t+6t\cos t)dt=$$

$$\cdots=-20\pi.$$

Napomena 6.3.3 Krivuljni integral druge vrste $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})$ se obično interpretira kao rad neke sile $\boldsymbol{F}=w$ duž puta $s=\Gamma$ od točke A do točke B. Odmah je jasno da ne može biti svejedno kako je krivulja Γ usmjerena, jer u jednom smjeru energiju dobivamo a u drugom ju trošimo. Ovdje treba pridodati i to da bi za potpunu korektnost Definicije 6.3.3 trebalo dokazati ovisnost krivuljnog integrala druge vrste o odabranoj glatkoj parametrizaciji samo do na predznak, tj. da je

$$|\int\limits_a^b(w(r(t))|r'(t))dt|=|\int\limits_c^d(w(p(\tau))|p'(\tau))d\tau|,$$

pri čemu su $([a,b],r)$ i $([c,d],p)$ bilo koje dvije glatke parametrizacije od Γ, te da su ti integrali jednaki čim r i p induciraju (porastom parametara) isto usmjerenje, a protivnih predznaka čim induciraju suprotna usmjerenja na Γ.

Ako je $\overset{\frown}{\Gamma}$ po dijelovima glatka krivulja, prirodno sastavljena od sukladno usmjerenih glatkih krivulja $\overset{\frown}{\Gamma_1},\cdots,\overset{\frown}{\Gamma_{n+1}}$, pripadni krivuljni integral druge vrste definiramo kao zbroj, tj.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})\overset{\text{def.}}{=}\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma_1}}(w|d\boldsymbol{r})+\cdots+\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma_{n+1}}}(w|d\boldsymbol{r}).$$

Izravno iz Definicije 6.3.3 i svojstava Riemannova integrala slijedi valjanost ovoga teorema:

Teorem 6.3.2 *Neka su $w,u:X\to\mathbb{R}^3$, $X\subseteq\mathbb{R}^3$, vektorske funkcije s integrabilnim koordinatnim funkcijama, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ i $\overset{\frown}{\Gamma}\subseteq X$ usmjerena po dijelovima glatka krivulja. Tada je*

(i) $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})=-\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})$

(ii) $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}((\lambda w+\mu u)|d\boldsymbol{r}) = \lambda\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r}) + \mu\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(u|d\boldsymbol{r}).$

Neka je vektorska funkcija $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, zadana preslikavanjima $P, Q, R : X \to \mathbb{R}$, tj. $w_x = P$, $w_y = Q$ i $w_z = R$. Pridružimo li funkciji w diferencijalnu formu $\omega(w) = Pdx + Qdy + Qdz$ (v. §5.2.4), uočavamo da se, formalno, krivuljni integral druge vrste podudara s integralom odgovarajuće diferencijalne forme, tj.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \omega(w).$$

Ako je pritom krivulja Γ zadana presjekom dviju ploha u X, jednadžbama $G(x,y,z) = 0$ i $H(x,y,z) = 0$, onda se (pod stanovitim uvjetima, v. Napomenu 6.3.2) mogu izvesti jednadžbe $y = g(x)$, *za* svaki z, i $z = h(x)$, za svaki y, $x \in [a,b]$, dviju novih ploha s istim presjekom Γ. Time se dobiva parametrizacija krivulje Γ ... $x = t$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a,b]$, pa se pripadni integral vektorskoga polja w po $\overset{\frown}{\Gamma}$ može lako izračunati:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r}) \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \omega(w) =$$

$$\int\limits_a^b [P(x,g(x),h(x)) + Q(x,g(x),h(x))g'(x) + R(x,g(x),h(x)h'(x))]dx.$$

U posebnom slučaju ravninskog vektorskog polja $w = (P,Q) : X \to \mathbb{R}^2$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, pri čemu je ravninska krivulja Γ zadana jednadžbom $y = g(x)$, $x \in [a,b]$, (tj. parametrizacijom $x = t$, $y = g(t)$, $t \in [a,b]$) dobivamo

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b [P(x,g(x)) + Q(x,g(x))g'(x)]dx.$$

Primjer 6.3.4 Izračunajmo krivuljni integral druge vrste $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz$ ako je $P(x,y,z) = y + z$, $Q(x,y,z) = z + x$ *i* $R(x,y,z) = x + y$, a $\overset{\frown}{\Gamma}$ usmjerena krivulja - dužina od ishodista O do točke $B = (1,1,1)$.

Budući da se $\overset{\frown}{\Gamma} = \overrightarrow{OM}$ može zadati kao presjek dviju ravnina: $y = x$, za svaki z, i $z = x$, za svaki y, $x \in [0,1]$ (usmjerenje porastom parametra $t = x$), to je

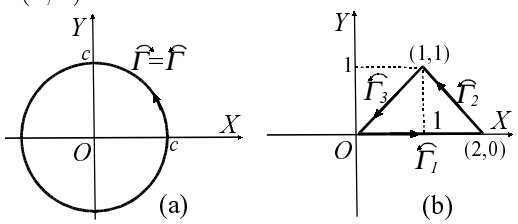
$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_0^1 [(x+x) + (x+x)\cdot 1 + (x+x)\cdot 1]dx = 6\int\limits_0^1 xdx = 3.$$

Ako je u krivuljnom integralu druge vrste $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})$ krivulja Γ (jednostavno) zatvorena, uobičajilo se to isticati oznakom $\oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}}(w|d\boldsymbol{r})$ i nazivati **cirkulacijom** vektorskoga polja w po zatvorenoj krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$.

Primjer 6.3.5 Izračunajmo cirkulaciju ravninskoga vektroskog polja $w(x,y) = (x, xy)$ po

(a) središnjoj kružnici $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ polumjera c (usmjerenoj po volji);

(b) rubu $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ pozitivno usmjerenoga trokuta s vrhovima $A = (2,0)$, $B = (1,1)$ i $O = (0,0)$.



(a) Ovdje je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ zadana parametrizacijom $x = c\cos t$, $y = c\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, pa je

$$\oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = \oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} xdy + xydy = \int_0^{2\pi} (c\cos t \cdot (-c\sin t) + c\cos t \cdot c\sin t \cdot c\cos t)dt =$$

$$c^2 \int_0^{2\pi} (\cos t - c\cos^2 t)(-\sin t)dt = \cdots = 0;$$

(b) Ovdje je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja sukladno sastavljena od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2} = \overrightarrow{AB}$ *i* $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_3} = \overrightarrow{BO}$ s parametrizacijama (redom):

$y = 0$, $x \in [0,2]$, usmjerena porastom parametra x;

$y = -x + 2$, $x \in [1,2]$, usmjerena padom parametra x;

$y = x$, $x \in [0,1]$, usmjerena padom parametra x.

(Dakako da je moguća i drukčija parametrizacija, npr. $r = (\phi, \psi) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi(t) = \begin{cases} 6t, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ -3t + 3, & t \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 6t - 2, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ -6t + 6, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases},$$

usmjerena porastom parametra t.) Tako dobivamo

$$\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}} (w|d\boldsymbol{r}) + \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2}} (w|d\boldsymbol{r}) + \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_3}} (w|d\boldsymbol{r}) =$$

$$\int_0^2 (x + x \cdot 0 \cdot 0)dx + \int_2^1 (x + x(-x+2)(-1))dx + \int_1^0 (x + x \cdot x \cdot 1)dx = \cdots = \frac{1}{3}.$$

6.3.4 Krivuljni integral u potencijalnom polju

Raznovrsni primjeri krivuljnog integrala druge vrste pokazuju da on ponekad ne ovisi o usmjerenoj krivulji po kojoj se integrira, nego samo o njezinoj početnoj i krajnjoj točki. Stoga je korisno istražiti kakva su to vektorska polja krivuljni integrali kojih ovise samo o početku i kraju integracijske krivulje.

Definicija 6.3.4 *Neka je $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (vektorsko polje). Reći ćemo da krivuljni* ***integral*** *vektorskoga polja w* ***ne ovisi o integracijskom putu****, ako za svake dvije točke $A, B \in X$ i svake dvije po dijelovima glatke krivulje $\overset{\frown}{\Gamma_1}, \overset{\frown}{\Gamma_2} \subseteq X$ što povezuju A i B, usmjerene od A prema B, vrijedi*

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} (w|d\boldsymbol{r}) = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} (w|d\boldsymbol{r}).$$

Upravo definirano svojstvo karakterizira ovaj teorem:

Teorem 6.3.3 *Neka je $w : X \to \mathbb{R}^3$ neprekidno vektorsko polje na otvorenom i povezanom području $X \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada pripadni krivuljni integral ne ovisi o integracijskom putu ako i samo ako je w potencijalno polje.*

Dokaz. Pretpostavimo da krivuljni integral vektorskoga polja $w = (w_x, w_y, w_z)$ ne ovisi o integracijskom putu, tj. da je

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} (w|d\boldsymbol{r}) = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} (w|d\boldsymbol{r})$$

za ma koje dvije usmjerene krivulje od točke A do točke B u X (u skladu s Definicijom 6.3.4). Treba dokazati da postoji neko skalarno polje $f : X \to \mathbb{R}$ takvo da je $w = -\operatorname{grad} f$. U tu svrhu učvrstimo bilo koju točku $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$ pa za svaku točku $T = (x, y, z) \in X$ odaberimo bilo koju po dijelovima glatku krivulju $\overset{\frown}{\Gamma} \subseteq X$ što spaja T_0 i T (takva postoji po pretpostavci na X), usmjerenu od T_0 prema T. Pretpostavka povlači da je time dobro definirana funkcija

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}).$$

Odaberimo dostatno mali $\delta > 0$ tako da dužina $\overline{TT_1}$ bude sadržana u X, pri čemu $T_1 = (x + dx, y, z)$ i $0 < |dx| \leq \delta$. (Takav δ postoji jer je skup X otvoren.) Neka je $\overset{\frown}{\Gamma_1}$ usmjerena krivulja sukladno sastavljena od $\overset{\frown}{\Gamma}$ i $\overrightarrow{TT_1}$. Tada je

$$f(x + dx, y, z) = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} (w|d\boldsymbol{r}) = -\Big(\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) + \int_{\overrightarrow{TT_1}} (w|d\boldsymbol{r})\Big), \quad \text{pa je}$$

$$\frac{f(x+dx,y,z) - f(x,y,z)}{dx} = -\frac{1}{dx} \int_{\overrightarrow{TT_1}} (w|d\boldsymbol{r})) = -\frac{1}{dx} \int_{x}^{x+dx} w_x(t, y, z)dt,$$

pri čemu je t druga oznaka za varijablu x (da se ne pobrka s granicama), y i z su ovdje konstante, a $r(t) = (t, y, z)$, $t \in [x, x + dx]$, je parametrizacija usmjerene dužine $\overrightarrow{TT_1}$. Budući da je koordinatna funkcija w_x neprekidna, to je neprekidna i funkcija $t \mapsto w_x(t, y, z)$. Prema tomu,

$$\lim_{dx \to 0} \frac{1}{dx} \int_{x}^{x+dx} w_x(t, y, z)dt = w_x(x, y, z), \quad \text{što povlači}$$

$$w_x(x, y, z) = -\lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y,z) - f(x,y,z)}{dx} = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}.$$

Na isti način se dokaže da je $w_y(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$ i $w_z(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$, pa je doista $w = -\operatorname{grad} f$. Obratno, ako je vektorsko polje w potencijalno onda iz $w = -\operatorname{grad} f$ slijedi

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Tada za bilo koju usmjerenu krivulju $\overset{\frown}{\Gamma}$ u X, od točke $A = (x_1, y_1, z_1)$ do točke $B = (x_2, y_2, z_2)$, zadana parametarskom jednadžbom $r(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t \in [a,b]$, dobivamo

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\phi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\chi'(t)\right)dt =$$

$$\int_a^b d(f \circ r)(t) = fr(b) - fr(a) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1).$$

Prema tomu, krivuljni integral

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)$$

ne ovisi o $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$, nego samo o A i B. ■

Napomena 6.3.4 Primijenimo li Teorem 6.3.3 na bilo koju po dijelovoma glatku jednostavno zatvorenu krivulju $\Gamma \subseteq X$, dobivamo da pripadna cirkulacija vektorskog polja w isčezava, $\oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = 0$. Slijedi da isčezavanje cirkulacije, također, karakterizira potencijalnost vektorskog polja w na području X. Nadalje, budući da su potencijalnost i bezvrtložnost (na konveksnom području) ekvivalentna svojstva (v. Teorem 6.2.8), vrijedi ovaj korolar:

Korolar 6.3.1 *Neka je $w : X \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na konveksnom području $X \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada je*

$$\operatorname{rot} w = c_{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = 0$$

za svaku po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu krivulju $\overset{\frown}{\Gamma} \subseteq X$.

Teorem 6.3.3 i Korolar 6.3.1 ukazuju na veliku važnost potencijalnih (bezvrtložnih) vektorskih polja. Stoga treba umjeti takva polja prepoznati i odrediti im potencijale, o čemu je bilo riječi u Teoremu 6.2.8 i Primjeru 6.2.8. Ponovimo samo to da je opći oblik takvoga potencijala $f : X \to \mathbb{R}$, za dano vektorsko polje w na $X \subseteq \mathbb{R}^3$, integral totalnog diferencijala $w_x dx + w_y dy + w_z dz \equiv df$, tj.

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} w_x(t,y,z)dt - \int_{y_0}^{y} w_y(x_0,u,z)du - \int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,v)dv,$$

pri čemu je $(x_0, y_0, z_0) \in X$ bilo koja odabrana točka.

Primjer 6.3.6 Izračunajmo $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r})$

ako je $w(x,y,z) = (3x^2yz + y + 5, x^3z + x - z, x^3y - y - 7)$ i

(a) $\overset{\frown}{\Gamma}$ bilo koji luk od $A \equiv O = (0,0,0)$ do $B = (1,1,1)$;

(b) $\overset{\frown}{\Gamma}$ bilo koja usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja.

(a) Razvidno je da je vektorsko polje w neprekidno diferencijabilno na prostoru $\mathbb{R}^3$. Budući da je

$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial z}$ $(= x^3 - 1)$, $\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x}$ $(= 3x^2y)$, $\frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y}$ $(= 3x^2z + 1)$,

to je $\operatorname{rot} w = c_0$ pa je w betvrtložno polje, dakle, i potencijalno. Slijedi,

$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = f(1,1,1) - f(0,0,0)$,

gdje je potencijal f od w određen relacijom (uzmimo $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$)

$$f(x,y,z) = -\int\limits_{x_0}^{x} (3t^2yz + y + 5)dt - \int\limits_{y_0}^{y} ((x_0)^3z + x_0 - z)du -$$

$$\int\limits_{z_0}^{z} ((x_0)^3y_0 - y_0 - 7)dv = -\int\limits_{0}^{x} (3t^2yz + y + 5)dt - \int\limits_{0}^{y} (-z)du - \int\limits_{0}^{z} (-7)dv =$$

$$-x^3yz - yx - 5x + zy + 7z.$$

Prema tomu, $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = f(0,0,0) - f(1,1,1) = 0 - 1 = -1$.

(b) Ovdje se radi o cirkulaciji bezvrtložnoga polja pa je $\oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} (w|d\boldsymbol{r}) = 0$.

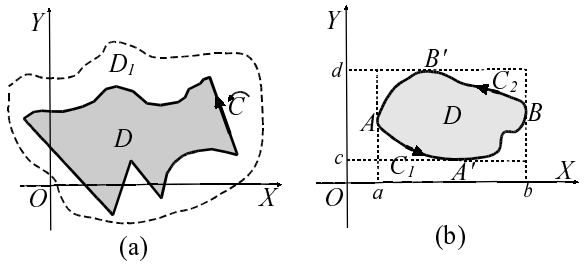
6.3.5 Greenova formula

U ovomu pododjeljku ćemo izvesti osnovnu formulu integralnog računa za funkcije dviju varijabla, koja je prirodno poopćenje Newton-Leibnizove formule. Radi se o tomu da se (dvostruki) integral na prikladnom području $D \subset \mathbb{R}^2$ svede na (krivuljni) integral po *rubu* od D.

Teorem 6.3.4 (Greenov teorem) *Neka su $P, Q : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $\overset{\frown}{\Gamma} \subset X$ pozitivno usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada vrijedi tzv.* Greenova formula

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

pri čemu je $D \subseteq X$ područje omeđeno krivuljom Γ, tj. $\partial D = \Gamma$ (v. crtež (a)).



Dokaz. Strogi dokaz ovoga teorema pretpostavlja puno više predznanja nego što smo ga do sada stekli. Stoga ćemo dokazati samo jedan poseban slučaj, ali ipak dovoljno općenit da obuhvati naše praktične potrebe. Pretpostavimo, dakle, da su P i Q neprekidno diferencijabilne funkcije i da je područje D takvo da mu usporednice s koordinatnim osima sijeku rub $\partial D = \Gamma$ u najviše dvjema točkama (v. crtež (b)). Neka su $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$ jednadžbe onih usporednica što dodiruju ∂D, pa je područje $D \subseteq [a,b] \times [c,d]$ i omeđeno je grafovima dviju funkcija $\phi_{1,2} : [a,b] \to \mathbb{R}$, odnosno, $\psi_{1,2} : [c,d] \to \mathbb{R}$, tj. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),\ x \in [a,b]\}$, odnosno, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ y \in [c,d]\}$.

Pritom je $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, $\phi_1(b) = \phi_2(b)$, $\psi_1(c) = \psi_2(c)$ i $\psi_1(d) = \psi_2(d)$. Označimo s $\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}$ graf G_{ϕ_1} usmjeren porastom varijable x, a s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2}$ graf G_{ϕ_2} usmjeren padom varijable x. Tada je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} = \overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ sukladno sastavljena od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}$ i $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2}$. Budući da je funkcija P neprekidno diferencijabilna, to je funkcija $f \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ neprekidna pa je i integrabilna na D. Taj je integral (v. Fubinijev teorem u §5.3 i razmatranje što prethodi Primjeru 6.3.4)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\Big)dx =$$

$$\int\limits_a^b (P(x,\phi_2(x) - P(x,\phi_1(x)))dx = -\int\limits_b^a P(x,\phi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\phi_1(x))dx =$$

$$-\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2}} P(x,y)dx + c_0(x,y)dy - \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}} P(x,y)dx + c_0(x,y)dy = -\oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} Pdx.$$

Posve slično, sukladno rastavivši $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ na $\overset{\curvearrowleft}{G_{\psi_1}}$, usmjerenu padom varijable y, i $\overset{\curvearrowright}{G_{\psi_2}}$, usmjerenu porastom varijable y, i stavivši $g \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ dobivamo:

$$\iint\limits_D g(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy\Big)dx = \cdots =$$

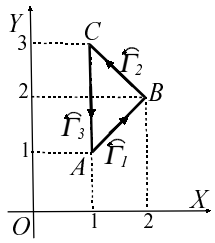
$$\oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} c_0(x,y)\cdot dx + Q(x,y)dy = \oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} Qdy.$$

Zbrajanjem dobivenih integrala proizlazi Greenova formula. ■

Primjer 6.3.7 Izračunajmo cirkulaciju (v. crtež)

$$\oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$$

po pozitivno usmjerenom rubu $\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle} \equiv \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ trokuta $\triangle ABC$, $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (1,3)$.



Primijenit ćemo Greenovu formulu na $P(x,y) = 2(x^2+y^2)$ i $Q(x,y) = (x+y)^2$.

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \iint\limits_{\Delta} (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dxdy =$$

$$\iint\limits_{\Delta} (2x-2y)dxdy = 2\int\limits_{1}^{2}(\int\limits_{x}^{-x+4}(x-y)dy)dx = \cdots = -\tfrac{4}{3}.$$

Neka čitatelj izračuna traženu cirkulaciju izravno, tj. integrirajući po $\overset{\frown}{\Gamma_1} = \overrightarrow{AB}$ ($y = x$, $x \in [1,2]$, parametar raste), $\overset{\frown}{\Gamma_2} = \overrightarrow{BC}$ ($y = -x+4$, $x \in [1,2]$, parametar pada) i $\overset{\frown}{\Gamma_3} = \overrightarrow{CA}$ ($x = 1$, $y \in [1,3]$, parametar pada). Primijetimo da smo u ovomu primjeru Greenovu formulu iskoristili u "obratnom smjeru", tj. da smo krivuljni integral preveli u dvostruki integral. Takva i jest njezina česta primjena u praksi. "Pravi smjer" trebamo, uglavnom, u teorijskim razmatranjima.

Korolar 6.3.2 *Pod uvjetima u Teoremu* 6.3.2 *vrijedi formula*

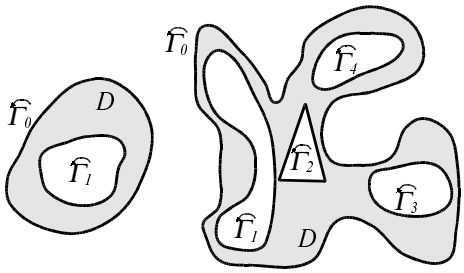
$$P(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} -ydx + xdy.$$

za ploštinu ravninskog područja D. Ta se formula može i preinačiti, npr. kao

$$P(D) = \oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} x^2 d(\tfrac{y}{x}) \quad \textit{i sl.}$$

Dokaz. Znamo da je $P(D) = \iint\limits_{D} dxdy$ (v. §5.3.2). Odaberimo bilo koje dvije neprekidno diferencijabilne (na D) skalarne funkcije P i Q za koje je $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = c_1$. Primjerice, to smiju biti $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ i $Q(x,y) = \frac{x}{2}$. Ostalo slijedi iz Teorema 6.3.4. ■

Napomena 6.3.5 Greenov teorem vrijedi i na području $D \subseteq \mathbb{R}^2$ koje je *višestruko povezano* (v. crteže), tj. na području rub kojega se sastoji od više po dijelovima glatkih jednostavno zatvorenih krivulja Γ_0, Γ_1, ..., Γ_n, pri čemu su Γ_1,..., Γ_n međusobno disjunktne, sve leže u unutrašnjem (omeđenom) području s obzirom na Γ_0 i svaka Γ_i leži u vanjskom području s obzirom na Γ_j, $i \neq j = 1, \cdots, n$.



Usmjerimo li Γ_0 geometrijski pozitivno, a sve ostale Γ_1, ..., Γ_n negativno, Greenova formula poprima zapis

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_0}} (Pdx + Qdy) + \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_0}} (Pdx + Qdy).$$

Napomena 6.3.6 Gledamo li na funkcije P i Q kao na koordinatne funkcije nekog ravninskog vektorskog polja $w : D \to \mathbb{R}^2$, $w(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, Greenovu formulu možemo zapisati i ovako:

$$\iint\limits_D (\operatorname{rot} w | \boldsymbol{k}) dxdy = \oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} (w | d\boldsymbol{r}) \quad \left(= \oint\limits_{\partial D} (w | \boldsymbol{t}_0) ds\right)$$

na što ćemo se vratiti, u općenitijem slučaju, u §4.7.

6.3.6 Vježbe

1. Izračunati: (a) $\int\limits_\Gamma xyds$, ako je $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + y = 1,\ y \geq -1\}$;

(b) $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, ako je $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 3t\}$.

2. Izračunati: (a) $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, ako je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ dio geometrijski pozitivno usmjerene elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$ u I. kvadrantu;

(b) $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (w | d\boldsymbol{r})$, ako je $w(x,y,z) = (y,z,x)$ i (usmjerena padom parametra)

$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \frac{1}{2}\sin t,\ z = \frac{\sqrt{3}}{2},\ t \in [0,\pi]\}$.

3. Potvrditi da krivuljni integral ne ovisi o integracijskom putu i izračunati ga:

(a) $\int\limits_{(-1,-1)}^{(1,2)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$;

(b) $\int\limits_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4. Izračunati cirkulaciju ravninskog vektorskog polja:

(a) $\oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (w | d\boldsymbol{r})$, $w(x,y) = (-x^2y, xy^2)$, $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \sqrt{2}\}$;

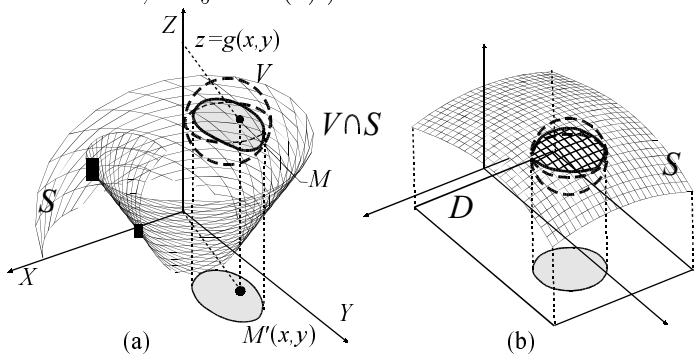
(b) $\oint\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (w | d\boldsymbol{r})$, $w(x,y) = (\frac{1}{x+y}, \frac{-1}{x+y})$, $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3,\ |y| = 1\}$.

6.4 PLOŠNI INTEGRAL

Integriranje po plohama je jedna od temeljnih tehnika matematičke fizike, što ćemo mi ovdje moći tek djelomice uočiti. Pritom je svakako najvažniji tzv. Ostrogradski-Gaussov teorem o divergenciji, koji je drugo poopćenje (prvo je bilo Greenov teorem) Newton-Leibnizove formule - sada na trostruki integral. Naime, pod nekim se pretpostavkama integral po omeđenom području $V \subset \mathbb{R}^3$ prevodi na integral po zatvorenoj plohi S koja je rub $S \equiv \partial V$ toga područja. Ali, strogo definirati plohu i, posebice, njezinu ploštinu i usmjerenje vrlo je složen i zahtjevan posao, koji ovdje nije moguće posve korektno obaviti. Grubo govoreći, ploha je neprekidna slika nekog ravninskog područja. Za našu svrhu ćemo trebati, premda ne sasvim strogu, ipak nešto točniju definiciju.

6.4.1 Glatka ploha i njezina ploština

Definicija 6.4.1 *Skup $S \subset \mathbb{R}^3$ nazivamo* ***plohom*** *ako za svaku točku $T_0 \in S$ postoje otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ od T_0, otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$, preslikavanje $g : U \to \mathbb{R}$ i pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ u $\mathbb{R}^3$ takvi da (u tomu sustavu) $z = g(x, y)$, $(x, y) \in U$, bude jednadžba presječnoga skupa $S \cap V$ (v. crteže). Reći ćemo da je ploha S* ***glatka*** *(**u točki** $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = g(x_0, y_0)$) ako je pripadna funkcija g diferencijabilna (u točki (x_0, y_0)). (Drugim riječima, ploha S je glatka čim u svakoj svojoj točki $T \in S$ dopušta tangencijalnu ravninu;* v. §5.2.2 (3).)



Ako se za cijelu plohu S može naći jedan koordinatni sustav i jedno preslikavanje $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, tako da njegova suženja udovoljavaju Definiciji 6.4.1, onda se $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, naziva **eksplicitnom jednadžbom** plohe S.

Neka je $G : V \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija na otvorenom skupu $V \subseteq \mathbb{R}^3$ sa svojstvom $\operatorname{grad} G(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ u svakoj točki $(x, y, z) \in V$. Tada se lako provjeri da je skup

$S = \{(x, y, z) \in V \mid G(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

glatka ploha. Pritom je, u svakoj točki, gradijent

$\operatorname{grad} G(x, y, z) = (\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z})_{(x,y,z)}$

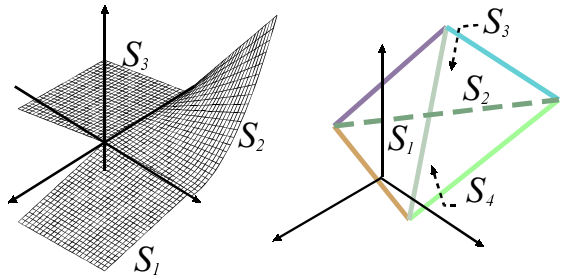
okomit na tangencijalnu ravninu, što odmah daje jednadžbu pripadne tangencijalne ravnine.

Često ćemo plohu S zadavati **parametarski**. Pri takvom zadavanju nema privilegiranih osi, a plohu treba zamisliti kao "dvodimenzionalni skup" nastao "neprekidnom deformacijom" $r : D \to \mathbb{R}^3$ nekog ravninskog područja D. Ne ulazeći u potankosti, dajemo pripadnu parametarsku jednadžbu:

S ... $r(u,v) = (\phi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)), \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$

tj. $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$. Tako, primjerice, ploha S zadana eksplicitnom jednadžbom $z = g(x,y)$ ima parametarski zapis ($u = x$, $v = y$) $r(x,y) = (x, y, g(x,y))$.

U nekim razmatranjima i primjenama javljat će se plohe poput ovih na crtežu.



Uočavamo da se radi o plohi S sastavljenoj od konačno glatkih ploha S_1,..., S_n tako da u točkama "spojnih krivulja" ne postoje tangencijalne ravnine (ni normale). Za takve plohe kažemo da su **po dijelovima glatke**. Pokazuje se da je skup svih točaka takve plohe u kojima nema normale "ploštinski zanemariv" pa ćemo ga u našim (naivnim) razmatranjima o plošnom integralu smjeti zanemarivati.

Da bismo definirali plohinu ploštinu polazimo od pretpostavke da je uobičajena definicija za ploštinu

$P(\square) = |\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_4}|$

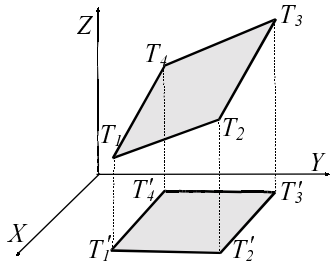
paralelograma $\square$ određenoga vrhovima T_i, $i = 1,2,3,4$, ispravna. Neka je, u danom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1,2,3,4$. Budući da taj paralelogram leži u ravnini zadanoj jednadžbom $z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1)$, to je

$$P(\square) = \left| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1) \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & p(x_4 - x_1) + q(y_4 - y_1) \end{vmatrix} \right| =$$

$$|-p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}| \cdot \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - x_1 \end{vmatrix} \right| = \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot P(\square'),$$

gdje je $\square'$ (također paralelogram, s vrhovima T_i', $i = 1,2,3,4$) okomita projekcija paralelograma $\square$ u XY-ravninu (v. crtež).



Naime,

$$P(\square') = |\overrightarrow{T_1'T_2'} \times \overrightarrow{T_1'T_4'}| = \left| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - x_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Neka je $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, eksplicitna jednadžba glatke plohe S. Uočimo bilo koji pravokutnik $\square' \subseteq D$ pa promatrajmo dio S' dio plohe S što se okomito projicira na $\square'$. Podijelimo $\square'$ usporednicama s X- i Y-osi na više "malih" pravokutnika $\square_i'$, $i = 1, \cdots, n$. To će uvjetovati odgovarajuću podjelu od S' na više "malih" ploha S_i', od kojih je svaka određena suženjem funkcije g na $\square_i'$, $i = 1, \cdots, n$. Zadržimo se časak na bilo kojoj od njih, S_i', i odaberimo na njoj bilo koju točku $T_i = (x_i, y_i, z_i)$. Znamo da je jednadžba pripadne tangencijalne ravnine

$$z - z_i = p_i(x - x_i) + q(y - y_i), \quad p_i = \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x},\ q_i = \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y}.$$

Označimo s $\square_i$ "mali" paralelogram u toj tangencijalnoj ravnini koji se okomito projicira na "mali" pravokutnik $\square_i'$. Time smo stigli do ključnoga mjesta u našemu razmatranju. Naime, ako ploština, kako ju obično zamišljamo, ima smisla onda bi "mali" paralelogram $\square_i$ i "mala" ploha S_i' trebali imati približno jednaku ploštinu, naravno, pretpostavljajući dostatno sitnu podjelu pravokutnika $\square'$. Zato pripadnu ploštinu definiramo kao (približno)

$$P(S') = \sum_{i=1}^{n} P(S_i') \approx \sum_{i=1}^{n} P(\square_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\, P(\square_i').$$

Budući da je $P(\square_i') = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, pri čemu su Δx_i i Δy_i razmaci između odgovarajućih susjednih usporednica, to je

$$P(S') \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i, \quad p_i = \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x},\ q_i = \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y}.$$

Sjećajući se definicije određenog integrala skalarne funkcije, uočavamo da se na desnoj strani pojavila integralna suma skalarne funkcije

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 + (\tfrac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2},$$

pa ima smisla određeni integral

$$\iint_{\square'} \sqrt{1 + (\tfrac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2}\, dxdy$$

smatrati ploštinom plohe S'. Jasno je sada da se to smije proširiti preko D na S.

Definicija 6.4.2 *Neka je $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, diferencijabilna funkcija, a $D \subseteq X$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavno*

zatvorenom krivuljom. Neka je S ploha zadana jednadžbom $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$. Tada njezinu ***ploštinu*** *definiramo kao broj*

$$P(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2} dxdy.$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $g = c_0$ na D dobivamo $S = D$ i

$$P(D) = \iint\limits_D dxdy,$$

što se slaže s prije poznatom formulom (v. §5.3.2).

Ako ploha S ne udovoljava svim uvjetima u Definiciji 6.4.2, ali ju se može rastaviti po dijelovima glatkim krivuljama na konačno mnogo "disjunktnih" ploha $S_1, \cdots, S_n$, od kojih svaka udovoljava uvjetima Definicije 6.4.2, onda se njezina ploština definira kao pripadni zbroj, tj.

$$P(S) = P(S_1) + \cdots + P(S_n).$$

U slučaju plohe S, što se okomito projicira na područje D, implicitno zadane jednadžbom $G(x,y,z) = 0$, formula za ploštinu prelazi u

$$P(S) = \iint\limits_D \frac{1}{\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}} \sqrt{(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z})^2} dxdy,$$

pri čemu naznačene parcijalne derivacije treba iskazati funkcijama od x i y.

Napokon, formaliziramo li $P(S) = \iint\limits_D dS$, smijemo reći da je

$$dS \equiv \sqrt{1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2} dxdy$$

infinitezimalni *ploštinski element.* (Strogo, bolje bi bilo pisati $dP(S)$ umjesto dS!)

6.4.2 Plošni integral prve vrste

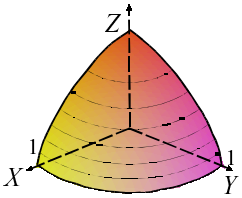
Definicija 6.4.3 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (skalarno polje), a $S \subseteq X$ glatka ploha zadana jednadžbom $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, na zatvorenom području D omeđenom po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada dvostruki integral*

$$\iint\limits_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2} dxdy$$

nazivamo ***plošnim integralom prve vrste*** *skalarnoga polja f po plohi S i označujemo ga s* $\iint\limits_S f dS$.

(*Primijetimo da je oznaka u skladu s prethodnim razmatranjem.*)

Primjer 6.4.1 Izračunajmo plošni integral prve vrste $\iint\limits_S f dS$, ako je $f(x,y,z) = x + y + z$, a S dio jedinične središnje sfere u I. oktantu (v. crtež).



Budući da je

$$S \ \dots \ z = g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2},$$
$$(x,y) \in D \ \dots \ \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases},$$

to je $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, pa je $1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Prema tomu,

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_D (x+y+\sqrt{1-x^2-y^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy \overset{\text{polarne koordinate}}{=}$$
$$= \iint\limits_{D_{\rho,\varphi}} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + \sqrt{1-\rho^2})\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho d\varphi = \cdots = \frac{3\pi}{4}.$$

(Primijenili smo teorem o zamjeni varijabla, v. Teorem 5.3.3.)

Napomena 6.4.1 Ako je glatka ploha S zadana parametarski jednadžbama $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$, onda iz Definicije 6.4.3 i prethodnih razmatranja slijedi da se pripadni plošni integral prve vrste izračunava po formuli

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{D_{u,v}} f(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

pri čemu je

$$E = (\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u})^2 + (\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u})^2 + (\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial u})^2,$$
$$F = \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial\chi(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v},$$
$$G = (\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v})^2 + (\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v})^2 + (\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v})^2.$$

Primjer 6.4.2 Izračunajmo $\iint\limits_S (-x+y+z)dS$ ako je ploha S zadana parametarski jednadžbama $x = \phi(u,v) = \frac{u^2}{2} - v$, $y = \psi(u,v) = u^2 + v^2$, $z = \chi(u,v) = -\frac{u^2}{2} + v$, pri čemu je $(u,v) \in D_{u,v} \ \dots \ \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le u \end{cases}$.

Izračunajmo prvo izraze E, G i F:

$$E = u^2 + (2u)^2 + (-u)^2 = 6u^2;$$
$$E = u\cdot(-1) + 2u\cdot 2v + (-u)\cdot 1 = 4uv - 2u;$$
$$F = (-1)^2 + (2v)^2 + 1^2 = 4v^2 + 2.$$

Slijedi, $EG - F^2 = \cdots = 8u^2(v+1)^2$ pa je

$$\iint\limits_S (-x+y+z)dS = \iint\limits_{D_{u,v}} (-\frac{u^2}{2} + v + u^2 - \frac{u^2}{2} + v)\sqrt{8u^2(v+1)^2}dudv =$$
$$2\sqrt{2}\iint\limits_{D_{u,v}} u(v^3+3v^2+2v)dudv = 2\sqrt{2}\int\limits_0^1(\int\limits_0^u u(v^3+3v^2+2v)dv)du = \frac{23\sqrt{2}}{20}.$$

Napomena 6.4.2 (a) Aproksimiramo li plohu S tvarnim objektom kojemu je "debljina zanemariva prema dužini i širini" (tkanina, tanka koža, tanki lim ili sl.) gustoće $f(x, y, z)$, onda pripadni plošni integral prve vrste mjeri masu toga objekta.

(b) Ako je ploha S po dijelovima glatka i sastavljena od konačno mnogo glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$ onda se njezin plošni integral prve vrste definira kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{S_1} f dS + \cdots + \iint\limits_{S_n} f dS.$$

Na kraju navedimo očiglednu linearnost plošnog integrala prve vrste:

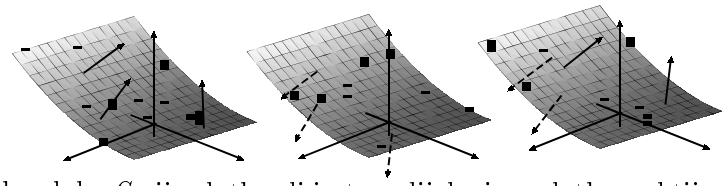
Teorem 6.4.1 *Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne funkcije, $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$\iint\limits_S (\lambda f + \mu g) dS = \lambda \iint\limits_S f dS + \mu \iint\limits_S g dS.$$

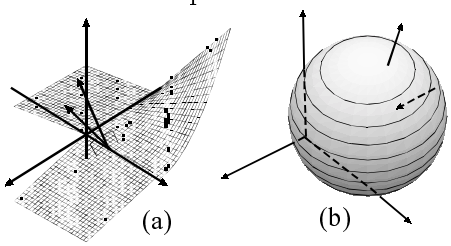
6.4.3 Plošni integral druge vrste

Kao što smo uveli dvije vrste poopćenja (jedno u skalarnom, a drugo u vektorskom polju) određenog integrala na integral po krivulji, tako ćemo uvesti i dvije vrste poopćenja dvostrukog integrala na integral po plohi. Integral skalarnog polja po plohi smo definirali u prethodnomu odjeljku, a sada ćemo se pozabaviti integralom vektorskog polja po plohi. Slično slučaju krivuljnog integrala vektorskog polja (po usmjerenoj krivulji), ovdje treba osmisliti pojam *usmjerene* plohe. Strogo definiranje toga pojma iziskuje cijelo poglavlje, pa ćemo ovdje pokušati, kratko i jednostavno, samo pojasniti o čemu se radi.

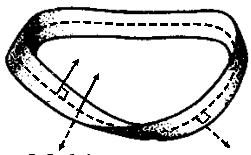
Usmjerenu plohu ćemo definirati pomoću njezinih usmjerenih tangencijalnih ravnina, a usmjerenu ravninu pomoću njezinih normalnih vektora. U tu svrhu najprije uočimo da ravnina ima *dvije strane* od kojih je jedna određena skupom svih (jediničnih) normalnih vektora $\boldsymbol{n}_0$, a druga skupom svih $-\boldsymbol{n}_0$. Odabirom jedne od tih strana, tj. ili svih $\boldsymbol{n}_0$ ili svih $-\boldsymbol{n}_0$, odabrano je jedno od dvaju (neprekidnih) **usmjerenja** (ili **orijentacija**) promatrane ravnine. (Mješoviti odabir bi tvorio neko "prekidno usmjerenje"!) Reći ćemo da je glatka ploha S **usmjerena** (ili **orijentirana**) ako joj je usmjerena svaka tangencijalna ravnina i pritom je to "usmjeravanje neprekidno", tj. opisno govoreće, u bliskim točkama su bliski i pripadni normalni vektori. Drugim riječima, ploha S je (neprekidno) usmjerena ako ima dvije strane i jedna od njih je odabrana. Smijemo zamisliti da svako (neprekidno) usmjerenje tvore svi jedinični normalni vektori što "izlaze" iz odabrane strane. ("Prekidno usmjerenje" bi tvorio bilo koji mješoviti odabir!) Pojmovi su ilustrirani ovim crtežima:



Ako ploha S nije glatka ali jest po dijelovima glatka, zahtijevamo (neprekidnu) usmjerenost svakoga glatkog dijela i njihovu međusobnu suglasnost, tj. pripadnost svih normalnih vektora točno jednoj strani te plohe (v. crtež (a) dolje). (Neobstojnost normalnih vektora u točkama "spojnih krivulja" zanemarujemo!) Poseban slučaj jesu jednostavno zatvorene plohe (sfera, rub geometrijskog tijela). Budući da one, očito, imaju dvije strane, *vanjsku* i *unutrašnju*, tako ih i usmjerujemo, tj. ili skupom svih vanjskih jediničnih normalnih vektora ili skupom svih onih unutrašnjih (v. crtež (b) dolje).



Primjer 6.4.3 (Möbiusova vrpca) Dajemo primjer glatke plohe koju se *ne* može (neprekidno) usmjeriti. Promatrajmo pravokutnik $ABCD$ pa mu zalijepimo stranicu AD sa stranicom BC i to tako da smo BC "preokrenuli" i identificirali C s A i B s D. Dobit ćemo plohu, tzv. Möbiusovu vrpcu, prikazanu na crtežu dolje.



Pokažimo da Möbiusova vrpca nije usmjeriva ploha! Odaberimo bilo koju njezinu točku T_0 i u njoj normalni vektor $\boldsymbol{n}_0$ pa "krenimo kroz njezine normalne vektore u kontinuirani obilazak" po naznačenoj (crtkanoj) jednostavno zatvorenoj krivulji. Vrativši se u polaznu točku T_0 pojavit će se normalni vektor $-\boldsymbol{n}_0$. Primijetimo da pritom nismo napuštali "odabranu stranu" te plohe (tj. nismo prelazili preko ruba), a na kraju-početku smo se našli na "drugoj strani". To, zapravo, znači da Möbiusova vrpca *ima samo jednu stranu.*

Napomena 6.4.3 Kao što smo već bili naglasili, u našim ćemo razmatranjima promatrati samo po dijelovima glatke usmjerene plohe. Pritom, ako je ploha S zadana jednadžbom $z = g(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}$, jedno usmjerenje određuje izbor jediničnih normalnih vrktora

$$\boldsymbol{n}_0(x, y) = \frac{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2}},$$

a drugo usmjerenje je onda dano vektorima $-\boldsymbol{n}_0(x,y)$. Plohu S usmjerenu vektorima $\boldsymbol{n}_0(x,y)$ označujemo sa $\overset{\curvearrowright}{S}$, a u drugomu slučaju - sa $\overset{\curvearrowleft}{S}$. Ako je ploha S jednostavno zatvorena, njezino usmjerenje vanjskim normalnim vektorima označujemo sa $\overset{\curvearrowleft}{S}$, a unutrašnjima - sa $\overset{\curvearrowright}{S}$. Napokon, ponekad ćemo rabiti i oznaku $d\boldsymbol{S}$ za $\boldsymbol{n}_0(x,y)dS$ ili $-\boldsymbol{n}_0 dS$.

Definicija 6.4.4 *Neka je $w = (w_x, w_y, w_z) : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (vektorsko polje), a $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jednadžba usmjerive glatke plohe $S \subseteq X$, pri čemu je D zatvoreno područje rub kojega je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada dvostruki integral*

$$\iint\limits_D (-w_x \tfrac{\partial g}{\partial x} - w_y \tfrac{\partial g}{\partial y} + w_z)(x,y,g(x,y)dxdy$$

nazivamo ***plošnim integralom druge vrste*** *vektorskoga polja w po usmjerenoj plohi $\overset{\curvearrowright}{S}$ i označujemo s*

$$\iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S}} (w|d\boldsymbol{S}) \quad \textit{ili} \quad \iint\limits_S (w|\boldsymbol{n}_0)dS.$$

Primijetimo da su oznake posve u skladu s definicijom jer je

$$dS = \sqrt{1 + (\tfrac{\partial g}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial g}{\partial y})^2}dxdy \quad \text{i} \quad \boldsymbol{n}_0 = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}}.$$

(U drugoj oznaci se ne ističe usmjerenje na S jer ga sadrži vektor $\boldsymbol{n}_0$.) Spomenimo da se plošni integral druge vrste $\iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S}} (w|d\boldsymbol{S})$ u fizici naziva *tokom* (ili *fluksom*) vektorskoga polja w kroz plohu $\overset{\curvearrowright}{S}$, o čemu će biti riječi poslije.

Napomena 6.4.4 Dopunjujući do sada rečeno, naglasimo i ovo: Strogo, plošne integrale bi trebalo (slično krivuljnim integralima) definirati pomoću glatke parametrizacije promatrane plohe S, tj. kao

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{D_{uv}} (f \circ r)(u,v) \cdot ||\tfrac{\partial r(u,v)}{\partial u} \times \tfrac{\partial r(u,v)}{\partial v}||dudv,$$

$$\iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S}} (w|d\boldsymbol{S}) = \iint\limits_{D_{uv}} ((w \circ r)(u,v)|(\tfrac{\partial r(u,v)}{\partial u} \times \tfrac{\partial r(u,v)}{\partial v}))dudv$$

pri čemu je $r(u,v) = (\phi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ glatka parametrizacija od S, a $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ njezini normalni vektori. Pritom, dakako, treba dakazati neovisnost o odabranoj funkciji r i ovisnost samo do na predznak o odabranom usmjerenju.

U slučaju usmjerene po dijelovima glatke plohe $\overset{\curvearrowright}{S}$, sukladno sastavljene od usmjerenih glatkih ploha $\overset{\curvearrowright}{S_1}, \cdots, \overset{\curvearrowright}{S_n}$, odgovarajući plošni integral druge vrste definiramo kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S}} (w|d\boldsymbol{S}) \overset{def.}{=} \iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S_1}} (w|d\boldsymbol{S}) + \cdots + \iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S_n}} (w|d\boldsymbol{S}).$$

Razvidno je da za plošni integral druge vrste vrijedi ovaj teorem:

Teorem 6.4.2 *Neka su $w, u : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne vektorske funkcije, $S \subseteq X$ usmjeriva po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je*

(i) $\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (w|d\boldsymbol{S}) = -\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (w|d\boldsymbol{S})$;

(ii) $\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (\lambda w + \mu u|d\boldsymbol{S}) = \lambda \iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (w|d\boldsymbol{S}) + \mu \iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (u|d\boldsymbol{S})$.

Napomena 6.4.5 Pridodajemo još jedan zapis plošnog integrala druge vrste. Zadamo li, formalno, jedinične normalne vektore na S pomoću njihovih smjerovnih kosinusa,

$$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma \equiv (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

pripadni plošni integral druge vrste ima zapis

$$\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (w|d\boldsymbol{S}) = \iint\limits_{S} (w_x\cos\alpha + w_y\cos\beta + w_z\cos\gamma)dS =$$

$$\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} w_x dydz + w_y dzdx + w_z dxdy.$$

U svezi s tim, podsjetimo na "starinsko" definiranje plošnog integrala druge vrste. Neka su dane neprekidne skalarne funkcije $P, Q, R : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, i dvostrana ploha $S \subseteq X$, te neka $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ označuje jedinični normalni vektor na odabranu stranu S^+ plohe S u bilo kojoj točki. Tada se pripadni plošni integral druge vrste "definira" kako slijedi:

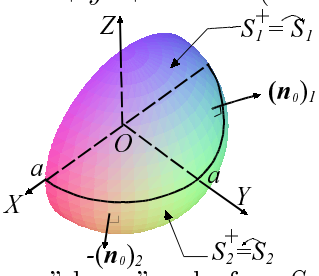
$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

(Uočimo da na desnoj strani stoji plošni integral prve vrste!)

Primjer 6.4.4 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint\limits_{S^+} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

pri čemu je S^+ "vanjska" strana "desne" polusfere S središnje sfere zadane jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (v. crtež).



Rastavimo "desnu" polusferu S na dvije plohe, $S = S_1 \cup S_2$, gdje je

$$S_{1,2} \ \dots \ z_{1,2} = g_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in D \ \dots \ \begin{cases} -a \le x \le a \\ 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}.$$

Budući da je S^+ "vanjska strana", to je $S^+ = \overset{\frown}{S}_1 \bigcup \overset{\frown}{S}_2$, pa po Teoremu 6.4.2 slijedi

$$\iint\limits_{S^+} (w|d\boldsymbol{S}) = \iint\limits_{\overset{\frown}{S}_1} (w|d\boldsymbol{S}) + \iint\limits_{\overset{\frown}{S}_2} (w|d\boldsymbol{S}) = \iint\limits_{\overset{\frown}{S}_1} (w|d\boldsymbol{S}) - \iint\limits_{\overset{\frown}{S}_2} (w|d\boldsymbol{S}).$$

Tražene parcijalne derivacije jesu

$$\frac{\partial g_{1,2}(x,y)}{\partial x} = \frac{\mp x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial g_{1,2}(x,y)}{\partial y} = \frac{\mp y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Time smo pripremili sve za za izračunavanje. Dakle,

$$\iint\limits_{S^+} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy =$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha_1 + y^2\cos\beta_1 + z^2\cos\gamma_1)dS -$$

$$\iint\limits_{S_2}(x^2\cos\alpha_2 + y^2\cos\beta_2 + z^2\cos\gamma_2)dS =$$

$$\iint\limits_{D}(x^2(-\tfrac{\partial g_1}{\partial x}) + y^2(-\tfrac{\partial g_1}{\partial y}) + z^2)dxdy - \iint\limits_{D}(x^2(-\tfrac{\partial g_2}{\partial x}) + y^2(-\tfrac{\partial g_2}{\partial y}) + z^2)dS =$$

$$\iint\limits_{D}(x^2\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + y^2\frac{2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})dxdy \overset{\text{polarne koordinate}}{=}$$

$$\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}(\frac{2\rho^3\cos^3\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + \frac{2\rho^3\sin^3\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}})\rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi}((\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\int\limits_0^a \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}})d\varphi =$$

$$\cdots = \frac{\pi a^4}{2}.$$

(Neka čitatelj izračuna ovaj plošni integral druge vrste ne rastavljajući plohu S! Uputa: Odabere li se Y-os "povlaštenom", S dopušta eksplicitnu jednadžbu $y = h(z,x)$.)

6.4.4 Ostrogradski-Gaussova formula

Kao što smo bili najavili, ovdje će se povezati trostruki integral po području $V \subset \mathbb{R}^3$ s plošnim integralom druge vrste po njegovu usmjerenu rubu $\overset{\curvearrowleft}{\partial V}$.

Teorem 6.4.3 (Teorem o divergenciji) *Neka je $w : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno diferencijabilno vektorsko polje, a $V \subseteq X$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom plohom $\overset{\curvearrowleft}{S} \equiv \overset{\curvearrowleft}{\partial V}$ usmjerenom vanjskim normalama. Tada vrijedi* Ostrogradski-Gaussova formula

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div} w dV = \iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial V}}(w|d\boldsymbol{S}) \quad (= \iint\limits_{\partial V}(w|\boldsymbol{n}_0)dS).$$

Dokaz. Zbog složenosti općega slučaja, dokazat ćemo samo poseban slučaj u kojemu usporednice s koordinatnim osima sijeku rub ∂V u najviše dvjema točkama. Dadnemo li prednost osi OZ, rub (ploha) dopušta rastav $\partial V = S_1 \bigcup S_2$, $S_1 \bigcap S_2 = \Gamma$ (krivulja), i eksplicitni zapis

$$S_{1,2} \ \dots \ z = g_{1,2}(x,y), \quad g_1(x,y) \le g_2(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

pri čemu se Γ okomito projicira na ∂D. Usmjerenje vanjskim normalama $\boldsymbol{n}_0$, tj. $\overset{\curvearrowleft}{\partial V}$, povlači usmjerenje $\overset{\curvearrowleft}{S_1}$ jediničnim normalama $-\boldsymbol{n}_{01}$ i $\overset{\curvearrowright}{S_2}$ jediničnim normalama $\boldsymbol{n}_{02}$. Primijenjujući Fubinijev teorem na trostruki integral po V, dobivamo

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial w_z(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{D}(\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial w_z(x,y,z)}{\partial z}dz)dxdy =$$

$$\iint\limits_D w_z(x,y,g_2(x,y))dxdy - \iint\limits_D w_z(x,y,g_1(x,y))dxdy.$$

Primijetimo da je $(w|\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} = w_z\boldsymbol{k} = (c_0, c_0, w_z(x,y,z))$ pa je

$$\iint\limits_{S_1}(w_z\boldsymbol{k}|\boldsymbol{n}_{01})dS = -\iint\limits_D w_z(x,y,g_1(x,y))dxdy \quad \text{i}$$

$$\iint\limits_{S_2}(w_z\boldsymbol{k}|\boldsymbol{n}_{02})dS = \iint\limits_D w_z(x,y,g_2(x,y))dxdy.$$

Slijedi,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial w_z(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{\partial V}(w_z\boldsymbol{k}|\boldsymbol{n}_0)dS.$$

Posve slično, preferirajući os OX, odnosno, os OY dobivamo

$$\iiint\limits_V \frac{\partial w_x(x,y,z)}{\partial x}dxdydz = \iint\limits_{\partial V}(w_x\boldsymbol{i}|\boldsymbol{n}_0)dS,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial w_y(x,y,z)}{\partial y}dxdydz = \iint\limits_{\partial V}(w_z\boldsymbol{j}|\boldsymbol{n}_0)dS.$$

Budući da se integrira po istom području V, odnosno ∂V, zbrajanjem slijedi

$$\iiint\limits_V (\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z})dxdydz = \iint\limits_{\partial V}(w_x\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} + w_z\boldsymbol{k}|\boldsymbol{n}_0)dS, \quad \text{tj.}$$

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} w dV = \iint\limits_{\partial V}(w|\boldsymbol{n}_0)dS = \iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial V}}(w|d\boldsymbol{S}). \quad \blacksquare$$

Napomena 6.4.6 Često se Ostrogradski-Gaussova formula zapisuje pomoću skalarnih funkcija. Neka su $P, Q, R : X \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne funkcije na okolini X zatvorenog područja $V \subset \mathbb{R}^3$, rub ∂V kojega je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena ploha. Tada je

$$\iiint\limits_V (\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z})dxdydz = \iint\limits_{\partial V}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,$$

gdje su $\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$ smjerovni kosinusi vanjske normale na plohu ∂V.

Primjer 6.4.5 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

po sferi $\overset{\curvearrowleft}{S}$ ... $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ usmjerenoj vanjskim normalama.

Razvidno je da je

$$\iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}}(w|d\boldsymbol{S}),$$

pri čemu je $w = (w_x, w_y, w_z)$, $w_x(x,y,z) = x^3$, $w_y(x.y.z) = y^3$ i $w_z(x,y,z) = z^3$, te da smijemo primijeniti Teorem o divergenciji. Prema tomu,

$$\iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}}(w|d\boldsymbol{S}) = \iiint\limits_V \operatorname{div} w dV =$$

$$\iiint\limits_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dxdydz \overset{\text{sferne koordinate}}{=} \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} 3r^2 \cdot r^2\sin\theta \cdot drd\theta d\varphi =$$

$$3\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^{\pi}(\sin\theta\int\limits_0^a r^4dr)d\theta)d\varphi = \cdots = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

Primjer 6.4.6 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint\limits_{\widehat{S}} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

po bilo kojoj po dijelovima glatkoj jednostavno zatvorenoj plohi usmjerenoj vanjskim normalnim vektorima.
Kao i u prethodnomu primjeru, primijenit ćemo Teorem 6.4.3. Dakle,

$$\iint\limits_{\widehat{S}} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} w dV = \iiint\limits_{V} (1+1+1)dV = 3O(V),$$

pri čemu je $O(V)$ obujam područja V omeđenoga plohom S. Tako smo dobili formulu

$$O(V) = \frac{1}{3} \iint\limits_{\widehat{\partial V}} xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

koja je analogon one iz Korolara 6.3.2 za ploštinu ravninskog područja D:

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint\limits_{\widehat{\partial D}} -ydx + xdy.$$

Teorem o divergenciji ima analogone za gradijent i rotaciju, o kojima ćemo sada nešto reći. Promatrajmo neprekidnu vektorsku funkciju $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, i po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu plohu $S \subseteq X$, što omeđuje zatvoreno područje $V \subseteq X$. Definirajmo (usp. Definiciju 6.1.5)

$$\iiint\limits_{V} w dV = (\iiint\limits_{V} w_x dV, \iiint\limits_{V} w_y dV, \iiint\limits_{V} w_z dV) \quad \text{i}$$

$$\iint\limits_{S} w dS = (\iint\limits_{S} w_x dS, \iint\limits_{S} w_y dS, \iint\limits_{S} w_z dS).$$

Pretpostavimo da je vektorsko polje w potencijalno na V, tj. da postoji neprekidno diferencijabilna skalarna funkcija $f : V \to \mathbb{R}$ za koju je $w = \operatorname{grad} f$. Tada je

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{grad} f dV = (\iiint\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial x} dV, \iiint\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial y} dV, \iiint\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial z} dV).$$

Uočimo da je $\operatorname{div} f\boldsymbol{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\operatorname{div} f\boldsymbol{j} = \frac{\partial f}{\partial y}$ i $\operatorname{div} f\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial z}$. pa je

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{grad} f dV = (\iiint\limits_{V} \operatorname{div} f\boldsymbol{i} dV, \iiint\limits_{V} \operatorname{div} f\boldsymbol{j} dV, \iiint\limits_{V} \operatorname{div} f\boldsymbol{k} dV) \overset{\text{T.6.4.2}}{=}$$
$$(\iint\limits_{\widehat{\partial V}} f\boldsymbol{i} dS, \iint\limits_{\widehat{\partial V}} f\boldsymbol{j} dS, \iint\limits_{\widehat{\partial V}} f\boldsymbol{k} dS).$$

Primijetimo da je vektor $(\boldsymbol{i}dS, \boldsymbol{j}dS, \boldsymbol{k}dS)$ usmjereni "ploštinski element" $\boldsymbol{n}_0 dS \equiv d\boldsymbol{S}$. Tako smo izveli tzv. *Teorem o gradijentu*:

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{grad} f dV = \iint\limits_{\widehat{\partial V}} f d\boldsymbol{S}.$$

Na sličan se način dobiva i tzv. *Teorem o rotaciji*:

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{rot} w dV = \iint\limits_{\widehat{\partial V}} (\boldsymbol{n}_0 \times w) dS.$$

6.4.5 Stokesova formula

Sjetimo se Greenove formule (v. Teorem 6.3.4)

$$\iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint\limits_{\widehat{\partial D}} Pdx + Qdy$$

kojom se dvostruki integral po ravninskom područje D prevodi na krivuljni integral druge vrste po njegovu rubu. Stavimo li $w = (P, Q)$, dobivamo njezin vektorski zapis:

$$\iint_D (\iiint_V \operatorname{rot} w|\boldsymbol{k})dxdy = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} (w|d\boldsymbol{r}) \quad (= \oint_{\partial D} (w|\mathbf{t}_0)ds).$$

Stokesova formula će biti poopćenje Greenove formule na prostorno vektorsko polje w, plohu $S \subset \mathbb{R}^2$ i njezin rub ∂S. Prije samoga iskaza treba definirati sukladno usmjerenje plohe i njezina ruba.

Kao što smo se već dogovorili, plohu S zadanu jednadžbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, usmjerenu jediničnim normalnim vektorima

$$\boldsymbol{n}_0(x, y) = \frac{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2}}$$

označujemo sa $\overset{\curvearrowright}{S}$, a usmjerenu normalama $-\boldsymbol{n}_0(x, y)$ - sa $\overset{\curvearrowleft}{S}$. Usmjerimo rub ∂D (po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu ravninsku krivulju) područja D pozitivno, tj. kao $\overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ ("pravilo desne ruke" kad je palac usmjeren kao vektora $\boldsymbol{k}$), pa mu pridijelimo parametrizaciju (s porastom parametra)

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial D} \ \ldots \ x = \phi(t),\ y = \psi(t), \quad t \in [a, b].$$

Budući da se rub ∂S (po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja) okomito projicira na ∂D i S dopušta parametrizaciju

$$S \ \ldots \ r(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D,$$

to se usmjerenje s $\overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ "prenosi" na ∂S (porastom parametra), označimo ga kao $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$, tj.

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial S} \ \ldots \ r(\phi(t), \psi(t)) \equiv \rho(t) = (\phi(t), \psi(t), g(\phi(t), \psi(t))), \quad t \in [a, b].$$

Pritom govorimo da su ploha $\overset{\curvearrowright}{S}$ i njezin rub $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$ **sukladno usmjereni**. Dakako, u slučaju negativnoga usmjerenja $\overset{\curvearrowright}{\partial D}$ dobivamo odgovarajuće usmjereni rub $\overset{\curvearrowright}{\partial S}$, pa i tada kažemo da su ploha $\overset{\curvearrowleft}{S}$ i njezin rub $\overset{\curvearrowright}{\partial S}$ sukladno usmjereni. Primijetimo da se u oba slučaja radi o poštivanju "pravila desne ruke" kad je palac usmjeren kao normalni vektor.

Teorem 6.4.4 (Stokesov teorem) *Neka je $w : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno diferencijabilna vektorska funkcija, $\overset{\curvearrowright}{S} \subseteq X$ usmjerena po dijelovima glatka ploha, a $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$ sukladno joj usmjereni rub koji je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada vrijedi* Stokesova formula

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{S}} (\operatorname{rot} w|d\boldsymbol{S}) = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\partial S}} (w|d\boldsymbol{r}) \quad (= \oint_{\partial S} (w|\mathbf{t}_0)ds).$$

Dokaz. Opet ćemo, zbog složenosti općeg slučaja, dakazati samo poseban slučaj u kojemu je funkcija w dvaput derivabilna, a S i ∂S su prikladno odabrane i glatke. Neka je $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, eksplicitna jednadžba plohe S, odnosno,

$$S \ \ldots \ r(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

njezina parametarska jednadžba. Tada se S okomito projicira na D. Neka su $\overset{\frown}{S}$, $\overset{\frown}{\partial S}$ i $\overset{\frown}{\partial D}$ usmjereni u skaldu s pretpostavkom, te neka je dana parametrizacija

$\overset{\frown}{\partial D}$ ... $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\quad t \in [a, b]$.

Tada je

$\overset{\frown}{\partial S}$ ... $r(\phi(t), \psi(t)) = (\phi(t), \psi(t), g(\phi(t), \psi(t))), \quad t \in [a, b]$.

parametrizacija za $\overset{\frown}{\partial S}$. Izračunajmo pripadni krivuljni integral druge vrste:

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{\partial S}} (w|d\boldsymbol{r}) = \int\limits_a^b (w(\phi(t), \psi(t), g(\phi(t), \psi(t)))|r'(\phi(t), \psi(t)))dt =$$

$$\int\limits_a^b (w(\phi(t), \psi(t), g(\phi(t), \psi(t)))|(\tfrac{\partial r(x,y)}{\partial x}\phi'(t) + \tfrac{\partial r(x,y)}{\partial y}\psi'(t)))dt.$$

Stavimo li

$P(x, y) \equiv (w(x, y, g(x, y))|\frac{\partial r(x,y)}{\partial x})$ i $Q(x, y) \equiv (w(x, y, g(x, y))|\frac{\partial r(x,y)}{\partial y})$,

dobivamo ($dx = \phi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$)

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{\partial S}} (w|d\boldsymbol{r}) = \oint_{\overset{\frown}{\partial D}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \overset{\text{Greenova formula}}{=}$$

$$\iint\limits_D (\tfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \tfrac{\partial P(x,y)}{\partial y})dxdy =$$

$$\iint\limits_D (\tfrac{\partial}{\partial x}(w(x, y, g(x, y))|\tfrac{\partial r(x,y)}{\partial y}) - \tfrac{\partial}{\partial y}(w(x, y, g(x, y))|\tfrac{\partial r(x,y)}{\partial x}))dxdy \overset{(*)}{=}$$

$$\iint\limits_D (\nabla \times w|\tfrac{\partial r}{\partial x} \times \tfrac{\partial r}{\partial y})dxdy,$$

pri čemo smo iskoristili jednakost

(*) $\quad (\nabla \times w|\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(w|\frac{\partial r}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(w|\frac{\partial r}{\partial x})$.

(Neka dokazivanje relacije (*) bude čitatelju korisna vježba!) Budući da je

$\nabla \times w \equiv \operatorname{rot} w$ i

$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}) \times (0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}) = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1) = \boldsymbol{n}_0 dS \equiv d\boldsymbol{S}$,

to napokon dobivamo traženu formulu $\oint\limits_{\overset{\frown}{\partial S}} (w|d\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (\operatorname{rot} w|d\boldsymbol{S})$. ■

Napomena 6.4.7 Kako za Greenovu tako se i za Stokesovu formulu često rabi skalarni zapis. U tu svrhu, neka su $P, Q, R : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno derivabilne funkcije, a $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha s rubom ∂S po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada se pripadna Stokesova formula zapisuje kako slijedi:

$$\oint\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\iint\limits_S ((\tfrac{\partial R}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\tfrac{\partial P}{\partial z} - \tfrac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma)dS,$$

pri čemu su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ smjerovni kosinusi normalnih vektora na plohu S sukladno usmjereni s rubom ∂S.

Primjer 6.4.7 Izračunajmo cirkulaciju vektorskog polja

$(x,y,z) \mapsto w(x,y,z) = (x^2y^3, 1, z)$
duž usmjerenoga ruba $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$ plohe S zadane jednadžbom $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$.

Najprije, iz dane jednadžbe slijedi
$S \ldots\ z = g(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2.$
Budući da sukladno usmjerenje (s rubom $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$) na S znači $\overset{\curvearrowright}{S}$ usmjerenu normalama $\boldsymbol{n}_0$ (s obzirom na g), to

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

povlači

$$\boldsymbol{n}_0(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{i} \quad dS = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Tako dobivamo

$$\oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial S}} (w|d\boldsymbol{r}) = \oint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial S}} w_x dx + w_y dy + w_z dz \overset{\text{Stokesova formula}}{=}$$

$$\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS =$$

$$\iint\limits_D \left((0-0)\frac{x}{\sqrt{2}} + (0-0)\frac{y}{\sqrt{2}} + (0-3x^2y^2)\frac{\sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$-3\iint\limits_D x^2y^2dxdy \overset{\text{polarne koordinate}}{=} -3\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi\sin^2\varphi\int\limits_0^2 \rho^5 d\rho)d\varphi = -\pi.$$

6.4.6 Vježbe

1. Izračunati ploštinu onoga dijela eliptičnoga paraboloida $z \equiv g(x,y) = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2}$ (v. §2.3.4(35)) što leži nad područjem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.
2. Izračunati $\iint\limits_S (x+y)dS$ ako je S kružni stožac zadan jednadžbom $z \equiv g(x,y) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ i nejednadžbama $0 \leq z \leq b$ (v. §2.3.4(37)).
3. Izračunati

(a) $\iint\limits_{\overset{\curvearrowright}{S}} (w|d\boldsymbol{S})$ ako je $w(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ i $\overset{\curvearrowright}{S}$ "vanjska" strana dijela tetraedrova ruba zadanoga ravninama $x=0$, $y=0$, i $x+y+z=1$;

(b) $\iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} zdxdy$ ako je S elipsoidova polovica $z \equiv g(x,y) = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ (v. §2.3.4(32)).

4. Izračunati

(a) $\iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} (w|d\boldsymbol{S})$ ako je $w(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ i $S = \partial V$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x,y,z \leq a\}$;

(b) $\iint\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma}{x^2+y^2+z^2}dS$ ako je S središnja sfera polumjera a (v. §2.3.4(31)), a $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ su smjerovni kosinusi unutrašnjih normalnih vektora.

5. Izračunati

(a) $\oint\limits_{\widehat{\partial S}} (w|d\boldsymbol{r})$ ako je $w(x,y,z) = (x-z, z-x, x-y)$ i $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\, x+z=1\}$;

(b) $\oint\limits_{\widehat{\partial S}} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$ ako je $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2,\, z=x+y\}$.

Poglavlje 7

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

7.1 RJEŠENJE - OBSTOJNOST I JEDINSTVENOST

Određujući integral dane funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ (v. §4.2), rješavamo, zapravo, jednadžbu $F'(x) = f(x)$ s nepoznanicom - funkcijom $F : X \to \mathbb{R}$. Pod nekim uvjetima je funkcija F jednoznačno određena do na pribrojničku konstantu. Promatrana jednadžba $F'(x) = f(x)$, odnosno, ekvivalentna joj jednadžba $dF(x) = f(x)dx$ spada u tzv. *diferencijalne jednadžbe.*

7.1.1 O diferencijalnim jednadžbama općenito

Pod **diferencijalnom jednadžbom** smatramo svaku jednadžbu koja analitičkim zapisom povezuju nepoznate realne funkcije, neke derivacije tih funkcija i njihove varijable. One se vrlo često "same od sebe" pojavljuju kao matematički zapisi nekih prirodnih zakona što upravljaju živim i neživim svijetom oko nas (u geometriji, fizici, kemiji, biologiji, tehnici i tehnologiji, medicini itd.). Ako je red najviše derivacije što se pojavljuje u diferencijalnoj jednadžbi broj $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je ta diferencijalna jednadžba **n-toga reda**. Reći ćemo da je diferencijalna jednadžba **obična** ako se u njoj pojavljuje samo jedna nepoznata funkcija, koja se može svesti na funkciju jedne varijable. Ako se u jednadžbi pojavljuje neka parcijalna derivacija nepoznate funkcije više varijabla, govorimo o **parcijalnoj** diferencijalnoj jednadžbi. Razmatra li se istodobno više diferencijalnih jednadžaba s istim nepoznatim funkcijama, govorimo o **sustavu** diferencijalnih jednadžba. Sustav od m, $m \in \mathbb{N}$, običnih diferencijalnih jednadžaba prvoga reda s m nepoznatih funkcija nazivamo sustavom **reda** m. **Rješenje** diferencijalne

jednadžbe je svaka funkcija koja joj uvrštenjem identički udovoljava. Reći ćemo da je diferencijalna jednadžba **riješena** ako su određena sva njezina rješenja.

Budući da ćemo ovdje razmatrati samo (neke jednostavnije) obične diferencijalne jednadžbe, definirat ćemo ih eksplicitno.

Definicija 7.1.1 *Neka $\mathbb{R}^X$ označuje skup svih funkcija iz podskupa $X \subseteq \mathbb{R}$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, neka je $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ ulaganje, te neka je $F : \mathbb{R}^X \times \cdots \times \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ funkcija od $n+2$ varijable, $n \in \mathbb{N}$. Svaku jednadžbu*

$$F(w) = c_0, \quad w \in \{(i, f, f', \cdots, f^{(n)}) \mid f \in \mathbb{R}^X, f^{(n)} \neq c_0\} \subseteq (\mathbb{R}^X)^{n+2},$$

gdje je $c_0 : X \to \mathbb{R}$ nulkonstantna funkcija, nazivamo ***običnom diferencijalnom jednadžbom n-toga reda.*** ***Rješenjem*** *te diferencijalne jednadžbe smatramo svaku n puta derivabilnu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ koja joj udovoljava, tj. za koju vrijedi*

$$(\forall x \in X) \quad F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

(Ponekad se i sam taj uvjet $F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0$, odnosno zapis $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$, $y \equiv f(x)$, naziva običnom diferencijalnom jednadžbom.)

Primjer 7.1.1 (a) Jednadžba $y' - 2x = 0$ je obična diferencijalna jednadžba prvoga reda, a njezino rješenje je svaki polinom f_c, $y = f_c(x) = x^2 + c$;

(b) $y'' = 6x + 2$ je obična diferencijalna jednadžba drugoga reda, a rješenje joj je svaki polinom f_{c_1,c_2}, $y = f_{c_1,c_2}(x) = x^3 + x^2 + c_1 x + c_2$;

(c) Sustav običnih diferencijalnih jednadžaba $x' = y + t$, $y' = t$, s nepoznatim funkcijama $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$, ima za rješenje svaki funkcijski par $\phi(t) = \frac{1}{6}(t^3 + 3t^2 + c_1 t + c_2)$, $\psi(t) = \frac{1}{6}(3t^2 + c_1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, jer je

$$x' = \tfrac{1}{2}t^2 + t + \tfrac{c_1}{6} = \tfrac{1}{6}(3t^2 + c_1) + t = y + t \quad \text{i} \quad y' = \tfrac{1}{6} \cdot 6t = t.$$

Skup svih rješenja dane diferencijalne jednadžbe (sustava diferencijalnih jednadžaba) nazivamo njezinim (njegovim) **općim rješenjem**, a svako pojedino rješenje - **posebnim** ili **partikularnim rješenjem**. Da bi se odredilo neko posebno rješenje, obično se postave dodatni zahtjevi, tzv. **početni uvjet** kojemu ono mora udovoljavati. Ako je opće rješenje poznato onda se iz njega, temeljem početnog uvjeta, lako izdvaja traženo posebno rješenje. Za običnu diferencijalnu jednadžbu prvoga reda obično se zahtijeva da posebno rješenje ima zadanu vrijednost u odabranoj točki, a u slučaju jednadžbe drugoga reda zadaje se i derivacijska vrijednost u odabranoj točki.

Primjer 7.1.2 Jednostavno je provjeriti da su rješenja u Primjerima 7.1.1 (a), (b) i (c) opća rješenja tih običnih diferencijalnih jednadžaba (sustava), tj. da se birajući konstanate $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ može dobiti svako posebno rješenje. Pretpostavimo, primjerice, da je $y = f(x)$ neko (bilo koje) posebno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - 2x = 0$, tj. da je $f'(x) = 2x$. Trebamo dokazati da je

$f \in \{f_c \mid f_c(x) = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}\}$.

Budući da je, za svaki $c \in \mathbb{R}$, $f_c'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, to se funkcije f_c i f razlikuju do na pribrojničku konstantu (v. Korolar 4.1.1)). Dakle, $f(x) = f_c(x) + k$ za neki $k \in \mathbb{R}$, tj.

$f(x) = x^2 + c + k = x^2 + c_1, \quad c_1 \equiv c + k \in \mathbb{R},$

što smo i trebali dokazati. Odredimo ono posebno rješenje te jednadžbe koje u točki $x = 0$ ima vrijednost $y = 1$. Uvrštenjem danoga početnog uvjeta u opće rješenje dobivamo

$1 = f_c(0) = 0^2 + c, \quad \text{tj.} \quad c = 1,$

pa je traženo posebno rješenje $y \equiv f(x) = x^2 + 1$.

Ako je diferencijalnoj jednadžbi iz Primjera 7.1.1(b) postavljen početni uvjet

$x = 0,\ y = 1,\ y' = 2,$

onda uvrštenjem u opće rješenje dobivamo

$1 = f_{c_1.c_2}(0) = 0^3 + 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2$ i $2 = f'_{c_1,c_2}(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c_1$, tj. $c_2 = 1$ i $c_1 = 2$. Slijedi traženo posebno rješenje $y \equiv f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Ako je, napokon, u Primjeru 7.1.1(c) početni uvjet $t = 1$, $x = 1$, $y = 0$, onda iz oćega rješenja $x \equiv \phi(t) = \frac{1}{6}(t^3 + 3t^2 + c_1 t + c_2)$, $y \equiv \psi(t) = \frac{1}{6}(3t^2 + c_1)$ toga sustava dobivamo posebno rješenje $x \equiv \phi(t) = \frac{1}{6}(t^3 + 3t^2 - 3t + 5)$, $y \equiv \psi(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

7.1.2 Picardov teorem

Rješavanje diferencijalne jednadžbe je, općenito, vrlo zahtjevni zadatak. Za pojedine vrste diferencijalnih jednadžaba postoje kriteriji - dostatni uvjeti koji jamče obstojnost njihovih rješenja. Ovdje ćemo upoznati kriterije za rješivost diferencijalnih jednadžaba što dopuštaju zapis

$y' = g(x, y),$

pri čemu je $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, dana funkcija koja udovoljava nekim dodatnim uvjetima, a traženo rješenje je nepoznata funkcija $y \equiv f(x)$ (jedne varijable). Osim toga, vidjet ćemo kako se ti kriteriji poopćuju na rješivost sustava običnih diferencijalnih jednadžaba n-tog reda

$$\begin{aligned} y_1' &= g_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ &\cdots \\ y_n' &= g_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

pri čemu se traže nepoznate funkcije $y_i \equiv f_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$. Takav "kvadratni" sustav nazivamo **normalnim sustavom** običnih diferencijalnih jednadžaba.

Teorem 7.1.1 (Picardov teorem) *Neka su dane funkcija $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, i točka $(x_0, y_0) \in X$ i neka postoji pravokutnik $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq X$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, takav da vrijedi*

(i) *g je neprekidna na P;*

(ii) *g udovoljava tzv. Lipschitzovu uvjetu na P po varijabli y, tj.*

$(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall (x_1, y_1), (x_1, y_2) \in P)\ |g(x_1, y_1) - g(x_1, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$

Tada diferencijalna jednadžba, s početnim uvjetom,

$$y' = g(x, y), \quad x = x_0,\ y = y_0,$$

ima točno jedno rješenje koje je neprekidna funkcija

$$f : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}, \quad y_0 = f(x_0),$$

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, *a* $M = \max\{|g(x,y)| \mid (x,y) \in P\}$. (*Pozitivni broj* L *nazivamo Lipschitzovom konstantom.*)

Dokaz. Najprije primijetimo da je svako rješenje

$$f : A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}, \quad y_0 = f(x_0),$$

diferencijalne jednadžbe

$$y' = g(x, y), \quad x = x_0,\ y = y_0,$$

na skupu A, tj. $f'(x) = g(x, f(x))$ za svaki $x \in A$ i $f(x_0) = y_0$, ujedno rješenje (integralne) jednadžbe

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y)dt, \quad x \in A.$$

Dakle, za traženo rješenje $y = f(x)$, ako postoji, mora vrijediti

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))dt, \quad x \in A,$$

u što se je lako uvjeriti integrirajući obje strane jednakosti $f'(t)dt = g(t, f(t))dt$ na segmentu $[x_0, x]$. Vrijedi, međutim, i obratno, tj. svako rješenje navedene integralne jednadžbe jest i rješenje polazne diferencijalne jednadžbe. Zaista, deriviranjem toga rješenja, tj. jednakosti

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))dt, \quad \text{dobivamo}$$

$$f'(x) = (y_0)' + (G(x, f(x)) - G(x_0, f(x_0)))' = g(x, f(x)),$$

gdje je G neka primitivna funkcija od g. Prema tomu, ekvivalentno je riješiti polaznu diferencijalnu jednadžbu ili navedenu integralnu jednadžbu, pa ćemo ovdje riješiti tu integraalnu jednadžbu. Dokazat ćemo da se njezino rješenje f može dobiti kao granična vrijednost funkcijskoga niza (f_n),

$$f_n : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f_{n-1}(t))dt,$$

pri čemu je $f_0 = c_{y_0}$, te da je ono jedinstveno! Dokaz ćemo raščlaniti na ovih pet koraka:

1^0 definiranje funkcijskoga niza (f_n) na $[x_0 - h, x_0 + h]$;

2^0 dokaz da je svaka funkcija f_n neprekidna i da je $f_n(x_0) = y_0$;

3^0 dokaz da niz (f_n) jednoliko konvergira;

4^0 dokaz da je $\lim(f_n) \equiv f$ rješenje integralne jednadžbe;

5^0 dokaz da je f jedino rješenje te jednadžbe.

1^0 Dosta je potvrditi da je, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, vrijednost $f_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$! Najprije,

$$|f_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} g(t, y_0)dt| \le |\int_{x_0}^{x} |g(t, y_0)|dt| \le |\int_{x_0}^{x} Mdt| =$$

$$M|x - x_0| \le Mh \le M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

tj. $f_1(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Sada matematičkom indukcijom, lako dokazujući da iz $f_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ slijedi $f_{n+1}(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, zaključujemo da je niz (f_n) dobro definiran.

2^0 Da je $f_n(x_0) = y_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi iz

$\int\limits_{x_0}^{x} g(t, f_{n-1}(t))dt = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, čim je $x = x_0$.

Neprekidnost svake funkcije f_n se lako dokazuje matematičkom indukcijom i primjenom Teorema 4.3.2 i Teorema 4.3.4.

3^0 Promatrajmo funcijski red

$\sum u_n, \quad u_1 = f_1 - f_0 = f_1,\ u_{n+1} = f_{n+1} - f_n,\ n \in \mathbb{N}.$

Uočimo da je k-ti djelomični zbroj s_k toga reda funkcija f_k. Naime,

$s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} (f_n - f_{n-1}) = f_k,\ k \in \mathbb{N}.$

Procijenimo sada apsolutnu vrijednost $|u_n(x)|$ svakoga člana u_n u bilo kojoj točki $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$:

$$|u_1(x)| = |f_1(x)| = |y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} g(t, y_0)dt| \leq |y_0| + |\int\limits_{x_0}^{x} g(t, y_0)dt| \leq$$
$$|y_0| + M|x - x_0| \leq |y_0| + Mh;$$
$$|u_{n+1}(x)| = |f_{n+1}(x) - f_n(x)| =$$
$$|(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} g(t, f_n(t))dt) - (y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} g(t, f_{n-1}(t))dt)| =$$
$$|\int\limits_{x_0}^{x} (g(t, f_n(t)) - g(t, f_{n-1}(t)))dt| \leq$$
$$|\int\limits_{x_0}^{x} |g(t, f_n(t)) - g(t, f_{n-1}(t))|dt| \overset{\text{Lipschitzov uvjet}}{\leq} |\int\limits_{x_0}^{x} L|f_n(t) - f_{n-1}(t)|dt|.$$

Primijetimo da je tako

$$|u_2(x)| = |f_2(x) - f_1(x)| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} L|f_1(t) - f_0(t)|dt| =$$
$$L|\int\limits_{x_0}^{x} |\int\limits_{x_0}^{t} g(\tau, y_0)d\tau|dt| \leq L|\int\limits_{x_0}^{x} |\int\limits_{x_0}^{t} |g(\tau, y_0)|d\tau|dt| \leq$$
$$ML|\int\limits_{x_0}^{x} |\int\limits_{x_0}^{t} d\tau|dt| = ML|\int\limits_{x_0}^{x} |t - x_0|dt| = ML \cdot [\tfrac{|t-x_0|^2}{2}]_{x_0}^{x} = ML \cdot \tfrac{|x-x_0|^2}{2}.$$

Posve slično se dobije

$$|u_3(x)| = |f_3(x) - f_2(x)| \leq L|\int\limits_{x_0}^{x} |f_2(t) - f_1(t)|dt| \leq$$
$$\tfrac{ML^2}{2}|\int\limits_{x_0}^{x} |t - x_0|^2 dt| = \tfrac{ML^2}{2} \cdot \tfrac{|x-x_0|^3}{3} = ML^2 \cdot \tfrac{|x-x_0|^3}{3!}.$$

Sada se matematičkom indukcijom lako dokaže valjanost ove procjene:

$|u_{n+1}(x)| = |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq ML^n \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq ML^n \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$

Prema tomu, za svaki $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, konvergentni realni red

$(|y_0| + Mh) + ML\frac{h^2}{2!} + \cdots + ML^n\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$

majorira realni red $\sum |u_n(x)|$. Slijedi, po Teoremu 3.2.17, da funkcijski red

$\sum u_n$ jednoliko konvergira prema nekoj funkciji $f \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$. Štoviše, Korolar 3.3.5 jamči da je funkcija f neprekidna. Budući da je

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n = f_k, \quad \text{to je i} \quad \lim(f_n) = \lim(s_k) = f,$$

pa i funkcijski niz (f_n) jednoliko konvergira prema funkciji f (v. Definiciju 3.2.15).

4^0 Da bi funkcija f bila traženo rješenje treba a i dosta je dokazati:

$$\lim(\int_{x_0}^{x} g(t, f_{n-1}(t))dt) = \int_{x_0}^{x} g(t, \lim(f_{n-1})(t))dt \quad (= \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))dt),$$

odnosno,

$$\lim(\int_{x_0}^{x} (g(t, f_{n-1}(t)) - g(t, f(t)))dt) = 0.$$

U tu svrhu, dosta je dokazati ovu nejednakost:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \ |\int_{x_0}^{x} |g(t, f_{n-1}(t)) - g(t, f(t))|dt| < \epsilon.$$

Pokažimo, najprije, da je $(x, f(x)) \in P$, tj. da je za svaki $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ vrijednost $f(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$! Budući da niz (f_n) jednoliko konvergira i $f_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, za svaki x i svaki n, to je, za svaki $\epsilon > 0$ i dovoljno veliki n, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Slijedi da je

$$f(x) \in \langle f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon\rangle \subseteq \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle, \quad \text{za svaki } \epsilon > 0,$$

što povlači $f(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Sada za dani $\epsilon > 0$ odaberimo, po Lischitzovu uvjetu za g i jednolikoj konvergenciji $(f_n) \to f$, $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{Lh}$ i dovoljno veliki n tako da bude

$$|\int_{x_0}^{x} |g(t, f_{n-1}(t)) - g(t, f(t))|dt| < |\int_{x_0}^{x} L|f_{n-1}(t) - f(t)|dt| \leq |\int_{x_0}^{x} L\epsilon_1 dt| =$$
$$= L\epsilon_1|x - x_0| \leq Lh\epsilon_1 = \epsilon.$$

5^0 Pretpostavimo da, pored f, polazna integralna jednadžba ima i rješenje $\tilde{f} : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$. Tada je

$$\tilde{f}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, \tilde{f}(t))dt, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], \quad \text{što povlači}$$

$$|\tilde{f}_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} g(t, \tilde{f}(t))dt| \leq |\int_{x_0}^{x} |g(t, \tilde{f}(t))|dt| \leq |\int_{x_0}^{x} Mdt| = M|x - x_0|.$$

Nadalje,

$$|\tilde{f}(x) - f_1(x)| \leq |\int_{x_0}^{x} |g(t, \tilde{f}(t)) - g(t, f_0(t))|dt| \leq L|\int_{x_0}^{x} |\tilde{f}(t) - y_0|dt| \leq$$
$$ML|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|dt| = ML\frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Indukcijom zaključujemo da, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, vrijedi

$$|\tilde{f}(x) - f_n(x)| \leq |\int_{x_0}^{x} |g(t, \tilde{f}(t)) - g(t, f_{n-1}(t))|dt| \leq ML^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Napokon, zbog

$\lim\limits_n(ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}) = \frac{M}{L}\lim\limits_n(\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}) \leq \frac{M}{L}\lim\limits_n(\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}) = 0,$
slijedi $\tilde{f}(x) = \lim\limits_n(f_n(x))$ za svaki x, tj. $\tilde{f} = f$. ■

Napomena 7.1.1 Primijetimo da smo u koraku 5^0 dobili i ovu korisnu procjenu:

$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ona omogućuje da se zadovoljimo i nekim približnim rješenjem, nekom funkcijom f_n, i da pritom znamo kolika je apsolutna pogrješka. U praksi se, dakako, postupa upravo na taj način (v. 7.1.3 Vježbe, Zadatke 2. i 3.). Rješavanje diferencijalne jednadžbe načinom provedenim u dokazu Picardove teorema naziva se *metodom postupnog približavanja.*

Zahtijevamo li da rješenje f diferencijalne jednadžbe $y' = g(x, y)$ udovoljava početnomu uvjetu $x = x_0$, $y = c$ i da pritom bude $(x, c) \in [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, pri čemu je udovoljeno uvjetima Picardova teorema, onda za različite vrijednosti parametra c, uz isti x_0, dobivamo različita posebna rješenja. Ako sva rješenja polazne jednadžbe dopuštaju jedinstveni analitički zapis, koji tada smijemo zvati *općim rješenjem*, onda se u tomu zapisu pojavljuje jedan *slobodni parametar* vrijednost kojega, za pojedino posebno rješenje, određujemo uvrštenjem danoga početnog uvjeta u to opće rješenje. Općenito, analitički zapis općeg rješenja diferencijalne jednadžbe n-tog reda sadrži n slobodnih parametara, a isto tako i zapis općeg rješenja normalnoga sustava od n jednadžaba prvoga reda.

Iskažimo i poopćenje Picardova teorema na sustav diferencijalnih jednadžaba.

Teorem 7.1.2 *Neka su dane funkcije $g_i : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \cdots, n$, i točka $(x_0, y_0^1, \cdots, y_0^n) \in X$ i neka postoji kvadar*

$K = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0^1 - b, y_0^1 + b] \times \cdots \times [y_0^n - b, y_0^n + b] \subseteq X, \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$

takav da vrijedi

(i) *svaka g_i je neprekidna na K, $i = 1, \cdots, n$;*

(ii) *$g_1, \cdots, g_n$ udovoljavaju Lipschitzovu uvjetu na K po varijablama $y_1, \cdots, y_n$, tj.*

$(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall i = 1, \cdots, n)(\forall (x_1, y_1^1, \cdots, y_1^n), (x_1, y_2^1, \cdots, y_2^n) \in K)$

$|g_i(x_1, y_1^1, \cdots, y_1^n) - g_i(x_1, y_2^1, \cdots, y_2^n)| \leq L \sum\limits_{j=1}^{n} |y_1^j - y_2^j|.$

Tada sustav diferencijalnih jednadžaba

$y_1' = g_1(x, y^1, \cdots, y^n)$

$\cdots$

$y_n' = g_n(x, y^1, \cdots, y^n)$

s početnim uvjetom $x = x_0$, $y^1 = y_0^1$, $\cdots$, $y^n = y_0^n$
ima točno jedno rješenje $(f_1, \cdots, f_n)$, pri čemu su
$f_i : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \cdots, n$, neprekidne funkcije,

$y_0^i = f_i(x_0)$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, a
$M = \max\{|g_i(x, y^1, \cdots, y^n)| \mid (x, y^1, \cdots, y^n) \in K,\ i = 1, \cdots, n\}$.

Napomenimo da se diferencijalna jednadžba n-tog reda
$$y^{(n)} = g(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$
zamjenama $u^1 \equiv y$, $u^{i+1} \equiv y^{(i)}$, $i = 1, \cdots, n-1$, zbog $(u^{(i)})' = y^{(i)} = u^{i+1}$, svodi na sustav
$$\begin{aligned}
&(u^1)' = u^2\\
&\cdots\\
&(u^{n-1})' = u_n\\
&(u^n)' = g(x, u^1, \cdots, u^n).
\end{aligned}$$
Prema tomu, pod danim početnim uvjetom
$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$
ona će imati jedinstveno rješenje čim na nekoj okolini točke $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pridruženi sustav udovoljava uvjetima Teorema 7.1.2.

U idućim ćemo se odjeljcima baviti nekim jednostavnim vrstama običnih diferencijalnih jednadžaba prvoga i drugoga reda koje su **elementarno rješive**, tj. rješenja kojih dopuštaju analitičke zapise što sadrže najviše konačno mnogo elementarnih funkcija i konačno mnogo neodređenih integrala (ovi smiju biti i elementarno nerješivi). Obstojnost i jedinstvenost pripadnih rješenja ne ćemo provjeravati Picardovim teoremom, nego raspravom o dobivenim rezultatima. Usput ćemo se osvrnuti i na sustave dviju običnih diferencijalnih jednadžaba prvoga reda pokazujući kako se neki od njih svode na lako rješive diferencijalne jednadžbe drugoga reda.

7.1.3 Vježbe

1. Postaviti diferencijalnu jednadžbu rješenje koje je
(a) $y \equiv f(x) = ce^{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $x^2 - cy^2 = 2y$; (c) $cy = \sin cx$ (c konstanta).
2. Riješiti diferencijalnu jednadžbu, s početnim uvjetom,
$$y' = x + y, \quad x = 0, y = 0,$$
metodom postupnog približavanja, pa dobiveno rješenje usporediti s "očitim" rješenjem $y \equiv f(x) = e^x - x - 1$ (v. npr. §7.2.3). Koje bi približno rješenje f_n na pravokutniku $|x| \le 2|, |y| \le 1$ udovoljilo točnosti do 10^{-5}?
Rješenje: Prvo provjerimo je li udovoljeno uvjetima Picardova teorema! Funkcija $(x, y) \mapsto g(x, y) = x + y$ je neprekidna (na cijelomu $\mathbb{R}^2$), pa je neprekidna i na svakom pravokutniku $P = [-a, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}^+$. Osim toga,
$$|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| = |y_1 - y_2|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$
što znači da je ispunjen Lipschtzov uvjet s konstantom $L = 1$. Polaznu aproksimaciju f_0 daje početni uvjet pa je $f_0 = c_0$, tj. $f_0(x) = 0$ za svaki $x \in [-h, h] \subseteq [-a, a]$, pri čemu je
$$h = \min\{a, \tfrac{b}{M}\}, \quad M = \max\{|g(x, y)| \mid (x, y) \in P\} = a + b.$$

Dalje postupamo kao u dokazu Picardova teorema. Dakle,

$$f_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f_0(t))dt = \int_0^x (t+0)dt = \frac{x^2}{2};$$

$$f_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f_1(t))dt = \int_0^x (t + \frac{t^2}{2})dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!};$$

$\cdots$ (itd. indukcijom)

$$f_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f_{n-1}(t))dt = \int_0^x (\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!})dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Traženo rješenje je funkcija $f = \lim(f_n) : [-h, h] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, pri čemu taj funkcijski red jednoliko konvergira na segmentu $[-h, h]$. Budući da je $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (v. Primjer 4.1.16), to je $f(x) = e^x - x - 1$ elementarno rješenje.

Omeđimo li razmatranje na pravokutnik $P = [-2, 2] \times [-1, 1]$, dobivamo $M = 2 + 1 = 3$ i $h = \min\{2, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$, tj. rješenje f na segmentu $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Da bi približno rješenje f_n ($n =?$) udovoljilo željenoj točnosti do 10^{-5}, treba biti (v. Napomenu 7.1.1)

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} < \epsilon = 10^{-5}.$$

U ovomu primjeru ($L = 1$, $M = 3$, $h = \frac{1}{3}$) dobivamo nejednadžbu

$$\frac{3}{3^{n+1}(n+1)!} < 10^{-5}, \quad \text{koja daje} \quad n + 1 > 5, \text{ tj. } n \geq 5.$$

Smijemo, dakle, za približno rješenje uzeti petu aproksimaciju $f_5(x) = \sum_{k=1}^{5} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ i biti sigurni da će, za svaki $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, pogrješka biti manja od $0,00001$.

3. Metodom postupnoga približavanja izračunati četvrtu aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = y^2 - x^2$ s početnim uvjetom $x = 0, y = 0$ na kvadratu $|x| \leq 1, |y| \leq 1$, te procijeniti pogrješku. Koja bi približno rješenje f_n udovoljilo točnosti do 10^{-2}?

4. Izračunati treću aproksimaciju rješenja za sustav diferencijalnih jednadžaba

$$y' = 1 + y + z^2,\ z' = 1 + y^2 + z, \quad x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$$

na kocki $K = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$.

7.2 NEKE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOGA REDA

U ovomu odjeljku ćemo pokazati nekoliko načina izravnog rješavanja nekih jednostavnih i elementarno rješivih vrsta običnih diferencijalnih jednadžba.

7.2.1 Diferencijalna jednadžba s odjeljivim varijablama

Pretpostavimo da se obična diferencijalana jednadžba $F(x, y, y') = 0$ može zapisati kao

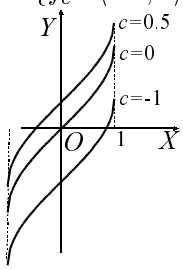
$$y' = g(x), \quad \text{tj.} \quad dy = g(x)dx,$$

pri čemu je g integrabilna funkcija. Razvidno je da je tada svaka primitivna funkcija G za funkciju g neko rješenje promatrane jednadžbe. Naime, $(\int g(x)dx)' = G'(x) = g(x)$. Ali vrijedi i obratno, svako rješenje f promatrane diferencijalne jednadžbe je neka primitivna funkcija za funkciju g, jer mora biti $f' = g$. Zaključujemo da je opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe pripadni neodređeni integral i pišemo

$$y = \int g(x)dx \quad (= \{f \mid f' = g\}).$$

Ako je pritom f_0, tj. $y = f_0(x)$, bilo koje posebno rješenje, onda se svako drugo rješenje f razlikuje od njega za neku pribrojničku konstantu c, tj. $f(x) = f_0(x) + c$. (Graf G_f se dobiva pomicanjem grafa G_{f_0} uzduž Y-osi za c.)

Primjer 7.2.1 Rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je svaka funkcija iz skupa $\{f_c : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f_c(x) = \arcsin x + c,\ c \in \mathbb{R}\}$.



Ako je npr. početni uvjet $x = 0, y = 0$, dobivamo posebno rješenje $f_0(x) = \arcsin x$.

Promatrajmo sada malo općenitiji slučaj, tj. diferencijalnu jednadžbu $F(x, y, y') = 0$ koja dopušta zapis

$$y' = g(x) \cdot h(y).$$

Njoj se, dakle, varijable mogu odijeliti (separirati) tako da se dobije jednadžba

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx, \quad h(y) \neq 0, y \in D_h.$$

Integrirajući obje strane dobivamo

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c,$$

što smatramo općim rješenjem, tj. njezino rješenje je skup svih funkcija implicitno zadanih tom integralnom jednadžbom. Pritom kažemo da smo polaznu diferencijalnu jednadžbu riješili *odijeljujući (separirajući) varijable.*

Primjer 7.2.2 Diferencijalnoj jednadžbi

$$y - xy' = a(1 + x^2y'), \quad a \in \mathbb{R},$$

je ekvivalentna diferencijalna jednadžba

$$dy(ax^2 + x) = (y - a)dx,$$

a ova se ("u glavnom") svodi na

$\frac{dy}{y-a} = \frac{dx}{x(ax+1)}$ (kad je $y \neq a$, $x \neq 0$ i $x \neq -\frac{1}{a}$ za $a \neq 0$).

Riješimo ovu zadnju pod svim naznačenim ograničenjima! Integrirajući obje strane dobivamo

$\ln|y-a| = \ln|x| - \ln|ax+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Budući da je $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijekcija, to za svaki c postoji neki $k \neq 0$ takav da je $\ln|k| = c$. Slijedi da opće rješenje dopušta zapis

$y \equiv f_k(x) = \frac{kx}{ax+1} + a, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{a}, 0\},\ a \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$

Izravnom provjerom, tj. deriviranjem i uvrštenjem y i y' u polaznu diferencijalnu jednadžbu, lako vidimo da je svaka funkcija f_k posebno rješenje te jednadžbe. Štoviše, pritom se vidi da sva ta rješenja dopuštaju proširenje na točku $x = 0$ (pripadnom vrijednošću $y = f_k(0) = a$).

Raspravimo sada slučajeve što smo ih bili isključili (radi pune smislenosti treće jednadžbe). Ako je $a = 0$, diferencijalna jednadžba se svodi na

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, što daje $y \equiv g_k(x) = kx,\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}.$

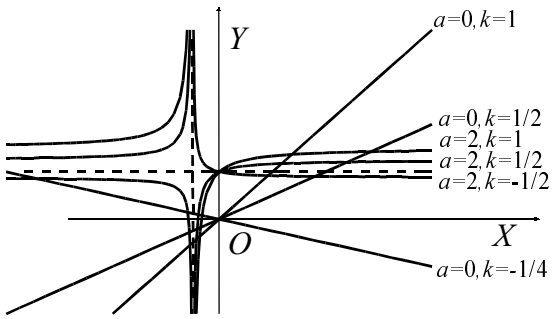
Primijetimo da $y = a$ povlači $y' = 0$, pa uvrštenjem u polaznu jednadžbu dobivamo $a = a$. Slijedi da je i konstantna funkcija c_a, tj. $y = a$, posebno rješenje. Napokon, ako je $a \neq 0$, u točki $x = -\frac{1}{a}$ polaznoj jednadžbi udovoljava vrijednost $y = a$, što su uklapa u prethodni slučaj. Prema tomu, opće rješenje tvore

$y \equiv f_k(x) = \frac{kx}{ax+1} + a, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{a}\},\ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$ čim je $a \neq 0$;

$y \equiv g_k(x) = kx,\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R},$ čim je $a = 0$;

$y \equiv f_0(x) = a,\ x \in \mathbb{R},$ za svaki a.

Na crtežu je narisano po nekoliko posebnih rješenja u slučajevima $a = 0$ i $a = 2$.



Da bi se odredilo posebno rješenje, različito od $y = a$, što udovoljava početnomu uvjetu $x = x_0$, $y = y_0$, treba izračunati konstantu k iz jednadžbe

$y_0 = \frac{kx_0}{ax_0+1} + a$, ($x_0 \neq -\frac{1}{a}$ i $y_0 \neq a$, tj. $k \neq 0$) čim je $a \neq 0$,

odnosno, iz jednadžbe

$y_0 = kx_0$, čim je $a = 0$.

U slučaju $a \neq 0$ dobivamo posebno rješenje $y \equiv f_{k_0}(x)$, gdje je

$k_0 = \frac{(y_0-a)(ax_0+1)}{x_0}$, čim je $x_0 \neq 0$,

a ako je $x_0 = 0$ mora biti $y_0 = a$, jer sva rješenja f_k prolaze točkom $(0, a)$, pa tada među njima tim početnim uvjetom nije određeno posebno rješenje. U slučaju $a = 0$ dobivamo posebno rješenje $y \equiv g_{k_0}(x)$, gdje je

$k = \frac{y_0}{x_0}$, čim je $x_0 \neq 0$,
a ako je $x_0 = 0$ mora biti $y_0 = 0$, jer sva rješenja g_k prolaze točkom $(0,0)$, pa tada među njima tim početnim uvjetom nije određeno posebno rješenje.

7.2.2 Homogena diferencijalna jednadžba

Dopušta li obična diferencijalna jednadžba $F(x,y,y') = 0$ svođenje na oblik
$y' = g(\frac{y}{x})$,
govorimo o **homogenoj** diferencijalnoj jednadžbi prvoga reda. Uvrštenjem
$\frac{y}{x} = z \quad (z \equiv h(x))$
dobivamo diferencijalnu jednadžbu s odjeljivim varijablama:
$(xz)' = g(z) \Longrightarrow z + xz' = g(z) \Rightarrow \frac{dz}{g(z)-z} = \frac{dx}{x}$.
Dakle, opće rješenje smijemo zapisati u obliku
$\int \frac{dz}{g(z)-z} = \ln|kx|, \quad z = \frac{y}{x}, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Primjer 7.2.3 Jednadžba
$x^2dy + (x^2 + y^2 - xy)dx = 0$
je homogena diferencijalna jednadžba prvoga reda jer dijeljenjem s x^2dx prelazi u
$y' + 1 + (\frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x} = 0$.
Zamjenom $y = zx$, $y' = z + z'x$, dobivamo jednadžbu
$z'x + 1 + z^2 = 0$
rješenje koje je
$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\int \frac{dx}{x} + c, \quad$ tj. $\quad \arctan z = -\ln|kx|, \ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Budući da je $z = \frac{y}{x}$, traženo opće rješenje jest
$y \equiv f(x) = -x\tan(\ln|kx|), \ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Napomena 7.2.1 Za funkciju $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, kažemo da je ***homogena po varijabli*** x_i, $i \in \{1, \cdots, m\}$, ***homogenog stupnja*** $k \in \mathbb{R}$, ako je, za svaku točku $x = (x^1, \cdots x^m) \in X$ i svaki $t \in \mathbb{R}$, točka $x_{i.t} \equiv (x^1, \cdots, x^{i-1}, tx^i, x^{i+1}, \cdots, x^m) \in X$ i $g(x_{i,t}) = t^k g(x)$. Ako je, za svaku točku $x \in X$ i svaki $t \in \mathbb{R}$, točka $x_t \equiv (tx^1, \cdots, tx^m) \in X$ i $g(x_t) = t^k g(x)$, onda kažemo da je g ***homogena funkcija homogenoga stupnja*** k. Slično se homogenost definira za bilo koji podskup od $\{x^1, \cdots, x^m\}$.

Primjerice, funkcija $g_1(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xyz$ je homogena homogenoga stupnja 3, dok je funkcija $g_2(x,y,z) = x^2 + xy + xyz$ homogena po varijablama x i y homogenog stupnja 2. Naziv *homogena* diferencijalna jednadžba dolazi od pripadne funkcije koja, zanemarujući dx i dy, mora biti homogena.

Promatrajmo sada diferencijalnu jednadžbu $F(x,y,y') = 0$ koja dopušta zapis
$y' = g(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$.

Ako je determinanta $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ onda linearni sustav $a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ima točno jedno rješenje, recimo, $(x, y) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Uvedemo li tada zamjenu $x = a + u$, $y = b + v$, dobivamo homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$v' = g(\tfrac{v}{u})$$

koju rješavamo na prije opisani način.
Ako je, pak, $D = 0$ onda postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x+b_1y)$. Tada zamjenom $z = a_1x+b_1y$ svodimo polaznu jednadžbu na

$$\tfrac{1}{b_1}(z' - a_1) = g(\tfrac{z+c_1}{\lambda z+c_2}),$$

a ova očito dopušata odijeliti varijable z i x.

Primjer 7.2.4 Diferencijalnoj jednadžbi $y'(x+y-3) = 1-2x-2y$ možemo pridružiti ekvivalentnu $(x + y \neq 3)$ jednadžbu

$$y' = \tfrac{1-2(x+y)}{(x+y)-3}.$$

Zamjenom $z = x + y$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$z' - 1 = \tfrac{1-2z}{z-3},$$

pa odjeljivanjem varijabla z i x slijedi

$$\int \tfrac{z-3}{z+2}dz = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sada se lako izračuna integral na lijevoj strani i uvrsti $z = x + y$, što onda daje traženo opće rješenje $y \equiv f(x)$.

7.2.3 Linearna diferencijalna jednadžba

Diferencijalnu jednadžbu prvoga reda što dopušta zapis

$$y' + g(x)y = h(x)$$

nazivamo **linearnom diferencijalnom jednadžbom** prvoga reda. (Linearnost se ovdje odnosi na "varijable" y i y'!) Ovu vrstu jednadžaba rješavamo tako da prvo riješimo tzv. pripadnu **nepotpunu** (homogenu) diferencijalnu jednadžbu

$$y' + g(x)y = 0.$$

(Funkcija $G(x, y, y') = y' + g(x)y$ je homogena po varijablama y i y' homogenoga stupnja $k = 1$.) Odijeljujući varijable dobivamo

$$\tfrac{dy}{y} = -g(x)dx, \quad \text{dakle,} \quad y = c \cdot e^{-\int g(x)dx}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Nije teško dokazati da se sada tzv. **variranjem konstante** c (umjesto konstante c se uvrsti nepoznata funkcija u) dolazi do općeg rješenja polazne (potpune) jednadžbe. Naime, njezino opće rješenje mora biti oblika

$$y = u(x) \cdot e^{-\int g(x)dx},$$

pri čemu treba odrediti (do na pribrojničku konstantu) funkciju $x \mapsto u(x)$. U tu svrhu, uvrstimo taj y i pripadni y' u polaznu jednadžbu:

$$(u(x) \cdot e^{-\int g(x)dx})' + g(x)u(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} = h(x), \quad \text{što daje}$$

$$u(x) = \int h(x) \cdot e^{\int g(x)dx}dx + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Prema tomu, opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda jest

$$y \equiv f(x) = (\int h(x) \cdot e^{\int g(x)dx}dx + k)e^{-\int g(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Primjer 7.2.5 Diferencijalna jednadžba $xy' + 2y = 6x^4$ je ekvivalentna ($x \neq 0$) jednadžbi

$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 6x^3.$

Na upravo opisani način dobivamo:

$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x^2},$

pa varirajući konstantu zaključujemo da je opće rješenje oblika

$y = \frac{u(x)}{x^2}$, gdje treba odrediti funkciju $x \mapsto u(x)$.

$(\frac{u(x)}{x^2})' + \frac{2}{x} \cdot u(x) = 6x^3 \Rightarrow u'(x) = 6x^5 \Rightarrow u(x) = x^6 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Prema tomu, traženo opće rješenje jest

$y \equiv f(x) = x^4 + \frac{k}{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Zadamo li neki početni uvjet, primjerice $x = 1, y = 1$, dobivamo

$1 = 1^4 + \frac{k}{1^2} \Rightarrow k = 0,$

pa je pripadno posebno rješenje prirodna potencija $y = x^4$.

Pridodajmo k ovomu i diferencijalnu jednadžbu

$y' + g(x)y = h(x)y^r, \quad r \neq 1,$

koju nazivamo **Bernoullijevom jednadžbom**. Ona se zamjenom $y^{1-r} = z$ svodi na linearnu (po z) diferencijalnu jednadžbu

$z' + (1-r)g(x)z = (1-r)h(x),$

koja se dalje rješava na opisani način.

7.2.4 Egzaktna diferencijalna jednadžba

Ako diferencijalna jednadžba $F(x, y, y') = 0$ dopušta zapis

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad$ pod uvjetom $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$

tj. ako je $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (totalni) diferencijal neke funkcije $(x,y) \mapsto g(x,y) \equiv z$ (v. Teorem 5.2.6), onda govorimo o **egzaktnoj diferencijalnoj jednadžbi** prvoga reda. Budući da je $dg(x,y) = 0$, to je (v. dokaz Teorema 5.2.6)

$$g(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)ds = c.$$

Time je određeno opće rješenje u implicitnom obliku, a ono eksplicitno $y \equiv f(x)$ ovisi, dakako, o udovoljenju uvjetima Teorema o implicitnoj funkciji (v. Teorem 5.2.10). Uočimo da je, primjerice, svaka diferencijalna jednadžba s odijeljivim varijablama egzaktna.

Primjer 7.2.6 Diferencijalna jednadžba $(x + y^2)dx + y(y + 2x)dy = 0$ je egzaktna jer je

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x+y^2)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial (y(y+2x))}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$

Stoga je njezino opće rješenje

$\int_{x_0}^{x} (t + y^2)dt + \int_{y_0}^{y} s(s + 2x_0)ds = c, \quad$ tj.

$\frac{x^2}{2} + xy^2 - \frac{x_0^2}{2} - x_0y^2 + \frac{y^3}{3} + x_0y^2 - \frac{y_0^3}{3} - x_0y_0^2 = c, \quad c \in \mathbb{R},$

što se može napisati kao ($k = 6(\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^3}{3} + x_0 y_0^2 + c)$)

$$3x^2 + 6xy^2 + 2y^3 = k.$$

Zahtijevamo li, primjerice, da je $y = 2$ čim je $x = 1$, dobivamo $k = -5$ pa je pripadno posebno rješenje $3x^2 + 6xy^2 + 2y^3 + 5 = 0$.

Ako diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ nije egzaktna, ali udovoljava ostalim uvjetima u Teoremu 5.2.6, onda postoji funkcija $(x,y) \mapsto h(x,y) \equiv \lambda$ takva da je

$$\lambda P(x,y)dx + \lambda Q(x,y)dy$$

egzaktna diferencijalna forma (dokaz ispuštamo!). Tada je svako rješenje (egzaktne) diferencijalne jednadžbe

$$P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy = 0, \quad P_1 = h \cdot Q,\ Q_1 = h \cdot Q,$$

ujedno rješenje polazne jednadžbe. Faktor λ nazivamo **integracijskim** (ili **Eulerovim**) **multiplikatorom**. Njegovo određivanje nije uvijek jednostavno. (Općenito, treba riješiti neku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu!) Međutim, ako je λ funkcija samo jedne varijable (bilo x bilo y) onda je njegovo određivanje relativno lako.

Primjer 7.2.7 Diferencijalna jednadžba $dx + (x + y + 1)dy = 0$ nije egzaktna, jer je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0 \neq 1 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Pomnožimo li ju, međutim, funkcijom $y \mapsto h(y) = e^y \equiv \lambda$ dobivamo egzaktnu diferencijalnu jednadžbu

$$e^y dx + (x + y + 1)e^y dy = 0, \quad \text{jer je}$$

$$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} = \frac{de^y}{dy} = e^y = \frac{\partial((x+y+1)e^y)}{\partial x} = \frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x}.$$

Njezino je rješenje, dakle i rješenje polazne jednadžbe, dano implicitno:

$$\int_{x_0}^{x} e^y dt + \int_{y_0}^{y} (x_0 + s + 1)e^s ds = c, \quad \text{tj.} \quad (x + y)e^y = c.$$

Primjer 7.2.8 Uvjerimo se da diferencijalna jednadžba

$$y(x^2 \cos x - y)dx - x^2 \sin x dy$$

ima za Eulerov multiplikator λ neku funkciju u od umnoška danih varijabla, tj. $(x,y) \mapsto h(x,y) = u(p)$, $p \equiv xy = v(x,y)$, pa odredimo tu funkciju. Zaista,

$$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(u(p)y(x^2 \cos x - y))}{\partial y} = u'(p) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot y(x^2 \cos x - y) + u(p)(x^2 \cos x - 2y)$$
$$= u'(p)(x^3 y \cos x - xy^2) + u(p)(x^2 \cos x - 2y),$$
$$\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(u(p)(-x^2 \sin x))}{\partial x} = u'(p) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (-x^2 \sin x) + u(p)(-2x \sin x - x^2 \cos x)$$
$$= -u'(p)x^2 y \sin x - u(p)(2x \sin x + x^2 \cos x).$$

Iz uvjeta $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$ slijedi

$$u'(p)(x^3 y \cos x + x^2 y \sin x - xy^2) + u(p)(2x^2 \cos x + 2x \sin x - 2y) = 0,$$

tj.

$$\frac{u'(p)}{u(p)} = -\frac{2(x^2 \cos x + x \sin x - y)}{xy(x^2 \cos x + x \sin x - y)} = -\frac{2}{xy}.$$

Prema tomu (vrijednost integracijske konstante nije bitna, pa neka je $c = 0$),

$$\ln|u(p)| = -2 \ln|xy| \Rightarrow u(xy) = \frac{1}{(xy)^2}.$$

7.2.5 Sustav od dviju običnih diferencijalnih jednadžaba

Prirodno je sustav

$F(x, y, z, y', z') = 0,\ G(x, y, z, y', z') = 0$

od dviju običnih diferencijalnih jednadžaba prvoga reda, s dvjema nepoznatim funkcijama, pokušati riješiti po sličnosti s odgovarajućim sustavom algebarskih jednadžaba, tj. pokušati ga svesti na dvije jednadžbe s po jednom nepoznanicom. Kao ishod takvoga postupka mogu se dobiti, ovisno o danom sustavu, diferencijalne jednadžbe prvoga ili drugoga reda.

Primjer 7.2.9 (a) Promatrajmo sustav $y' = x + z, z' = -x + y$. Deriviranjem prve jednadžbe i uvrštenjem z' u drugu dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugoga reda $y'' - y' = -x + 1$ (koju ćemo riješiti u sljedećem odjeljku, v. Primjer 7.3.5. Njezinim rješenjem $y = f(x)$, iz prve jednadžbe dobivamo i traženi $z = g(x)$. Na drugačiji način, zbrajanjem jednadžaba dobivamo $y' + z' = y + z$, što povlači

$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx, \quad y + z \neq 0,$

pa je $z = c_1 e^x - y$. Uvrstimo li ovo u prvu jednadžbu, dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu $y' + y = x + c_1 e^x$. Njezino je opće rješenje

$y \equiv f(x) = (\int (x + c_1 e^x) e^{x dx} + c_2) e^{-x} = x - 1 + \frac{c_1}{2} e^x + c_2 e^{-x}.$

Sada dobivamo i rješenje

$z \equiv g(x) = -x + 1 + \frac{c_1}{2} e^x - c_2 e^{-x}.$

U slučaju $y + z = 0$ polazni sustav se svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu $y' + y = x$, pa je pripadno rješenje podskup onoga već dobivenoga s konstantom $c_1 = 0$. Tražimo li, nadalje neko posebno rješenje, primjerice ono što udovoljava početnomu uvjetu $x = 0, y = 1, z = 1$, dobivamo linearni sustav

$1 = -1 + \frac{c_1}{2} + c_2, \quad 1 = 1 + \frac{c_1}{2} - c_2,$

rješenje kojega je $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, pa je traženo posebno rješenje

$y = x - 1 + e^x + e^{-x}, \quad z = -x + 1 + e^x - e^{-x}.$

Napomena 7.2.2 Sve što smo rekli o sustavu dviju običnih diferencijalnih jednadžaba prvoga reda (s dvije nepoznate funkcije) lako se poopćuje na sustav od n običnih diferencijalnih jednadžaba prvoga reda, $n \in \mathbb{N}$.

7.2.6 Vježbe

1. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(x + 2y)y' = 1$ te naći posebno rješenje što udovoljava početnomu uvjetu $x = 0, y = -1$.

2. Odrediti ravninsku krivulju koja prolazi točkom $(2, 0)$ ako joj svaki tangentin odrezak između dirališta i Y-osi ima duljinu 2.

3. Naći posebno rješenje diferencijalne jednadžbe

$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, \quad x = 2, y = 1.$

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

5. Odrediti ravninsku krivulju kojoj je, u svakoj točki, tangentino sjecište s Y-osi jednako apscisi pripadnoga dirališta.
6. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
(a) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$; (b) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.
7. Odrediti ravninsku krivulju s ovim svojstvom: Za svaku točku je ploština trokuta što ga tvore tangenta, radijus-vektor pripadnoga dirališta i X-os nepromijenjena.
8. Izračunati opći integral diferencijalne jednadžbe
$xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

7.3 NEKE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOGA REDA

U ovomu odjeljku ćemo razmatrati neke jednostavne vrste običnih diferencijalnih jednadžaba drugoga reda. Posebnu pozornost ćemo posvetiti tzv. linearnim diferencijalnim jednadžbama drugoga reda s konstantnim koeficijentima.

7.3.1 Diferencijalna jednadžba $F(x, y', y'') = 0$

Općenito, diferencijalnu jednadžbu $F(x, y, y', y'') = 0$ svodimo zamjenom $y' = p$ na sustav

$$F(x, y, p, p') = 0, \quad y' = p.$$

Dopušta li taj sustav svođenje na oblik

$$y' = p, \quad p' = G(x, y),$$

smijemo na njega primijeniti Teorem 7.1.2, pa polazna jednadžba ima (jedinstveno) rješenje onda i samo onda kad ovaj sustav ima rješenje.

Ako se u polaznoj diferencijalnoj jednadžbi ne pojavljuje eksplicitno y kao varijabla, tj. ako jednadžba dopušta zapis

$$F(x, y', y'') = 0,$$

onda zamjenom $y' = p$, $y'' = p'$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu prvoga reda $F(x, p, p') = 0$. Odredimo li njezino rješenje $p \equiv g(x)$, integriranjem dobivamo traženo rješenje $y \equiv f(x) = \int g(x)dx$.

Primjer 7.3.1 Riješimo diferencijalnu jednadžbu $xy'' + y' - x = 0$ i nađimo posebno rješenje što udovoljava početnomu uvjetu $x = 1$, $y = \frac{1}{4}$, $y' = 1$. Budući da se u toj jednadžbi ne pojavljuje y, primijenimo zamjenu $y' = p$, $y'' = p'$ pa ćemo dobiti jednadžbu $xp' + p - x = 0$. Nova zamjena $p = zx$ dopušta odjeljivanje novih varijabla:

$$\frac{dz}{1-2z} = \frac{dx}{x}.$$

Slijedi, $z = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{c_1x^2})$ pa je $p = \frac{x}{2}(1 - \frac{1}{c_1x^2})$ i, napokon,

$$y \equiv f(x) = \int pdx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{c_1}\ln|x|) + c_2.$$

Uvrstimo li dani početni uvjet u opće rješenje i njegovu derivaciju, dobivamo:

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{c_1}\ln 1) + c_2, \quad 1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{c_1})$.
Odatle, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, pa je traženo posebno rješenje $y = \frac{1}{4}(x^2 + \ln x^2)$.

7.3.2 Diferencijalna jednadžba $F(y, y', y'') = 0$

Ako se u diferencijalnoj jednadžbi $F(x, y, y', y'') = 0$ ne pojavljuje eksplicitno varijabla x, tj. ako ta jednadžba dopušta zapis $F(y, y', y'') = 0$, onda pomaže zamjena:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{\frac{dy}{p}} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Primjer 7.3.2 Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y''y - (y')^2 = 0$ te odredimo posebno rješenje što udovoljava početnomu uvjetu

(a) $x = 0, y = 0, y' = 0$;
(b) $x = 1, y = 0, y' = 1$;
(c) $x = 1, y = 1, y' = 1$;
(d) $x = 1, y = 1, y' = 2$.

Navedena zamjena u ovomu primjeru povlači

$$\frac{dp}{dy}py - p^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad p(\frac{dp}{dy}y - p) = 0.$$

Dakle, $p = 0$ ili $\frac{dp}{dy}y - p = 0$. Ako je $p = 0 = y'$ onda je $y = c$, a ako je

$$\frac{dp}{dy}y - p = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

onda je $y' = p = c_1 y$ pa je $\frac{dy}{y} = c_1 dx$. Slijedi,

$$y \equiv f(x) = c_2 e^{c_1 x}.$$

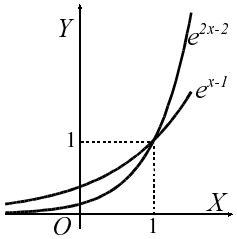
Primijetimo da je prvi slučaj obuhvaćen drugim ($c_1 = 0$, $c_2 \equiv c$). Nađimo sada tražena posebna rješenja.

(a) Početni uvjet $x = 0, y = 0, y' = 0$, uvršten u $y = c_2 e^{c_1 x}$ i $y' = c_1 y$, povlači $0 = c_2$ i $0 = 0$. Posebno rješenje je, dakle, nulkonstanta $y = 0$.

(b) Početni uvjet $x = 1, y = 0, y' = 1$ povlači $0 = c_2 e^{c_1}$ i $1 = 0$, što je protuslovlje. Zaključujemo da ne postoji posebno rješenje koje bi udovoljilo tomu početnom uvjetu.

(c) Početni uvjet $x = 1, y = 1, y' = 1$ povlači $1 = c_2 e^{c_1}$ i $1 = c_1$, dakle, $c_1 = 1$, $c_2 = e^{-1}$. Pripadno posebno rješenje jest $y = e^{x-1}$.

(d) Slično, početni uvjet $x = 1, y = 1, y' = 2$ povlači $1 = c_2 e^{c_1}$ i $2 = c_1$, dakle, $c_1 = 2$, $c_2 = e^{-2}$, pa je pripadno posebno rješenje $y = e^{2x-2}$.



7.3.3 Homogena diferencijalna jednadžba

Ako je funkcija $(x, y, y', y'') \mapsto F(x, y, y', y'')$ homogena po varijablama y, y', y'', tj. ako je

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y''), \quad t \in \mathbb{R},$$

(v. Napomenu 7.1.1), onda diferencijalnu jednadžbu $F(x, y, y', y'') = 0$ zamjenom

$$y = k \cdot e^{\int z dx}, \quad z \equiv g(x),$$

svodimo na diferencijalnu jednadžbu prvoga reda (s nepoznatom funkcijom g)

$$F(x, k \cdot e^{\int z dx}, kz \cdot e^{\int z dx}, k(z^2 + z') \cdot e^{\int z dx}) = 0, \quad \text{tj.}$$

$$kF(x, 1, z, z^2 + z')e^{\int z dx} = 0, \quad \text{odnosno,} \quad F(x, 1, z, z^2 + z') = 0.$$

Običnu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda s opisanim svojstvom nazivamo **homogenom** po varijablama y, y', y''.

Primjer 7.3.3 Diferencijalna jednadžba $xy^2 + yy'' - (y')^2 = 0$ je homogena $(k = 2)$ jer je

$$x(ty)^2 + (ty)(ty'') - (ty')^2 = t^2(xy^2 + yy'' - (y')^2).$$

Zamjena $y = 2e^{\int z dx}$, $z \equiv g(x)$, vodi do jednadžbe

$$x + z' + z^2 - z^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad x + z' = 0.$$

Slijedi $z = -\frac{x^2}{2} + c_1$, pa je $\int z dx = -\frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$, a opće rješenje polazne jednadžbe jest

$$y \equiv f(x) = 2e^{-\frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2} = C_2 e^{-\frac{x^3}{3} + C_1 x}.$$

Na kraju, diferencijalna jednadžba

$$F(x, y, \tfrac{dy}{dx}, \tfrac{d^2y}{dx^2}) = 0$$

koja je homogena po varijablama x, y, dx, dy, d^2y, tj. za koju je

$$F(tx, ty, \tfrac{tdy}{tdx}, \tfrac{td^2y}{(tdx)^2}) = t^k F(x, y, \tfrac{dy}{dx}, \tfrac{d^2y}{dx^2}), \quad t \in \mathbb{R},$$

može se zamjenom $y = xz$, $|x| = e^s$, $z = g(s)$ svesti na vrstu diferencijalne jednadžbe promatranu u prethodnomu pododjeljku 7.3.2, tj. na jednadžbu $G(z, z', z'') = 0$ s nepoznatom funcijom $z \equiv g(s) = g(\ln |x|)$.

7.3.4 Linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima

Ako obična diferencijalna jednadžba drugoga reda $F(x, y, y', y'') = 0$ dopušta zapis

$$y'' + ay' + by = g(x), \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

govorimo o **linearnoj diferencijalnoj jednadžbi** drugoga reda **s konstantnim koeficijentima**. U slučaju $g = c_0$ dobivamo

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

što je pripadna joj **homogena** (ili "**nepotpuna**") jednadžba.

Može se dokazati da promatrana linearna diferencijalna jednadžba ima točno jedno rješenje čim je funkcija g integrabilna. Rješavanje teče slično

onomu za linearnu diferencijalnu jednadžbu prvoga reda. Naime, prvo se riješi pripadna homogena jednadžba, a onda se varirirangem konstanata dobiva traženo opće rješenje polazne jednadžbe. U općem slučaju je postupak tehnički vrlo složen i bitno ovisi o funkciji g. U mnogim slučajevima elementarnih funkcija g taj se postupak može bitno ubrzati, a sreća je da su baš oni u praksi vrlo česti. Ovdje ćemo razmatrati slučajeve kad je g polinom, umnožak polinoma i (prirodne) eksponencijalne funkcije, funkcija sin ili cos te bilo koja linearna kombinacija navedenih slučajeva. Dokazat ćemo da je tada opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe (1) zbroj općega rješenja pripadne homohene jednadžbe (2) i bilo kojega posebnog rješenja polazne jednadžbe (1). Pritom je bitno da skup svih rježenja ima struktura vektorskog prostora (nad $\mathbb{C}$), što nam otkrivaju dva sljedeća teorema.

Teorem 7.3.1 *Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ dva rješenja linearne homogene jednadžbe* (2)*, onda je i $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, rješenje te jednadžbe.*

Dokaz. Izravnom provjerom dobivamo $y'' + ay' + by =$
$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))'' + a(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))' + b(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) =$
$c_1(f_1''(x) + af_1'(c) + bf_1(x)) + c_2(f_2''(x) + af_2'(c) + bf_2(x)) =$
$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$ ■

Reći ćemo da su dva rješenja $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ linearne homogene jednadžbe (2) **linearno nezavisna**, ako iz $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$ (nulkonstantna funkcija), $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, slijedi $c_1 = c_2 = 0$.

Teorem 7.3.2 *Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ dva linearno nezavisna rješenja linearne homogene jednadžbe* (2)*, onda je $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, njezino opće rješenje.*

Dokaz. Treba dokazati da se iz rješenja (v. Teorem 7.3.1) $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, može dobiti svako posebno rješenje, tj. da su danim početnim uvjetom $x = x_0, y = y_0, y' = \bar{y}_0$ konstante c_1 i c_2 jednoznačno određene. Uvrstimo li početni uvjet u to rješenje i njegovu derivaciju, dobivamo linearni sustav

$$c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) = y_0, \quad c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) = \bar{y}_0.$$

Pretpostavljena linearna nezavisnost povlači da je determinanta

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{za svaki } x,$$

pa je, posebice, determinanta promatranoga linearnog sustava $D_0 = W(x_0) \neq 0$. Slijedi da taj sustav ima točno jedno rješenje $((c_1)_0, (c_2)_0)$. ■

O obstojnosti posebnog rješenja homogene linearne jednadžbe (2) govori sljedeći teorem. Pritom dopuštamo da rješenje bude i *kompleksna funkcija* (realne varijable), tj. finkcija $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = u(x) + iv(x)$, $i \equiv \sqrt{-1}$, pri čemu su u i v realne funkcije. Derivacijom funkcije f smatramo

funkciju $x \mapsto f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ (kad god su funkcije u i v derivabilne). Jednostavno je provjeriti da Teorem 7.3.1. i Teorem 7.3.2 vrijede i za ovakva dva kompleksna rješenja s konstantama $c_{1,2} \in \mathbb{C}$.

Teorem 7.3.3 *Postoji broj r, realan ili kompleksan, takav da je $y = e^{rx}$ posebno rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe* (2).

Dokaz. Formalnim uvrštenjem $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ i $y'' = r^2e^{rx}$ u jednadžbu (2) dobivamo

$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0, \quad \text{tj.} \quad r^2 + ar + b = 0,$

što je tzv. **karakteristična jednadžba** diferencijalne jednadžbe (2). Budući da svaka kvadratna jednadžba ima rješenje u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, a u ovomu slučaju dobivamo

$r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$

to su $y_1 = e^{r_1x}$ i $y_2 = e^{r_2x}$ posebna rješenja diferencijalne jednadžbe (2). Štoviše, ako je pritom $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ onda su pripadna posebna rješenja linearno nezavisna pa je, po Teoremu 7.3.2, $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe (2) (U slučaju konjugirano-kompleksnog rješenja $r_{1,2} \in \mathbb{C}$, v. bilješku po dokazu idućega Teorema 7.3.4.). Ako je, pak, $r_1 = r_2$ onda se radi o samo jednom posebnom rješenju (za drugo jamči Teorem 7.3.4). ■

Teorem 7.3.4 *Ako karakteristična jednadžba homogene linearne diferencijalne jednadžbe* (2) *ima samo jedno rješenje, tj. ako je $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2} \equiv r \in \mathbb{R}$, onda je, pored $y = e^{rx}$, posebno rješenje i $y = xe^{rx}$. Štoviše, budući da su funkcije $x \mapsto e^{rx}$ i $x \mapsto xe^{rx}$ linearno nezavisne, to je tada $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe* (2).

Dokaz. Izravna provjera ($r = -\frac{a}{2}$ - jedinstveno rješenje karakteristične jednadžbe)$(xe^{rx})'' + a(xe^{rx})' + bxe^{rx} = e^{rx}((2r + a) + (r^2 + ar + b)x) = 0$ potvrđuje da je i $y = xe^{rx}$ rješenje diferencijalne jednadžbe (2). Nadalje, kad bi funkcije e^{rx} i xe^{rx} bile linearno zavisne, homogeni sustav

$c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} = 0,$

$c_1re^{rx} + c_2(1 + rx)e^{rx} = 0$

(druga jednadžba se dobiva deriviranjem one prve) bi imao i netrivijalno rješenje po c_1 i c_2. Međutim, determinanta toga sustava je

$$D = e^{2rx} \begin{vmatrix} 1 & x \\ r & 1 + rx \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0$$

pa je trivijalno rješenje $c_1 = c_2 = 0$ jedino njegovo rješenje. Prema tomu, $y_1 = e^{rx}$ i $y_2 = xe^{rx}$ su, u ovomu slučaju, linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe (2). ■

U slučaju konjugirano-kompleksnog rješenja karakteristične jednadžbe, tj.

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0,$

opće rješenje $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ (skup kompleksnih funkcija) homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2) zapisujemo pomoću prirodne eksponencijalne funkcije i trigonometrijskih funkcija sin i cos ovako:

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(c_1 e^{\beta x i} + c_2 e^{-\beta x i}) \overset{\text{P.4.1.7}}{=}$$
$$e^{\alpha x}(c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x))) =$$
$$e^{\alpha x}((c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\sin\beta x) \equiv e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x + k_2\sin\beta x),$$

pri čemu je $k_1 \equiv c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$, $k_2 \equiv i(c_1 - c_2) \in i\mathbb{R}$. Osim toga, lako se provjeri da su funkcije $x \mapsto e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ linearno nezavisne (nad $\mathbb{C}$) čim je $\beta \neq 0$.

Zaključak: Opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2),

$$y'' + ay' + by = 0,$$

jest skup svih funkcija $x \mapsto f_{c_1,c_2}(x)$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}\bigcup i\mathbb{R}$, što dopuštaju ovaj zapis:

$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, čim su $r_{1,2} \in \mathbb{R}$ i $r_1 \neq r_2$;

$c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$, čim je $r_1 = r_2 \equiv r \in \mathbb{R}$;

$e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in i\mathbb{R}$
čim su $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$,

pri čemu je $r_{1,2}$ rješenje pripadne karakteristične jednadžbe $r^2 + ar + b = 0$.

Primjer 7.3.4 Homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi $y'' + 4y' + 4y = 0$ pripada karakteristična jednadžba $r^2 + 4r + 4 = 0$, kojoj je rješenje $r_1 = r_2 = -2$. Opće rješenje promatrane diferencijalne jednadžbe je, dakle,

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Zadamo li, naime, bilo koji početni uvjet $x = x_0, y = y_0, y' = \bar{y}_0$, dobivamo (uvrštenjem u y i y') linearni sustav (s nepoznanicama c_1 i c_2)

$$c_1 e^{-2x_0} + c_2 x_0 e^{-2x_0} = y_0, \quad -2c_1 e^{-2x_0} + c_2 e^{-2x_0} - 2c_2 x_0 e^{-2x_0} = \bar{y}_0,$$

koji, zbog

$$D = e^{-2x_0}\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ -2 & 1 - 2x_0 \end{vmatrix} = e^{-2x_0} \neq 0,$$

ima točno jedno rješenje $((c_1)_0, (c_2)_0)$. (To potvrđuje da smo pronašli opće rješenje y polazne diferencijalne jednadžbe.)

Teorem 7.3.5 *Ako je dano bilo koje posebno rješenje linearne diferencijalne jednadžbe* (1)*, onda se njezino opće rješenje dobiva pribrajanjem toga posebnog rješenja općemu rješenju pripadne joj homogene jednadžbe* (2).

Dokaz. Neka je $y_1 \equiv f_1(x)$ opće rješenje homogene jednadžbe (2), a $y_2 \equiv f_2(x)$ posebno rješenje linearne jednadžbe (1). Dokažimo da je tada $y = y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x) \equiv f(x)$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe (1)! Da je $y = y_1 + y_2$ rješenje slijedi iz

$$y'' + ay' + by = (y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) =$$
$$(y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2) = 0 + g(x) = g(x).$$

Budući da to rješenje sadrži (u y_1) dvije slobodne konstante koje se mogu odrediti za svaki početni uvjet $x = x_0$ ($\in D_g$), $y = y_0$, $y' = \bar{y}_0$, to se doista radi o općemu rješenju. ■

Četiri sljedeća teorema donose pravila za izbor posebnog rješenja diferencijalne jednadžbe (1) s obzirom na danu funkciju g. Dokazuju se izravnom provjerom (uvrštavanjem) pa to prepuštamo čitatelju kao korisnu vježbu.

Teorem 7.3.6 *Ako je funkcija g, na desnoj strani linearne diferencijalne jednadžbe* (1), *polinom n-toga stupnja, $g(x) = p_n(x)$, onda je posebno rješenje te jednadžbe polinom*

- *n-toga stupnja $q_n(x)$, čim je (u jednadžbi* (1)*) koeficijent $b \neq 0$;*
- *$(n+1)$-voga stupnja $q_{n+1}(x)$, čim je $b = 0 \neq a$;*
- *$(n+2)$-goga stupnja $q_{n+2}(x)$, čim je $b = 0 = a$.*

Koeficijenti tih polinoma se izračunavaju "metodom neodređenih koeficijenata", tj. uvrštenjem polinoma danog stupnja s nepoznatim koeficijentima u jednadžbu (1) *i izjednačavanjem parova odgovarajućih koeficijenata (uz iste potencije) s lijeve i desne strane.*

Teorem 7.3.7 *Ako je $g(x) = p_n(x)e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$, onda je posebno rješenje diferencijalne jednadžbe* (1) *funkcija*

- *$q_n(x)e^{rx}$, čim $r \notin \{r_1, r_2\}$;*
- *$xq_n(x)e^{rx}$, čim je $r \in \{r_1, r_2\}$ i $r_1 \neq r_2$;*
- *$x^2q_n(x)e^{rx}$, čim je $r = r_1 = r_2$,*

pri čemu je $r_{1,2}$ rješenje pripadne karakteristične jednadžbe. (Koeficijenti polinoma q_n se izračunavaju po uputi u prethodnomu teoremu.)

Teorem 7.3.8 *Ako je $g(x) = c\cos\gamma x + d\sin\gamma x$, $c, d, \gamma \in \mathbb{R}$, onda je posebno rješenje diferencijalne jednadžbe* (1) *funkcija*

- *$C\cos\gamma x + D\sin\gamma x$, čim $i\gamma \notin \{r_1, r_2\}$;*
- *$x(C\cos\gamma x + D\sin\gamma x)$, čim je $i\gamma \in \{r_1, r_2\}$.*

Koeficijenti C i D se određuju uvrštenjem rješenja u jednadžbu (1) *i izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata uz funkciju* sin, *odnosno,* cos.

Teorem 7.3.9 *Ako je u linearnoj diferencijalnoj jednadžbi* (1) *$g(x) = g_1(x) + \cdots + g_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, onda je njezino posebno rješenje zbroj od po jednog posebnog rješenja svake pripadne jednadžbe*

$$y'' + ay' + by = g_j(x), \quad j = 1, \cdots, k.$$

Primjer 7.3.5 Riješimo linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima $y'' - y = -x + 1$ i odredimo joj posebno rješenje što udovoljava početnimu uvjetu $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ (usp. Primjer 3.2.9).
Pripadna homogena jednadžba je $y'' - y = 0$, a karakteristična jednadžba je $r^2 - 1 = 0$. Rješenje $r_{1,2} = \pm 1$ povlači da su $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ linearno nezavisna posebna rješenja homogene jednadžbe. Tako dobivamo opće rješenje $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ te homogene jednadžbe (v. Teoreme 7.3.4 i 7.3.5). U polaznoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi je $g(x) = -x + 1 \equiv p_1(x)$ polinom prvoga stupnja, a koeficijent uz y je $b = -1 \neq 0$. Po Teoremu 7.3.8, posebno

rješenje te jednadžbe je (i) neki polinom $q_1(x) = Ax+B$. Koeficijente ćemo mu odrediti po danoj uputi:

$(Ax+B)'' - (Ax+B) = -x+1 \Rightarrow -Ax-B = -x+1.$

Dakle, $A = 1$ i $B = -1$ pa je traženo posebno rješenje $y = x-1$. Napokon, po Teoremu 7.3.7 slijedi da je $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x - 1$ traženo opće rješenje. Posebno rješenje što udovoljava početnomu uvjetu $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ dobivamo odgovarajućim uvrštenjima:

$c_1e^0 + c_2e^{-0} + 0 - 1 = 0, \quad c_1e^0 - c_2e^{-0} + 1 = 0.$

Slijedi, $c_1 = 0, c_2 = 1$ pa je traženo posebno rješenje $y = e^{-x} + x - 1$.

Primjer 7.3.6 Riješimo linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima

$y'' + 2y' + 5y = x^2e^{3x} + \sin 2x.$

Pripadna karakteristična jednadžba $r^2 + 2r + 5 = 0$ ima konjugirano-kompleksno rješenje $r_{1,2} = -1 \pm 2i$ pa je opće rješenje (kompleksno) pripadne homogene jednadžbe

$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$

Budući da je $g(x) = x^2e^{3x} + \sin 2x$, to ćemo za pronalaženje posebnog rješenja polazne jednadžbe najprije uporabiti Teorem 7.3.9 Promatrajmo, dakle, dvije pripadne diferencijalne jednadžbe:

$y'' + 2y' + 5y = x^2e^{3x} \quad i$

$y'' + 2y' + 5y = \sin 2x.$

Njihova posebna rješenja možemo odrediti redom po Teoremima 7.3.7 i 7.3.8. Za prvu je to

$y = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$

Njegovim uvrštenjem (s y' i y'') u prvu jednadžbu i odgovarajučim izjednačavanjima dobivamo linearni sustav

$20A = 1, \quad 16A + 20B = 0, \quad 2A + 8B + 20C = 0,$

rješenje kojega je $A = \frac{1}{20}$, $B = -\frac{1}{25}$, $C = \frac{11}{1000}$. Prema tomu, posebno rješenje prve diferencialne jednadžbe jest

$y = \frac{1}{1000}(50x^2 - 40x + 11)e^{3x}.$

Posebno rješenje druge diferencijalne jednadžbe je oblika

$y = C \sin 2x + D \cos 2x.$

Njegovim uvrštenjem (s y' i y'') u drugu jednadžbu i odgovarajućim izjednačavanjima dobivamo linearni sustav

$C - 4D = 1, \quad 4C + D = 0,$

rješenje kojega je $C = \frac{1}{17}$, $D = -\frac{4}{17}$. Prema tomu, posebno rješenje druge diferencialne jednadžbe jest

$y = \frac{1}{17}(\sin 2x - 4 \cos 2x).$

Sada je, po Teoremu 7.3.9,

$y = \frac{1}{1000}(50x^2 - 40x + 11)e^{3x} + \frac{1}{17}(\sin 2x - 4 \cos 2x)$

posebno rješenje polazne diferencijalne jednadžbe. Napokon, po Teoremu 7.3.5,

$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{1000}(50x^2 - 40x + 11)e^{3x} +$

$\frac{1}{17}(\sin 2x - 4\cos 2x)$
jest opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 2y' + 5y = x^2e^{3x} + \sin 2x$.

7.3.5 Vježbe

1. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
(a) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$; (b) $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$;
(c) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ s početnim uvjetom $x = 0, y = 0, y' = 3$.

2. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
(a) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$; (b) $yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2$;
(c) $(1+yy')y'' = (1+(y')^2)y'$ s početnim uvjetom $x = 0, y = 1, y' = 1$.

3. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
(a) $\mathrm{y}(2xy'' + y') = x(y')^2 + 1$;
(b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$ s početnim uvjetom $x = 1, y = \frac{1}{3}, y' = \frac{2}{3}$.

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
(a) $y'' - 4y = 2x\sin x$; (b) $y'' - 6y' + 9y = xe^{-x}$;
(c) $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + 1$; (d) $y'' - y' = x^2 - xe^x$;
(e) $y'' - 2y' = 2e^x$ s početnim uvjetom $x = 1, y = -1, y' = 0$;
(f) $y'' + y = 2x - \pi$ s početnim uvjetima $x = 1, y = 0$ i $x = \pi, y = 0$.

5. Riješiti sustav diferencijalnih jednadžaba
(a) $y' + 2y + z = \sin x$, $z' - 2z - 4y = \cos x$;
(b) $\frac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0$, $\frac{dy}{dt} - y + 2x + 2e^t = 0$ pod uvjetom $t = 0, x = 0, y = 1$.

Indeks

Aditivna konstanta, 191
Aksiom
    Arhimedov, 27
    Cantorov, 28
Algebarski komplement, 57
Aproksimacija pravokutnicima, 215
Apsolutna vrijednost
    kompleksnog broja, 43
    realnog broja, 29
    vektora, 70
Argument kompleksnog broja, 44
Arhimedova spirala, 97, 226
Asimptota, 182
    hiperbolina, 90
    kosa, 182
    uspravna, 182
    vodoravna, 182
Astroida, 92

Baza potencije, 30
Broj
    algebarski, 40
    decimalan, 31
    e, 120
    glavni, 14
    Imaginaran, 42
    kardinalan, 14
    neparan, 25, 39
    paran, 25, 39
    racionalan, 23
    transcendentan, 40, 120

Cikloida, 92
Cilindrična spirala, 93
Cirkulacija vektorskog polja, 315

Darbouxova suma, 272
Derivacija
    funkcije, 151
    funkcijske kompozicije, 157
    funkcijskog reda, 172
    implicitno zadane funkcije, 266
    inverzne funkcije, 158
    parcijalna, 245
    slijeva, 154
    vektorske funkcije, 291
    višeg reda, 163
    zdesna, 154
Descartesov list, 92
Determinanta, 53
Diferencijal, 247, 256
    drugi, 164
    n-ti, 164
    parcijalni, 246
    vektorske funkcije, 289
Diferencijal funkcije
    u točki, 160
Diferencijalna forma, 257
    egzaktna, 258
Diferencijalna jednadžba
    obična, n-tog reda, 340
Diferencijalna jednadžba, 339
    Bernoullijeva, 352
    drugog reda, 355
    drugog reda, homogena, 357
    drugog reda, linearna, 357
    egzaktna, 352
    homogena, 350
    homogena linearna, 357
    linearna, 351
    linearna, homogena, 351
    linearna, nepotpuna, 351
    obična, 339

s odjeljivim varijablama, 348, 350
Dijagonala
glavna, 50
sporedna, 50
Diretkrisa parabole, 91
Disjunkcija
ekskluzivna, 4
inkluzivna, 4
Disjunktna unija skupova, 7
Disjunktni skupovi, 7
Divergencija, 298
Djelomični zbroj reda, 124
Domena, 11
Drugi diferencijal, 256
Duljina luka, 227
Duljina ravninskog luka, 227
Duljina vektora, 70

Eksponent potencijin, 30
Ekvipotentni skupovi, 14
Ekvivalencija, 5
Ekvivalentne formule, 5
Elementarna operacija
na matrici, 61
Elipsa, 89
Elipsoid, 93
Eliptički integral druge vrste, 233
Eliptični hiperboloid
dvokrilni, 94
jednokrilni, 93
Eulerove zamjene, 201

Fokus (žarište)
elipse, 89
Fokus (žarište
parabole, 91
Fokus (žarište)
hiperbole, 90
Formula
binomna, 34
Cramerova, 66, 69
Eulerova, 171
Greenova, 319
Lagrangeova, 166
Moivreova, 44
Newton-Leibnizova, 211, 212
Ostrogradski Gaussova, 332
predikatne algebre, 5
rekurzivna, 197
Simpsonova, 216
Stokesova, 335
tangentna, 216
Taylorova, 168, 260
trapezna, 215
Funkcija, 11
(strogo) konkavna, 177
(strogo) konveksna, 177
(strogo) monotona, 238
(strogo) silazna, 238
(strogo) uzlazna, 238
algebarska, 112
arcus-sinus, 111
area-kosinus hiperbolni, 113
area-kotangens hiperbolni, 114
area-sinus hiperbolni, 113
area-tangens hiperbolni, 114
arkus-kosinus, 111
arkus-kotangens, 111
arkus-tangens, 111
bijektivna, 13
ciklometrijska, 110
deferencijabilna u točki, 160
derivabilna, 151
derivabilna na skupu, 151
derivabilna u točki, 151
diferencijabilna, 160, 246, 247
diferencijabilna na skupu, 247
Dirichletova, 150
divergentna u točki, 138
dvaput derivabilna, 163, 253
dvaput diferencijabilna, 164, 256
eksponencijalna, 108
elementarna, 112
faktorijel, 33
hiperbolna, 113
homogena po varijabli, 350

homogena, homogenog stupnja k, 350
identička, 12
implicitno zadana, 103, 266
induktivno definirana, 17
injektivna, 13
integrabilna, 206
inverzna, 13
iracionalna, 113
karakteristična, 16
konstantna, 13, 106
koordinatna, 288
kosinus, 110
kosinus hiperbolni, 113
kotangens, 110
kotangens hiperbolni, 113
logaritamska, 108
monotona, 105
neomeđena, 104
neparna, 105
neprekidna, 140
neprekidna na skupu, 140, 242
neprekidna u točki, 140, 242
neprekidno derivabilna, 152
neprekidno derivabilna na skupu, 246
omeđena, 104
omeđena odozdol, 104
omeđena odozgor, 104
omeđena, 238
opća potencija, 106
padajuća, 105
parametarski zadana, 104
parna, 105
periodična, 106
po dijelovima monotona, 238
podintegralna, 192
prava racionalna, 112
prekidna, 242
prekidna u točki, 140
R-integrabilna, 206, 272
racionalna, 112
sinus, 110
sinus hiperbolni, 113
skalarna, 235
strogo monotona, 105
surjektivna, 13
tablično zadana, 102
tangens, 110
tangens hiperbolni, 113
transcendentna, 113
trigonometrijska, 109
uzlazna, 105
vektorska, 287
više varijabla, 235
zadana analitički, 101
zadana grafički, 102
Funkcijski prirast, 142, 242

Generatrisa, 95
Geometrijski ekscentricitet
elipse, 89
hiperbole, 90
Glatka parametrizacija, 310
Gomilište
niza, 117
skupa, 239
Gradijent, 298
Graf funkcijin, 11
Grafičko integriranje, 217
Granična vrijednost
funkcije u točki, 136, 240
niza, 116, 240
vektorske funkcije, 288
Granične vrijednosti
uzastopna, 241
Granična vrijednost
slijeva, 138
zdesna, 138
Gustoća, 276

Hamiltonov diferencijalni operator, 299
Hiperbola, 90
Hitnica, 91

Imaginarna jedinica, 42
Implikacija, 4
Infimum, 9

Infleksija, 180
Inkluzija, 12
Integracijska konstanta, 192
Integracijska varijabla, 192
Integral
    binomni, 202
    donji (Riemannov), 207
    dvostruki, 272
    elementarno rješiv, 197
    funkcijskog reda, 203
    gornji (Riemannov), 207
    neodređeni, 192
    nepravi, 219
    određeni, 206, 272
    ovisan o parametru, 279
    Poissonov, 283
    Riemannov, 206
    skalarnog polja, 311
    tablični, 194
    trostruki, 272
    vektorske funkcije, 293
    vektorskog polja, 313
    višestruki, 272
Integralna suma, 206, 272
Intengrand, 192
Interval
    otvoreni, 10
    poluzatvoreni, 10
Izobara, 237, 297
Izohipsa, 237, 297
Izvodnica
    valjčaste plohe, 95

Jednadžba, 46
    karakteristična, 359
Jednadžba ravnine
    Hesseov oblik, 87
    normalni oblik, 87

Kanonski zapis pravca, 84
Kardioida, 97
Klasa, 14
Kodomena, 11
Koeficijent
    binomni, 33
    opći binomni, 172
Koeficijent smjerovni, 85
Kofaktor, 57
Kombinacija
    n-tog reda i r-tog razreda, 35
Kombinacija s ponavljanjem
    n-tog reda i r-tog razreda, 37
Kombinacije s ponavljanjem
    multiskupa, 38
Kombinacijsko načelo, 41
Kompleksni broj, 42
    eksponencijalni zapis, 171
    trigonometrijski zapis, 44
Komplement skupa, 7
Komponente
    skalarne, 76
    vektorske, 76
Komponente vektora
    skalarne, 74
    vektorske, 74
Kompozicija, 12
Konjugirano kompleksni par, 43
Konjunkcija, 4
Konvergencija
    jednolika, 130
    obična, 129
    po točkama, 129, 130
    uniformna, 130
Konvergencija reda
    apsolutna, 131
    jednolika, 132
    obična, 131
    po točkama, 131
    uniformna, 132
Koordinate
    sferne, 98
Koordinate polarne, 96
Koordinatna os
    aplikatna, 75
    apscisna, 74
    ordinatna, 74
Koordinatne ravnine, 75
Koordinatni sustav, 73

(desni) pravokutni, 75
cilindrični, 97
desni, 73
lijevi, 75
polarni, 96
pravokutni, 75
sferni, 98
Kriterij
Cauchyjev, 127
D'Alembertov, 127
Leibnizov, 128
poredbeni, 126
Raabeov, 127
Weierstrassov, 132
Krivulja
čunjosječnica, 89
drugoga reda, 89
ekvipotencijalna, 297
glatka, 223
jednostavna, 223
jednostavna glatka, 309
jednostavno zatvorena, 223, 310
po dijelovima glatka, 224, 310
ravninska, 223
razinska, 236
usmjerena, 310
zatvorena, 223
Krivuljni integral
druge vrste, 313
prve vrste, 311
u potencijalnom polju, 316
Kružna uzvojnica, 93
Kružnica, 89
Kugla, 239
Kvadar, 239
Kvadrant, 74
Kvadrika, 93
Kvantifikator
egzistencijalni, 5
univerzalni, 5

L'Hospitalovo pravilo, 166
Laplaceov diferencijalni operator, 300
Laplaceov razvoj, 57
Leibnizov pristup, 152
Leibnizovo pravilo, 281
poopćeno, 281
Lemniskata, 97
Limes
funkcije, 135
inferior, 120
niza, 116, 240
superior, 120
uzastopni, 241
vektorske funkcije, 288
Linearna
ekstrapolacija, 102
interpolacija, 102
Linearna kombinacija
matrična, 51
netrivijalna, 51
stupaca (redaka) matrice, 52
trivijalna, 51
vektora, 77
Linearna zavisnost
redaka matrice, 52
stupaca matrice, 52
Linearno nezavisni
vektori, 77
Linearno zavisni
vektori, 77
Lipschitzov uvjet, 341
Lipschitzova konstanta, 342
Logaritam
Briggsov, 109
dekadski, 109
prirodni, 109
Logički predikat, 5
Lokalni
ekstrem, 175, 262
maksimum, 175, 262
minimum, 175, 262

Majoranta reda, 125
Maksimum, 9
funkcije, 146
Matričin

element, 49
redak, 49
stupac, 49
Matrica
donja trokutasta, 69
gornja trokutasta, 69
inverzna, 62
Jacobijeva, 277, 290
jedinična, 50
jednoredna, 49
jednostupčana, 49
kompleksna, 49
kvadratna, 50
pravokutna, 49
realna, 49
regularna, 62
singularna, 62
sustava, 64
sustava - proširena, 64
tipa (m,n), 49
Matrice
ekvivalentne, 61
linearno nezavisne, 51
linearno zavisne, 51
Međa
donja, 9
najveća donja, 9
Međa
gornja, 9
najmanja gornja, 9
Metoda
neodređenih koeficijenata, 198
postupnog približavanja, 345
Minimum, 9
funkcije, 146
Minoranta reda, 125
Množenje
mješovito, 81
prirodnih brojeva, 18
skalarno, 77
vektora skalarom, 73
vektorsko, 79
Množenje
matrice skalarom, 50
Modul kompleksnog broja, 44
Modul vektora, 70
Multiplikator
Eulerov, 353
integracijski, 353
Multiskup, 36

Načelo definicije indukcijom, 17
Načelo potpune indukcije, 17
Nadskup, 6
Najmanji element, 9
Najveći element, 9
Negacija, 5
Nejednadžba, 46
Nejednakost
Bernoullijeva, 41
Cauchyjeva, 295
trokutna, 29
Neodređeni oblici, 166
Nepravi integral
glavna vrijednost, 222
V.P., 222
Newtonov pristup, 152
Niz
(strogo) monoton, 116
(strogo) silazan, 116
(strogo) uzlazan, 116
Cauchyjev, 122
divergentan, 117, 240
funkcijski, 129
geometrijski, 122
konvergentan, 117, 240
realnih brojeva, 115
stacionaran, 116
u skupu X, 115
Norma vektora, 70
Normala
krivulje, 153
plohe, 304
ravnine, 86
Nulmatrica, 50
Nultočka funkcije, 184
Nulvektor, 71

Obratna slika, 13
Obujam geometrijskog tijela, 276
Obujam rotacijskog tijela, 229
Okolina
    otvorena, 239
Oktant, 75
Opći oblik
    jednadžbe ravnine, 86
Operacija
    binarna, 12
    Lukasiewiczeva, 6
    Shefferova, 6
Operator
    delta, 300
    nabla, 299
Osnovni teorem
    integralnog računa, 211
Osnovni teorem algebre, 198
Ostatak
    Cauchijev oblik, 169
    Lagrangeov oblik, 169
    reda, 124
    Schlomilchov oblik, 169
Otvorena rečenica, 5

Parabola, 91
Paraboloid
    eliptični, 94
    hiperbolični, 94
Parametarski zapis pravca, 83
Parametrizacija krivulje
    neprekidna, 223
Parcijalna derivacija
    drugog reda, 253
    n-tog reda, 253
    neprekidna, 246
Parcijalna integracija, 196
Pascalov trokut, 33
Peanovi aksiomi, 17
Period funkcije, 106
    osnovni, 106
Permutacija
    multiskupa, 37
    n-tog reda, 34
    neparna, 35
    parna, 35
    s ponavljanjem, 37
    skupa, 35
Plošni integral
    druge vrste, 330
    prve vrste, 326
Ploština plohe, 326
Ploština
    rotacijske plohe, 230
Ploština ravninskog lika, 225
Ploha, 323
    drugog reda, 93
    ekvipotencijalna, 297
    glatka, 323
    konusna, 95
    kuglina, 93
    orijentirana, 328
    po dijelovima glatka, 324
    razinska, 236
    stožasta, 95
    usmjerena, 328
    valjčasta , 95
Početni komad, 20
Početni uvjet, 340
Poddeterminanta, 57
Podmatrica, 57
Podniz
    realnog niza, 118
Područje
    integracijsko, 207
Područje
    definicijsko, 11
    vrijednosno, 11
Podskup, 6
Pogrješka
    apsolutna, 162
    postotna, 162
    relativna, 162
Polarna os, 96
Polinom, 31
Polje
    bezvrtložno, 305
    elektrostatsko, 297

gravitacijsko, 297
kompleksnih brojeva, 42
konzervativno, 305
nestacionarno, 297
potencijalno, 305
realnih brojeva, 26
selenoidalno, 305
skalarno, 295
stacionarno, 297
vektorsko, 295
vrtložno, 305
Polumjer
konvergencijski, 133
Potencija, 30
Potencijal
skalarni, 305
vektorski, 308
Potpuno uređeno polje
racionalnih brojeva, 23
realnih brojeva, 26
Potpunost euklidskog prostora, 122
Površina
ravninskog lika, 276
Pramen ravnina, 99
Prametrizacija krivulje
glatka, 224
Prazan skup, 6
Prekid
druge vrste, 144
prve vrste, 144
uklonjiv, 144
Prerez, 10
Presjek skupova, 7
Preslikavanje, 140, 242
Prikloni kutovi, 76
Primitivna funkcija, 190
vektorske funkcije, 293
Proširenje funkcije, 13
Produkt
direktni, 8
Kartezijev, 8
vektorski, 79
vektorsko-skalarni, 81
Produktno pravilo, 41
Profinjenje rastava, 206
Projekcija, 12
Prostor
m-dimenzionalni, 235

Radijus-vektor, 69
Rang
determinantin, 60
matričin, 60
Rastav
ekvidistantni, 215
kvadra, 271
segmenta, 206
Rastav na parcijalne razlomke, 199
Ravnalica
valjčaste plohe, 95
parabole, 91
Ravninski luk, 223
Razlika skupova, 7
Razredi, 8
Razvoj
Maclaurinov, 169
Taylorov, 169
Red
alternirajući, 128
alternirajući harnonijski, 129
apsolutno konvergentan, 127
binomni, 172
divergentan, 124
funkcijski, 131
geometrijski, 124
harmonijski, 125
konvergentan, 124
Maclaurinov, 169, 261
potencijski, 132, 172
realnih brojeva, 123
realnih funkcija, 131
relativno konvergentan, 128
s pozitivnim članovima, 125
Taylorov, 169, 261
uvjetno konvergentan, 128
zbrojiv, 124
Rektifikabilan luk, 227
Relacija

antisimetrična, 9
binarna, 8
potpunog uređaja, 9
razredbena, 8
refleksivna, 8
simetrična, 8
tranzitivna, 8
uređajna, 9
Relativno prosti brojevi, 40
Rješenje diferencijalne jednadžbe, 340
Rješenja
linearno nezavisna, 358
Rješenje diferencijalne jednadžbe
opće, 340
partikularno, 340
posebno, 340
Rješenje jednadžbe, 46
Rotacija, 298
Rotacijsko tijelo, 229

Sarussovo pravilo, 54
Segment, 10
Segmentni oblik
jednadžbe ravnine, 86
Sfera, 93
Simetrični zapis pravca, 84
Skalarni produkt, 77
Skalarno polje
diferencijabilno, 298
neprekidno, 298
Skup, 6
(potpuno) uređen, 9
beskonačan, 14
cijelih brojeva, 23
diskretno uređen, 20
iracionalnih brojeva, 26
konačan, 14
kvocijentni, 8
neprebrojiv, 21
omeđen, 239
omeđen odozdol, 9
omeđen, 10
omeđen odozgor, 9
otvoren, 239
parcijalno uređen, 9
partitivni, 7
prebrojiv, 21
svuda gust, 24
zatvoren, 239
zvjezdast, 258
Slika skupa, 13
Sljedbenik, 20
Smjer vektora, 70
Smjerovni kosinusi, 76
Smjerovni vektor pravca, 83
Strana plohe
vanjska, unutraŽnja, 329
Strujnice, 297
Suženje funkcije, 13
Sud, 3
Suma
donja, 207
gornja, 207
Suma reda, 124
Supremum, 9
Supstitucija, 194
Sustav
binarni, 31
homogeni, 66
kontradiktorni, 68
proturječni, 68
Sustav linearnih jednadžaba, 63

Tablica osnovnih integrala, 193
Tangencijalna ravnina, 250
Tangenta
krivulje, 153
plohe, 250
Tautologija, 6
Težište ravninskog lika, 231
Teorem
Abelov, 149
Bolzano-Weierstrassov, 119
Cantor-Bernsteinov, 15
Darbouxov, 186
Fermatov, 165
Fubinijev, 273

Greenov, 319
Guldinov, 232
Kronecker-Capellijev, 64
L' Hospitalov, 166
Lagrangeov, 165
o divergenciji, 332
o gradijentu, 334
o rotaciji, 334
o srednjoj vrijednosti, 165, 213
Picardov, 341
Rolleov, 165
Schwarzov, 253
Stokesov, 335
Točka
infleksijska, 180
izolirana, 152, 239
kritična, 175
stacionarna, 175
Točka
stacionarna, 263
Tok vektorskog polja, 330
Totalna diferencija, 242

Ulančan par matrica, 52
Umnožak matrica, 52
Unija skupova, 7
Usmjerena derivacija
skalarnoga polja, 302
vektorskoga polja, 304
Usmjerena dužina, 69

Varijabla
nezavisna, 11
zavisna, 11
Varijablin prirast, 142
Varijacija
n-tog reda i r-tog razreda, 36
Varijacija s ponavljanjem
n-tog reda i r-tog razreda, 38
Varijacije s ponavljanjem
multiskupa, 38
Vektor, 70
bazni, 74
jediničan, 71
suprotan, 71
Vektori
iste orijentacije, 71
istog smjera, 71
kolinearni, 70, 74
koplanarni, 74
Vektorska funkcija
derivabilna u točki, 290
diferencijabilna u točki, 289
neprekidna na skupu, 288
neprekidna u točki, 288
Vektorska jednadžba
pravca, 83
ravnine, 85
Vektorski oblik
jednadžbe ravnine, 86
Vektorsko
oduzimanje, 72
Vektorsko polje
diferencijabilno, 298
neprekidno, 298
Višekratnik, 40
najmanji zajednički, 40

Zajednička mjera, 40
najveća, 40
Zapis krivulje
parametarski, 310
vektorski, 310
Zbrajanje
matrično, 50
paralelogramsko, 71
po trokutu, 71
prirodnih brojeva, 18
Zbroj vektorski, 71
Znamenke
binarne, 31
decimalne, 18, 31